On considère une série convergente $\sum u_n$ dont le terme général est strictement positif. Il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ telle que la série $\sum b_n u_n$ soit convergente.

Puisque la série $\sum u_n$ est convergente, on peut considérer la suite de ses restes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Par définition, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et comme les u_k sont strictement positifs, cette suite est strictement décroissante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = u_{n+1} + R_{n+1} > R_{n+1}$$

et par voie de conséquence, elle est aussi strictement positive.

❧ Comme $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive de limite nulle, il existe une suite extraite $(R_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum R_{\varphi(m)}$ soit (absolument) convergente.

✍ *Considérons une série convergente de terme général strictement positif $\sum \varepsilon_n$ (série de Riemann, série géométrique, le choix ne manque pas). Comme la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rang K_n tel que*

$$\forall\, k \geqslant K_n, \quad 0 < R_k \leqslant \varepsilon_n.$$

On choisit $\varphi(0) = K_0$ pour avoir $0 < R_{\varphi(0)} \leqslant \varepsilon_0$. En supposant définis des entiers

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(m)$$

tels que

$$\forall\, 0 \leqslant \ell \leqslant m, \qquad 0 \leqslant R_{\varphi(\ell)} \leqslant \varepsilon_\ell,$$

on choisit $\varphi(m+1) = \max\{K_{m+1}, \varphi(m)+1\}$ pour avoir $\varphi(m+1) > \varphi(m)$ et $0 \leqslant R_{\varphi(m+1)} \leqslant \varepsilon_{m+1}$.

On a ainsi défini une suite extraite et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant R_{\varphi(m)} \leqslant \varepsilon_m.$$

Comme la série $\sum \varepsilon_m$ est convergente, on en déduit que la série $\sum R_{\varphi(m)}$ est convergente elle aussi.

❧ On pose alors $b_0 = 0$ (par exemple) et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$b_{n+1} = \left| \begin{array}{ll} b_n + 1 & \text{s'il existe un entier } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = \varphi(m), \\ b_n & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Comme φ est une extractrice, elle prend une infinité de valeurs, ce qui prouve que la suite (croissante !) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

❧ La série $\sum b_n.u_n$ est une série de terme général positif, donc il suffit de majorer ses sommes partielles pour prouver qu'elle converge.

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} b_n.u_n = \sum_{n=1}^{N} b_n.(R_{n-1} - R_n) = b_1.R_0 + \sum_{n=1}^{N} (b_{n+1} - b_n).R_n - b_N.R_N$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} (b_{n+1} - b_n).R_n = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ \varphi(m)\leqslant N}} R_{\varphi(m)} < \sum_{m=0}^{+\infty} R_{\varphi(m)}.$$

On a trouvé un majorant fini (la somme d'une série convergente), donc la série de terme général positif $\sum b_n.u_n$ est convergente.