

Problème de MathématiquesRéférence pp1907 — Version du 14 octobre 2025

Démontrer que la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$$

est semi-convergente.

Solution * Séries numériques

Il est clair que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

- Il est tout aussi clair que la série de terme général

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2n}$$

est convergente d'après le Critère spécial des séries alternées.

Par ailleurs, en posant

$$\forall n \geq 1, \quad w_n = u_n - v_n$$

on a $w_n = \mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série (de Riemann) $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, on déduit du Théorème de comparaison que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

Comme $u_n = v_n + w_n$, la série $\sum u_n$ est une somme de deux séries convergentes, donc elle est convergente.

- D'autre part, le développement asymptotique de u_n montre que

$$|u_n| \sim \frac{1}{2n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Or la série $\sum 1/2n$ est une série *divergente* dont le terme général est *positif*, donc la série $\sum |u_n|$ est divergente (d'après le Théorème de comparaison par équivalence).

- Ainsi, la série $\sum u_n$ est convergente sans être absolument convergente : c'est bien une série semi-convergente.