

Problème de Mathématiques

Référence pp1905 — Version du 14 octobre 2025

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^n t \, dt.$$

1. Démontrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. Calculer w_{2k+1} pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que la série $\sum w_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
4. a. Démontrer que la suite extraite $(w_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
4. b. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{2n+2} + w_{2n} = \frac{2}{2n+1}.$$

4. c. En déduire un équivalent de w_{2n} lorsque n tend vers $+\infty$.
4. d. Que dire de la série $\sum w_n z^n$ lorsque $|z| > 1$?
4. e. Étudier la nature des séries $\sum w_{2n}$ et $\sum (-1)^n w_{2n}$.

Solution ✱ Séries numériques

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$[t \mapsto \tan^n t]$$

est continue sur le segment $[-\pi/4, \pi/4]$, donc l'intégrale w_n a bien un sens.

1. Pour tout $t \in [-\pi/4, \pi/4]$,

$$|\tan t| \leq 1$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|w_n| \leq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\tan^n t| dt \leq \frac{\pi}{2} \times 1.$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée.

2. Comme l'exposant $n = 2k + 1$ est *impair*, l'intégrande $\tan^n t$ est une fonction impaire de t . Comme cette fonction est intégrable sur le segment $[-\pi/4, \pi/4]$ et que ce segment est symétrique par rapport à 0, l'intégrale est nulle. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad w_n = 0.$$

3. D'après l'encadrement de w_n ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n z^n| \leq \frac{\pi}{2} \cdot |z|^n.$$

Si $|z| < 1$, alors le majorant est le terme général d'une série (géométrique) absolument convergente et par comparaison, la série $\sum w_n z^n$ est absolument convergente.

4. a. Pour tout $t \in [-\pi/4, \pi/4]$,

$$0 \leq \tan^2 t \leq 1$$

donc

$$0 \leq \tan^{2n+2} t \leq \tan^{2n} t$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq w_{2n+2} \leq w_{2n}.$$

4. b. Par linéarité de l'intégrale,

$$w_{2n+2} + w_{2n} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^{2n} t (1 + \tan^2 t) dt.$$

La fonction $[u \mapsto u^{2n}]$ est continue sur le segment $[-1, 1]$ et la fonction $[t \mapsto \tan t]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/4, \pi/4]$, donc le changement de variable $u = \tan t$ donne

$$w_{2n+2} + w_{2n} = \int_{-1}^1 u^{2n} du = \frac{2}{2n+1}$$

(puisque $du = (1 + \tan^2 t) dt$).

4. c. Comme la suite $(w_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,

$$\forall n \geq 1, \quad w_{2n+2} + w_{2n} \leq 2w_{2n} \leq w_{2n} + w_{2n-2}$$

et donc

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2n+1} \leq w_{2n} \leq \frac{1}{2n-1}.$$

On en déduit que

$$w_{2n} \sim \frac{1}{2n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

4. d. Si $|z| > 1$, alors $w_{2n}|z|^{2n}$ tend vers $+\infty$ et par conséquent la série $\sum w_n z^n$ est grossièrement divergente.

4. e. On a démontré que

$$w_{2n} \sim \frac{1}{2n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Or la série $\sum 1/2n$ est une série *divergente* de terme général *positif*. Donc, d'après le Théorème de comparaison par équivalence, la série $\sum w_{2n}$ est divergente.

✱ La suite de terme général w_{2n} tend vers 0 en *décroissant*. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série alternée $\sum (-1)^n w_{2n}$ est convergente.