
SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle de terme général strictement positif. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

Démontrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente et comme $\sum u_n$ est une série de terme général strictement positif, sa somme S est strictement positive. On en déduit alors que

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S}$$

et donc, par comparaison de séries de termes généraux positifs, la série $\sum v_n$ est elle aussi (absolument) convergente.

• Réciproquement, si la série $\sum u_n$ diverge, alors ses sommes partielles S_n tendent vers $+\infty$ (série divergente de terme général positif), donc

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n).$$

Ça s'annonce plus compliqué!

• Il faut alors remarquer que

$$\forall n \geq 2, \quad v_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}. \quad (*)$$

Deux cas se présentent alors.

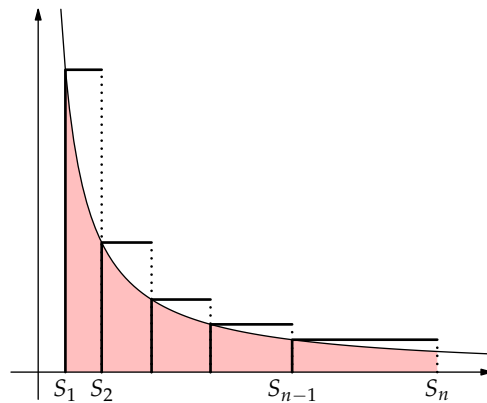
• **Premier cas.**

Si $S_{n-1} \sim S_n$, alors

$$w_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} \cdot \frac{S_{n-1}}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

et par conséquent les séries $\sum w_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (comparaison de séries de termes généraux positifs).

L'avantage de la série $\sum w_n$ est d'être facilement comparable à une intégrale.



Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n w_k = \sum_{k=2}^n (S_k - S_{k-1}) \cdot \frac{1}{S_{k-1}} \geq \int_{S_1}^{S_n} \frac{dt}{t} = \ln \frac{S_n}{S_1}.$$

Comme la suite (S_n) tend vers $+\infty$, on en déduit que la série $\sum w_n$ diverge et, par conséquent, que la série $\sum v_n$ diverge elle aussi.

• **Deuxième cas.**

Si S_{n-1} n'est pas équivalent à S_n , alors on déduit de (*) que la série $\sum v_n$ est grossièrement divergente.

• Dans tous les cas, on a démontré que : si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge aussi.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{\sin(\ln n)}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$$

1. Démontrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Déterminer la nature de ces séries.

1.

✎ Rappelons que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et que

$$\cos\left[\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sin\left[\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il est important de savoir mener ces calculs élémentaires sans hésitation.

Les v_n peuvent être facilement calculés :

$$\begin{aligned} v_n &= [-\cos(\ln x)]_n^{n+1} = \cos(\ln n) - \cos(\ln[n+1]) = \cos(\ln n) - \cos\left(\ln n + \ln\left[1 + \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \cos(\ln n) \left\{1 - \cos\left(\ln\left[1 + \frac{1}{n}\right]\right)\right\} + \sin(\ln n) \sin\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

donc

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin(\ln n)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a ainsi démontré que la série $\sum (v_n - u_n)$ était absolument convergente. Par conséquent, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

✎ La conclusion repose sur la remarque suivante :

- si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $v_n = (v_n - u_n) + u_n$ et $\sum v_n$ est la somme de deux séries convergentes ;
- si la série $\sum v_n$ est convergente, alors $u_n = v_n - (v_n - u_n)$ et $\sum u_n$ est la différence de deux séries convergentes.

✎ Variante

On peut aussi introduire la fonction f définie par

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\sin(\ln t)}{t}.$$

On vérifie sans peine que

$$\forall t > 0, \quad f'(t) = \frac{\cos(\ln t) - \sin(\ln t)}{t^2} = \frac{\sqrt{2} \cos(\pi/4 + \ln t)}{t^2}.$$

✎ On doit savoir factoriser une combinaison linéaire de $\sin$ et $\cos$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \varphi)$$

où l'angle φ est défini modulo 2π par les relations

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \forall t \in [n, n+1], \quad |f'(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{n^2},$$

donc que (Inégalité des accroissements finis)

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [n, n+1], \quad |f(x) - f(n)| \leq \frac{\sqrt{2}}{n^2}(x - n) \leq \frac{\sqrt{2}}{n^2}$$

et donc que (Inégalité triangulaire pour les intégrales)

$$\forall n \geq 1, \quad |v_n - u_n| \leq \int_n^{n+1} |f(x) - f(n)| dx \leq \frac{\sqrt{2}}{n^2}.$$

On a retrouvé, de manière plus explicite, l'estimation de $(u_n - v_n)$ qui nous a permis de conclure plus haut.

