Problème de Mathématiques

Référence pp1501 — Version du 14 octobre 2025

On note E, l'espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\| = \left|f(0)\right| + 2\int_0^1 \left|f'(t)\right| \,dt,$$

$$N(f) = 2\left|f(0)\right| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| \,dt.$$

1. a. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E. *On admettra que, de même,* N *est une norme sur* E.

1. b. Démontrer que les normes $\|\cdot\|$ et N sont équivalentes sur E.

2. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|$?

Solution ❀ Normes équivalentes

1. a. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée f' est continue et toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment. Par positivité de l'intégrale, l'application $\|\cdot\|$ est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

La quantité $\|f\|$ est la somme de deux quantités *positives*. Par conséquent, si $\|f\| = 0$, alors $f(0) = 0$ et

$$\int_0^1 \left|f'(t)\right| dt = 0.$$

Comme la fonction $|f'|$ est *continue* et *positive* sur $[0,1]$, on en déduit que f' est identiquement nulle sur l'*intervalle* $[0,1]$ et donc que la fonction f est constante. Comme $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle.

Il est clair que $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ quels que soient la fonction f et le scalaire λ.

Enfin, par inégalité triangulaire,

$$\left|f(0) + g(0)\right| \leqslant \left|f(0)\right| + \left|g(0)\right|$$

et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left|f'(t) + g'(t)\right| \leqslant \left|f'(t)\right| + \left|g'(t)\right|.$$

Par positivité et linárité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 \left|f'(t) + g'(t)\right| dt \leqslant \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt + \int_0^1 \left|g'(t)\right| dt$$

et finalement que

$$\forall\, f, g \in E, \quad \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

L'application $\|\cdot\|$ est donc bien une norme.

1. b. Il est clair que

$$\left|f(0)\right| \leqslant \|f\| \quad \text{et que} \quad \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt \leqslant \|f\|.$$

On en déduit que

$$\forall\, f \in E, \quad N(f) \leqslant 3\|f\|.$$

On démontre de même que

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\| \leqslant 3N(f),$$

donc les deux normes sont bien équivalentes :

$$\forall\, f \in E, \quad \frac{1}{3}\|f\| \leqslant N(f) \leqslant 3\|f\|.$$

2. Comme E est un espace vectoriel de dimension infinie, on doit savoir que toutes les normes sur E ne sont pas équivalentes.

Un exemple ? Pour tout $n \geqslant 1$, posons

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t.$$

Il est clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E et qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n\pi}.$$

Par ailleurs,

$$N(f_n) = \left|\sin n\pi 0\right| + \int_0^1 \left|\cos n\pi t\right| dt.$$

Le changement de variable affine $u = \alpha_n t$ montre que

$$N(f_n) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{n\pi} \left|\cos u\right| du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos u|\, du = \frac{2}{\pi}.$$

puisque $|\cos|$ est π-périodique.

Comme une même suite d'éléments de E tend vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et ne tend pas vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ (la suite reste sur une sphère de rayon $2/\pi$ pour $\|\cdot\|$), les deux nomres $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ ne sont pas équivalentes.