Problème de Mathématiques

Référence pp1916 — Version du 14 octobre 2025

On note E, l'espace vectoriel des applications continues du segment $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant

$$\forall\, f, g \in E, \quad \langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

2. On pose $u = [t \mapsto 1]$, $v = [t \mapsto t]$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Déterminer une base orthonormée de F.

3. Calculer le projeté orthogonal de

$$w = \big[t \mapsto e^t\big]$$

sur le sous-espace F. En déduire la valeur de

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \big[e^t - (a + bt)\big]^2\,dt.$$

(On pourra appliquer le théorème de Pythagore pour simplifier les calculs.)

Solution ❀ Calcul de distance

1. Tout d'abord, quelles que soient les applications f et g dans E, le produit fg est continu sur le segment $[-1, 1]$, donc l'intégrale $\langle f \mid g \rangle$ est bien définie. Ainsi, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est une application bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) : quelles que soient f, g, h dans E et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle \alpha f + g \mid h \rangle &= \alpha \langle f \mid h \rangle + \langle g \mid h \rangle \\ \langle f \mid \alpha g + h \rangle &= \alpha \langle f \mid g \rangle + \langle f \mid h \rangle\end{aligned}$$

et symétrique : quelles que soient f et g dans E,

$$\langle f \mid g \rangle = \langle g \mid f \rangle .$$

En tant qu'intégrale d'une fonction positive, les bornes de l'intégrale étant rangées dans l'ordre croissant,

$$\forall\, f \in E, \quad \langle f \mid f \rangle \geqslant 0.$$

Enfin, si $\langle f \mid f \rangle = 0$, alors

$$\forall\, t \in [-1, 1], \quad f^2(t) = 0$$

(si l'intégrale d'une fonction *continue* et *positive* sur $[-1, 1]$ est nulle, c'est que la fonction est identiquement nulle), donc $f = 0_E$.

En tant que forme bilinéaire symétrique et définie positive, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Les fonctions u et v sont continues sur le segment $[-1, 1]$: ce sont bien des vecteurs de E. Comme v est impaire et intégrable, son intégrale sur le segment symétrique $[-1, 1]$ est nulle :

$$\langle u \mid v \rangle = \int_{-1}^{1} t \, dt = 0$$

donc les vecteurs u et v sont orthogonaux.

Comme ils sont distincts du vecteur nul, ils forment une famille libre.

❧ Par définition, le sous-espace F est engendré par u et v, donc (u, v) est une base orthogonale de F et il suffit de normaliser les deux vecteurs pour en déduire une base orthonormée. Or

$$\|u\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2 \, dt = 2 \qquad \|v\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 \, dt = \frac{2}{3}$$

donc

$$\mathscr{B}_0 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} u, \sqrt{\frac{3}{2}} v \Big)$$

est une base orthonormée de F.

3. Comme on connaît une base orthogonale de F, on peut appliquer la formule du cours pour le projeté orthogonal :

$$p(w) = \frac{\langle u \mid w \rangle}{\|u\|^2} \cdot u + \frac{\langle v \mid w \rangle}{\|v\|^2} \cdot v.$$

On calcule les deux produits scalaires (le second en intégrant par parties) :

$$\begin{aligned}\langle u \mid w \rangle &= \int_{-1}^{1} e^t \, dt = e^1 - e^{-1} \\ \langle v \mid w \rangle &= \int_{-1}^{1} t e^t \, dt = \big[(t-1) e^t \big]_{-1}^{1} = 2e^{-1}\end{aligned}$$

et on en déduit enfin que

$$\forall\, t \in [-1, 1], \quad p(w)(t) = \operatorname{sh} 1 + 3e^{-1} \cdot t.$$

❧ Quels que soient a et b dans $\mathbb{R}$,

$$\int_{-1}^{1} \big[e^t - (a + bt) \big]^2 \, dt = \|w - (au + bv)\|^2.$$

Par définition (ça se voit bien sur une *figure*), le vecteur $w - p(w)$ est orthogonal au plan F. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\|w - (au + bv)\|^2 &= \|\underbrace{w - p(w)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(w) - (au + bv)}_{\in F}\|^2 \\ &= \|w - p(w)\|^2 + \|p(w) - (au + bv)\|^2\end{aligned}$$

donc

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left[e^t - (a + bt)\right]^2 dt = \|w - p(w)\|^2.$$

L'expression de $w - p(w)$ est un peu compliquée... Il vaut mieux appliquer le Théorème de Pythagore : en notant

$$p(w) = a_0 \cdot u + b_0 \cdot v,$$

on a

$$\begin{aligned}\|w - p(w)\|^2 &= \|w\|^2 - \|p(w)\|^2 \\ &= \|w\|^2 - \left[a_0^2\|u\|^2 + b_0^2\|v\|^2\right]\end{aligned}$$

(puisque u et v sont orthogonaux). Or

$$\|w\|^2 = \int_{-1}^{1} e^{2t}\, dt = \operatorname{sh} 2,$$

donc

$$\|w - p(w)\|^2 = \operatorname{sh} 2 - \left[2\operatorname{sh}^2 1 + 6e^{-2}\right]$$

c'est-à-dire

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left[e^t - (a + bt)\right]^2 dt = 1 - 7e^{-2} \approx 5,3.10^{-2}.$$