2. On a calculé les v_n , avec la relation de Chasles, on en déduit l'expression des sommes partielles :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n v_k = \int_1^n \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = 1 - \cos[\ln(n+1)].$$

Intuitivement, on se doute que la suite de terme général $\cos[\ln(n+1)]$ est divergente et donc que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes.

➤ Nous allons maintenant démontrer que la série $\sum u_n$ est divergente en établissant qu'elle contredit le critère de Cauchy.

Que dit ce théorème (qui n'est pas au programme)?

Si la série $\sum u_n$ convergerait, ses sommes partielles U_n convergeraient vers sa somme U . En particulier,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |U_n - U| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \leq n < p, \quad |U_p - U_n| \leq |U_p - U| + |U_n - U| \leq \varepsilon.$$

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists N \leq n < p, \quad |U_p - U_n| > \varepsilon_0.$$

✚ Pour tout entier $m \geq 1$, on considère les réels

$$\alpha_m = \exp\left(\frac{\pi}{6} + 2m\pi\right) \quad \text{et} \quad \beta_m = \exp\left(\frac{5\pi}{6} + 2m\pi\right).$$

➤ Mais pourquoi ces réels? Un peu de patience! Et si vous ne pouvez pas patienter, allez tout de suite voir ci-dessous (†) : on cherche à minorer le numérateur par une constante strictement positive ($1/2$ en l'occurrence).

Comme $\beta_m/\alpha_m = e^{2\pi/3} > 2$, on a

$$a_m \stackrel{\text{déf.}}{=} \lceil \alpha_m \rceil < \lfloor \beta_m \rfloor \stackrel{\text{déf.}}{=} b_m.$$

On en déduit en particulier

$$\frac{\alpha_m - 1}{\beta_m} \leq \frac{a_m - 1}{b_m} \leq \frac{\alpha_m}{\beta_m - 1}$$

et on tire de cet encadrement que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m - 1}{b_m} = e^{-2\pi/3}. \quad (*)$$

Pour tout entier $a_m \leq k \leq b_m$, on a

$$\frac{\pi}{6} + 2m\pi \leq \ln k \leq \frac{5\pi}{6} + 2m\pi,$$

donc

$$\forall a_m \leq k \leq b_m, \quad \frac{1}{2b_m} \leq \frac{\sin(\ell n k)}{k} \leq \frac{1}{2a_m} \quad (\dagger)$$

et par conséquent

$$\forall m \geq 1, \quad U_{b_m} - U_{a_m-1} = \sum_{k=a_m}^{b_m} u_k \geq \frac{b_m - a_m + 1}{2b_m} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_m - 1}{b_m}\right)$$

On déduit enfin de (*) que la différence $U_{b_m} - U_{a_m-1}$ ne tend pas vers 0 et donc que la suite (U_m) des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est divergente.

Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes.

✎ Il n'est pas mauvais de se faire une idée numérique des entiers a_m et b_m .

m	a_m	b_m
1	904	7340
2	484063	3930843
3	259211451	2104933683
4	138805568671	1127174423196
5	74329223763263	603592497942773
6	39802679086860360	323218745985703936
7	21314002518543781888	173080941384522956800
8	11413470494514011439104	92683399841782943449088
9	6111818210390361696632832	49631187220940054826319872

On constate bien que $\beta_m/a_m \approx 8$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}.$$

1. Démontrer que

$$b_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2}$$

puis déterminer un équivalent de b_n .

