Problème de Mathématiques

Référence pp2116 — Version du 14 octobre 2025

Soient deux réels $0 < a < b$. On considère la fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \qquad f(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $f(t)$.
2. Comparer (à l'aide des relations o, $\mathcal{O}$ ou $\sim$) les expressions $f(t)$, e^{-at} et e^{-bt} lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Soient $0 < \varepsilon < A$.
3. a. Pourquoi l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{A} f(t)\,dt$$

est-elle définie ?
3. b. Démontrer que

$$\int_{\varepsilon}^{A} f(t)\,dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

NB : On citera soigneusement tous les théorèmes appliqués (avec les conditions d'application, bien entendu).
3. c. Vérifier que

$$\forall\, aA \leqslant u \leqslant bA, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-u}}{u} \leqslant \frac{e^{-aA}}{aA}.$$

En déduire que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du = 0.$$

3. d. Démontrer par un argument de convexité que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \ell n\,\frac{b}{a}.$$

4. Que dire de l'intégrale suivante ?

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

Solution ❀ Une intégrale classique

1. Lorsque u tend vers 0,

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

donc

$$f(t) = (b-a) + \frac{a^2-b^2}{2}\,t + o(t)$$

lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

2. Comme $a < b$, l'expression $-(b-a)t$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$ et donc

$$e^{-bt} = \underbrace{e^{-(b-a)t}}_{\to 0}.e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-at}).$$

On en déduit que

$$f(t) \sim \frac{e^{-at}}{t} = o(e^{-at})$$

et que (croissances comparées de t et $e^{-\alpha t}$)

$$e^{-bt} = \underbrace{te^{-(b-a)t}}_{\to 0}\cdot\frac{e^{-at}}{t} = o\big(f(t)\big)$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

3. a. La fonction f est *continue* sur $]0,+\infty[$, donc en particulier sur le *segment* $[\varepsilon, A]$. Cela prouve que l'intégrale

$$\int_\varepsilon^A f(t)\,dt$$

est bien définie.

3. b. Les fonctions

$$\left[t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}\right] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{e^{-bt}}{t}\right]$$

sont continues sur le segment $[\varepsilon, A]$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_\varepsilon^A f(t)\,dt = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-at}}{t}\,dt - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-bt}}{t}\,dt.$$

On effectue le changement de variable affine

$$u = at \qquad du = a\,dt$$

dans la première intégrale avec

$$\varepsilon \leqslant t \leqslant A \iff a\varepsilon \leqslant u \leqslant aA$$

et, de même, le changement de variable affine $u = bt$ dans la seconde intégrale.

On obtient alors

$$\int_\varepsilon^A f(t)\,dt = \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{b\varepsilon}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

et d'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A f(t)\,dt &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_{b\varepsilon}^{aA} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{b\varepsilon}^{aA} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du \\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du.\end{aligned}$$

3. c. Pour $u \geqslant aA$, on a

$$0 < e^{-u} \leqslant e^{-aA} \quad \text{et} \quad 0 < aA \leqslant u$$

donc

$$\forall\, aA \leqslant u \leqslant bA, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-u}}{u} \leqslant \frac{e^{-aA}}{aA}.$$

❧ Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$0 < \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leqslant (bA - aA)\cdot\frac{e^{-aA}}{aA} = \frac{b-a}{a}\cdot e^{-aA}.$$

Comme $a > 0$, le majorant tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$ et par encadrement,

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{e^{-u}}{u}\,du = 0.$$

3. d. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, donc son graphe est au-dessus de chacune de ses tangentes. En particulier,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad e^x \geqslant 1 + x$$

et donc (pour $x = -u$)

$$\forall\, u > 0,\quad \frac{1-u}{u} \leqslant \frac{e^{-u}}{u} \leqslant \frac{1}{u}.$$

En intégrant cet encadrement sur $[a\varepsilon, b\varepsilon]$, on obtient alors

$$\ell n\,\frac{b\varepsilon}{a\varepsilon} - (b\varepsilon - a\varepsilon) \leqslant \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}\,du \leqslant \ell n\,\frac{b\varepsilon}{a\varepsilon}$$

et donc, à nouveau par encadrement,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}\,du = \ell n\,\frac{b}{a}.$$

4. En tant qu'intégrale d'une fonction continue sur l'intervalle *ouvert* $]0, +\infty[$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

est une intégrale généralisée.

D'après les questions précédentes, l'intégrale

$$\int_\varepsilon^A f(t)\,dt$$

tend vers une limite finie, égale à $\ell n({}^b/_a)$, lorsque ε tend vers 0 et que A tend vers $+\infty$.

Donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

est convergente et sa valeur est égale à $\ell n({}^b/_a)$.