

Problème de Mathématiques

Référence pp1910 — Version du 14 octobre 2025

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \\ a_n &= H_n - \ln n, \\ u_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right). \end{aligned}$$

1. a. Démontrer que la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est convergente.
1. b. En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel γ .
1. c. Démontrer que

$$\gamma - a_n \sim \frac{1}{2n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Démontrer que la série de terme général

$$v_k = \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k} \right)$$

est absolument convergente.

3. a. Démontrer que la suite de terme général

$$V_n = \ln(\sqrt{n} u_n) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{a_n}{2}$$

est convergente.

3. b. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis la nature de la série $\sum u_n$.

Solution ✱ Une série numérique

1. a. Pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

donc

$$a_{n+1} - a_n \sim \frac{1}{2n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme $\sum 1/2n^2$ est une série *convergente* de terme général *positif*, la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente (et donc convergente) et de plus

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \quad (\text{eq.1})$$

lorsque n tend vers $+\infty$ (Théorème de comparaison par équivalence pour les séries de *terme général positif* et Théorème de sommation des relations de comparaison).

1. b. Comme $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est une série télescopique, on en déduit que la *suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

1. c. Puisqu'il s'agit du reste d'une série télescopique,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \left[\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k \right] - a_n = \gamma - a_n.$$

On a vu en cours que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Donc on peut déduire de (eq.1) que

$$\gamma - a_n \sim \frac{1}{2n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. D'après la formule de Taylor,

$$\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

lorsque h tend vers 0. On applique cette formule avec

$$h = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

où k tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$v_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$

lorsque k tend vers $+\infty$. Comme la série (de Riemann) $\sum 1/k^{3/2}$ est une série convergente de terme général positif, on en déduit que la série $\sum v_k$ est absolument convergente (et donc convergente).

3. a. Il est facile de vérifier que

$$\forall n \geq 1, \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

Comme la série $\sum v_k$ est convergente (question précédente), la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est elle aussi convergente.

3. b. D'après ce qui précède,

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(\sqrt{n}u_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{a_n}{2} + V_n.$$

Or la série alternée

$$\sum \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

est convergente (puisque $1/\sqrt{k}$ tend vers 0 en décroissant); la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente (par **1.b.**) et la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est convergente (question précédente). Donc la suite de terme général $\ln(\sqrt{n}u_n)$ converge vers un certain réel λ .

Par continuité de la fonction $\exp$ (en λ), on en déduit que la suite de terme général $\sqrt{n}u_n$ converge vers e^λ et donc que

$$u_n \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

• La série $\sum e^\lambda/\sqrt{n}$ est une série (de Riemann) *divergente* de terme général *positif*, donc la série $\sum u_n$ est divergente (Théorème de comparaison par équivalence pour les séries de terme général positif).