2. On pose $\lambda_n = b_n + b_{n+1}$. Démontrer que la suite (λ_n) converge vers une limite strictement négative.

3. Déterminer la nature de la série $\sum 1/b_n$.

1. Dans la somme b_{2n} , il y a un nombre pair de termes, qu'on regroupe deux par deux.

$$\forall n \geq 1, \quad b_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sqrt{k} = \sum_{p=1}^n (\sqrt{2p} - \sqrt{2p-1}) = \sum_{p=1}^n \sqrt{2p} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2p}}\right).$$

Le développement limité de $\sqrt{1-h}$ au voisinage de $h=0$ nous donne alors

$$\sqrt{2p} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2p}}\right) \underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{2p}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p\sqrt{p}}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{2p}}.$$

La série (de Riemann)

$$\sum \frac{1}{2\sqrt{2p}}$$

est une série divergente de terme général positif, donc (sommutation des relations de comparaison)

$$b_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Une comparaison (archi)classique entre somme et intégrale nous donne alors

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} + \mathcal{O}(1) = 2\sqrt{n} + \mathcal{O}(1) \sim 2\sqrt{n}.$$

On déduit des calculs précédents que

$$b_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2}.$$

• D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= b_{2n} - \sqrt{2n+1} = \left(\frac{\sqrt{2n}}{2} + o(\sqrt{n})\right) - \sqrt{2n} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} \\ &= \frac{-\sqrt{2n}}{2} + o(\sqrt{n}) \sim \frac{-\sqrt{2n+1}}{2}. \end{aligned}$$

• Ayant traité les cas pair et impair, on peut conclure :

$$b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{2}.$$

2. Le développement limité de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de $u=0$ montre qu'il existe une suite (v_k) telle que

$$\forall k \geq 1, \quad \sqrt{1 + \frac{1}{k}} - 1 = \frac{1}{2k} + v_k \quad \text{avec} \quad v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (*)$$

✚ Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\lambda_n &= b_n + b_{n+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k} + \left[-\sqrt{1} + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \sqrt{k} \right] \\ &= -1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= -1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2\sqrt{k}} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k} v_k.\end{aligned}$$

D'après le Critère spécial des séries alternées, la série

$$\sum \frac{(-1)^k}{2\sqrt{k}}$$

est convergente. D'après l'estimation (*), la série $\sum (-1)^k \sqrt{k} v_k$ est absolument convergente et donc convergente.

Par conséquent, la suite (λ_n) est convergente.

✚ Ce qui précède ne nous renseigne pas tout à fait sur le signe de la limite. Le premier terme est strictement négatif et la limite du second est également négative (le Critère spécial des séries alternées, qui s'applique ici, nous donne le signe des restes et en particulier le signe de la somme — puisque la somme est en fait le reste d'ordre 0). En revanche, pour déterminer le signe de la limite du troisième terme...

✚ Puisqu'il s'agit ici d'étudier la limite d'une suite, transformons cette suite en série télescopique!
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1} - \lambda_n &= (b_{n+1} + b_{n+2}) - (b_n + b_{n+1}) = b_{n+2} - b_n \\ &= (-1)^{n+2} \sqrt{n+2} + (-1)^{n+1} \sqrt{n+1} = (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}.\end{aligned}$$

✚ Il serait dommage d'avoir oublié l'astuce de la quantité conjuguée!

On peut manifestement appliquer le Critère spécial des séries alternées : la série télescopique $\sum (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ est convergente, donc la suite (λ_n) est convergente et, en notant λ_∞ sa limite,

$$\lambda_\infty - \lambda_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} < 0$$

puisque le premier terme de la somme (pour $n = 1$) est négatif.

✚ On a ainsi démontré une deuxième fois la convergence de la suite (λ_n) et, de plus, déduit du Critère spécial des séries alternées que la limite λ_∞ de cette suite était inférieure à λ_1 .

Or $\lambda_1 = b_1 + b_2 = (-1) + (-1 + \sqrt{2}) < 0$, donc $\lambda_\infty < 0$. La limite de la suite (λ_n) est bien strictement négative.

3.

✚ Nous allons continuer à "sommer par paquets", il n'est pas utile de fournir quelques détails sur ce qui va suivre.

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite de ses sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

est convergente. Considérons alors la série $\sum (u_{2p} + u_{2p+1})$ obtenue en "sommant par paquets de deux termes" :

$$\sum_{p=0}^n (u_{2p} + u_{2p+1}) = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = S_{2n+1}.$$

En tant que suite extraite d'une suite convergente, la suite des sommes partielles de la série $\sum (u_{2p} + u_{2p+1})$ est elle aussi convergente, donc la série $\sum (u_{2p} + u_{2p+1})$ est convergente.

