

Problème de Mathématiques

Référence pp1906 — Version du 14 octobre 2025

Soient a et b , deux nombres réels. À quelle condition sur a et b la série de terme général

$$u_n = 2 + (an + b) \ln \frac{n+2}{n+4}$$

est-elle convergente ?

Solution ✿ Une série numérique

Il faut remarquer que

$$\ln \frac{n+2}{n+4} = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{4}{n}\right)$$

pour obtenir facilement que

$$u_n = (2 - 2a) + \frac{6a - 2b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

- ✿ Si $2 - 2a \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- ✿ Si $2 - 2a = 0$ et si $6a - 2b \neq 0$, alors

$$u_n \sim \frac{K}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$ (avec $K \neq 0$ bien entendu). Or la série $\sum K/n$ est une série *divergente* dont le terme général est *de signe constant*. D'après le Théorème de comparaison par équivalence, la série $\sum u_n$ est divergente.

- ✿ Enfin, si $2 - 2a = 0$ et si $6a - 2b = 0$, alors

$$u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et d'après le Théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente (pour les séries réelles ou complexes, la convergence absolue implique la convergence).

- ✿ L'équation $2 - 2a = 0$ a pour solution $a = 1$. Dans ces conditions, l'équation $6a - 2b = 0$ a pour solution $b = 3$.

Finalement, la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si,

$$(a, b) = (1, 3)$$

(et dans ce cas, elle est même absolument convergente).