Problème de Mathématiques

Référence pp1908 — Version du 14 octobre 2025

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_0^1 \ell n(1+t^n)\,dt.$$

1. Démontrer que
$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ell n(1+x) \leqslant x.$$

2. Démontrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

3. Démontrer que la série $\sum u_n$ est divergente.

Solution ❀ Séries numériques

1. On *sait* que la fonction $[x \mapsto \ln(1+x)]$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc majorée sur cet intervalle par l'expression de sa tangente au point d'abscisse $x = 0$. Ainsi,

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Pour établir l'autre inégalité, on va étudier la fonction φ définie par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \varphi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \ln(1+x) - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

Il est clair que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, que $\varphi(0) = 0$ et que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \varphi'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \geqslant 0.$$

La fonction φ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit qu'elle est positive et donc que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'encadrement précédent,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \ln(1+t^n) \leqslant t^n$$

et par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 t^n \,dt = \frac{1}{n+1}.$$

Par encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

D'autre part,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant t^{n+1} \leqslant t^n \leqslant 1$$

et par croissance de la fonction $\ln$,

$$0 \leqslant \ln(1+t^{n+1}) \leqslant \ln(1+t^n)$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite *décroissante*.

D'après le Critère spécial des séries alternées, la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ est donc convergente.

3. L'encadrement de $\ln(1+x)$ et la positivité de l'intégrale donnent aussi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \,dt.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \,dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} \cdot nt^{n-1} \,dt$$

et la fonction $[t \mapsto t^n]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ sur $[0,1]$. On déduit du théorème de changement de variable que

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \,dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u} \,du.$$

Pour tout $u \in \,]0,1]$, on a $\ln u \leqslant 0$ et donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u^{1/n} = \exp \frac{\ln u}{n} \geqslant e^{\ln u} = u.$$

On en déduit donc que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n \geqslant \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u}{1+u} \,du = \frac{1 - \ln 2}{n}.$$

Comme $(1 - \ln 2) > 0$ et que la série harmonique $\sum 1/n$ est une série *divergente* de terme général *positif*, on déduit du théorème de comparaison que la série $\sum u_n$ est divergente.

REMARQUE.— On n'a pas trouvé d'*équivalent* pour u_n, mais ce qui précède prouve tout de même que

$$u_n = \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— Le Théorème de convergence dominée permet de démontrer que

$$\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ell n\, 2.$$