Le même raisonnement montre que : si la série $\sum u_n$ converge, alors la série

$$\sum (u_{pN} + u_{pN+1} + \cdots + u_{pN+(N-1)})$$

converge aussi, quel que soit l'entier $N \geq 2$.

Pour tout entier $p \geq 1$,

$$\frac{1}{b_{2p}} + \frac{1}{b_{2p+1}} = \frac{\lambda_{2p}}{b_{2p}b_{2p+1}}$$

et on déduit des questions précédentes que

$$\frac{1}{b_{2p}} + \frac{1}{b_{2p+1}} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-2\lambda_\infty}{p}.$$

Comme $\lambda_\infty \neq 0$, la série $\sum -2\lambda_\infty/p$ est une série divergente dont le terme général est de signe constant. D'après le Théorème de comparaison des séries de terme positif, la série

$$\sum \left(\frac{1}{b_{2p}} + \frac{1}{b_{2p+1}} \right)$$

est divergente et par conséquent la série

$$\sum \frac{1}{b_n}$$

est divergente elle aussi.

🔗 Le Théorème de comparaison (par $\sim$, $\circ$ ou $\mathcal{O}$) ne conclut pas sur la convergence d'une série mais **seulement sur sa convergence absolue**.

S'il permet de conclure que la série est absolument convergente, on en déduit immédiatement que la série est convergente (sauf si on se trouve dans un espace vectoriel de dimension infinie!).

Si le Théorème de comparaison prouve que la série n'est pas absolument convergente, on pourrait avoir affaire à une série semi-convergente (= convergente sans être absolument convergente).

Mais si le terme général de la série étudiée est de signe constant, alors la convergence équivalent à la convergence absolue et si la série n'est pas absolument convergente, alors on peut conclure qu'elle est divergente.

Pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, on note k_j , le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \geq j.$$

1. Justifier la définition de k_j .
2. Démontrer que k_j tend vers $+\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que k_{j+1}/k_j tend vers e lorsque j tend vers $+\infty$.

1. Notons comme d'habitude

$$H_p = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n},$$

le p -ième **nombre harmonique**.

• Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note

$$\Omega_j = \{p \in \mathbb{N}^* : H_p \geq j\}.$$

L'ensemble Ω_j est une partie de $\mathbb{N}$ et comme la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$, l'ensemble Ω_j est majoré. D'après l'axiome de bon ordre, l'ensemble Ω_j possède un plus petit élément : c'est k_j .

2. Si $H_p \geq j+1$, alors $H_p \geq j$, donc

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \Omega_{j+1} \subset \Omega_j$$

et par conséquent,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad k_{j+1} = \min \Omega_{j+1} \geq \min \Omega_j = k_j.$$

Par croissance, la suite $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si, et seulement si, elle n'est pas majorée.

Raisonnons par l'absurde en rappelant que la suite $(H_p)_{p \geq 1}$ des nombres harmoniques est croissante : si la suite $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad H_M \geq H_{k_j} \geq j,$$

ce qui est impossible!

Donc la suite $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

3. Remarquons que, par définition du plus petit élément,

$$H_{k_j} \geq j \quad \text{et} \quad H_{k_j-1} < j$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand.

De même (changement d'indice),

$$H_{k_{j+1}} \geq j+1 \quad \text{et} \quad H_{k_{j+1}-1} < j+1$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand.

• Les nombres harmoniques H_p ne sont définis que pour $p \geq 1$.

Pour que $k_j - 1 \in \mathbb{N}^*$, il faut $k_j \geq 2$. Or $k_1 = 1$ et $k_2 = 4$, donc il suffit que $j \geq 2$ pour que ces calculs aient un sens.

Pour que $k_{j+1} - 1 \in \mathbb{N}^*$, il faut $k_{j+1} \geq 2$ et comme $k_{j+1} \geq k_j$, cela n'impose pas de contrainte supplémentaire sur j .

Par conséquent, pour tout $j \geq 2$,

$$H_{k_{j+1}} - H_{k_j-1} \geq (j+1) - j = 1 \quad \text{et} \quad H_{k_{j+1}-1} - H_{k_j} \leq (j+1) - j = 1.$$

Comme la fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante et continue, en comparant somme et intégrale, on obtient

$$1 \leq H_{k_{j+1}} - H_{k_j-1} \leq \int_{k_j-1}^{k_{j+1}} \frac{dt}{t} = \ln \frac{k_{j+1}}{k_j-1}$$

et

$$1 \geq H_{k_{j+1}-1} - H_{k_j} \geq \int_{k_{j+1}}^{k_{j+1}} \frac{dt}{t} = \ln \frac{k_{j+1}}{k_j + 1}.$$

Par conséquent, pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand,

$$-\ln\left(1 + \frac{1}{k_j}\right) \leq 1 - \ln \frac{k_{j+1}}{k_j} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k_j}\right).$$

Comme k_j tend vers $+\infty$, on en déduit par encadrement que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{k_{j+1}}{k_j} = e.$$

On suppose que la série numérique $\sum u_n$ est convergente. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n ku_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n).$$

Comme la série $\sum u_n$ est convergente, les restes

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

sont bien définis et la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n ku_k &= \sum_{k=1}^n k(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=1}^n kR_{k-1} - \sum_{k=1}^n kR_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)R_k - \sum_{k=1}^n kR_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} R_k \right) - nR_n. \end{aligned}$$

On a rappelé que $R_k = o(1)$ et il est clair que $\sum 1$ est une série divergente de terme général positif. D'après le Théorème de sommation des relations de comparaison (version divergente),

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = o(n).$$

Par ailleurs, $nR_n = o(n)$ (puisque R_n , rappelons-le une nouvelle fois, tend vers 0).

On a ainsi démontré que

$$\sum_{k=0}^n ku_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n).$$

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

On étudie ici une série numérique de terme général

$$u_n = f\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage de 0 et telle que $f(0) = 0$.

Il n'y a pas lieu de faire du zèle : peu importe pour quelles valeurs de n le terme u_n est défini, il suffit de savoir que u_n est défini à partir d'un certain rang.

On sait que la fonction Arccos est définie sur $[-1, 1]$ et comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \in]-1, 1[,$$

le terme général u_n est bien défini à partir d'un certain rang.

D'après la formule de Taylor,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + o(x^2),$$

donc $u_n = v_n + w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec

$$v_n = f'(0) \cdot \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f''(0) \cdot \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Pour x voisin de 0,

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 - 4\sqrt{3}x - 4x^2}} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-4(\sqrt{3} + 2x)}{(1 - 4\sqrt{3}x - 4x^2)^{3/2}}$$

donc $f'(0) = -2$ et $f''(0) = -4\sqrt{3}$.

Il n'est toujours pas utile de s'intéresser à l'ensemble de définition de f , il suffit ici de savoir que f est dérivable sur un voisinage de 0.

Nous pouvons maintenant être plus précis :

— la série de terme général

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1} 2}{n^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha > 0$ (Critère spécial des séries alternées) et (grossièrement) divergente pour $\alpha \leq 0$;

— comme

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-2\sqrt{3}}{n^{2\alpha}}$$

et que le second membre est **de signe constant** (négatif), les deux séries sont de même nature et la série $\sum w_n$ est convergente si, et seulement si, $2\alpha > 1$ (comparaison à une série de Riemann).

Il faut ici bien prendre soin de préciser que le signe du terme général est constant pour conclure.

En effet, si $x_n \sim y_n$, alors la série $\sum x_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum y_n$ est absolument convergente (Théorème de comparaison par équivalence).

Si le terme général y_n est de signe constant, alors le terme général x_n est lui aussi de signe constant et, dans ces conditions, la convergence de la série équivaut à la convergence absolue.

• En conclusion :

- si $\alpha \leq 0$, alors $u_n \sim v_n$ et la série $\sum v_n$ diverge grossièrement, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement;
- si $0 < \alpha \leq 1/2$, alors la série alternée $\sum v_n$ converge et la série $\sum w_n$ diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge;
- si $\alpha > 1/2$, alors la série alternée $\sum v_n$ converge et la série $\sum w_n$ converge absolument, donc la série $\sum u_n$ converge.

📌 Comme $u_n \sim v_n$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ (comparaison à une série de Riemann).

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2).$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des réels a , b et c .

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n = (a + b + c) \ln n + b \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = (a + b + c) \ln n + \frac{b + 2c}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

► Si $a + b + c \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

► Si $a + b + c = 0$ et $b + 2c \neq 0$, alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b + 2c}{n}$$

et $\sum u_n$ diverge (mais pas grossièrement).

► Enfin, si $a + b + c = b + 2c = 0$, alors $u_n = \mathcal{O}(1/n^2)$, donc la série $\sum u_n$ converge (absolument).

🔗 Dans ce dernier cas, on a $b = -2a$ et $c = a$, donc

$$u_n = a [\ln n - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2)]$$

et on reconnaît une série télescopique :

$$\forall N \geq 2, \quad \sum_{n=1}^N u_n = a \left[-\ln 2 + \ln \frac{N+2}{N+1} \right]$$

donc la somme de la série est égale à $-a \ln 2$.

On pose

$$F(\alpha) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Déterminer les limites de F en 0 et en $+\infty$.

Tout d'abord, $F(\alpha)$ est bien définie pour tout $\alpha > 0$ (somme d'une série de Riemann convergente).

• Comme tous les termes sont positifs,

$$\forall \alpha > 0, \quad F(\alpha) \geq \alpha \cdot \frac{1}{1^{1+\alpha}} = \alpha$$

et par comparaison, F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

• La fonction f définie par

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}$$

est continue, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$.

Par comparaison entre une somme et une intégrale (*faites une figure !*),

$$\forall \alpha > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\alpha dt}{1+t^\alpha} \leq F(\alpha) \leq \alpha + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha dt}{1+t^\alpha}$$

c'est-à-dire

$$\forall \alpha > 0, \quad 1 \leq F(\alpha) \leq 1 + \alpha.$$

Par encadrement, on en déduit que F tend vers 1 au voisinage (droit) de 0 .

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x - \ln x = n$$

admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0, 1]$.

2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0, puis que $x_n \sim e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n .

1. La fonction $f = [x \mapsto x - \ln x]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, 1]$ et

$$\forall 0 < x < 1, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0$$

donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0, 1]$. Il est clair que f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 et que $f(1) = 1$. D'après le Théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $[1, +\infty[$ et la bijection réciproque est continue sur $[1, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel n appartient à $[1, +\infty[$, donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution : $x_n = f^{-1}(n) \in]0, 1]$.

2. Comme f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0, le Théorème de la bijection nous assure que la réciproque f^{-1} tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Par conséquent,

$$x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par définition de x_n ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln x_n = -n + x_n.$$

En composant par $\exp$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = e^{-n} \cdot \underbrace{e^{x_n}}_{\hookrightarrow 1}$$

(puisque x_n tend vers 0) et donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$.

3. On reprend l'équation qui définit x_n sous une autre forme :

$$x_n = \ln x_n + \ln n = \ln(e^n x_n).$$

Or on sait que $\ln(1+u) \sim u$ lorsque u tend vers 0 et que $e^n x_n$ tend vers 1. Par conséquent,

$$e^n x_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n$$

et donc

$$x_n - e^{-n} \sim x_n e^{-n} \sim e^{-2n}.$$

Autrement dit,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n}).$$

On peut en fait calculer un développement asymptotique de x_n aussi précis qu'on le souhaite ! En effet, l'équation étudiée équivaut à

$$xe^{-x} = e^{-n}$$

et la fonction $g = [x \mapsto xe^{-x}]$ réalise une bijection (croissante, cette fois) de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, 1]$ sur $[0, e^{-1}]$ dont la réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, e^{-1}[$ puisque

$$\forall x \in [0, 1[, \quad g'(x) = e^{-x}(1-x) > 0.$$

D'après le Théorème de Taylor-Young, la réciproque g^{-1} admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0 pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$g^{-1}(u) = \sum_{k=0}^p \frac{(g^{-1})^{(k)}(0)}{k!} \cdot u^k + o(u^p) \underset{u \rightarrow 0}{=} a_1 u + \dots + a_p u^p + o(u^p).$$

Comme $x_n = g^{-1}(e^{-n})$, on en déduit que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_1 e^{-n} + \dots + a_p e^{-pn} + o(e^{-pn}).$$

Il est clair que $g(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ au voisinage de 0. On peut en déduire que

$$g^{-1}(u) = u + u^2 + \frac{3}{2}u^3 + o(u^3)$$

au voisinage de 0 et donc que

$$x_n = e^{-n} + e^{-2n} + \frac{3}{2}e^{-3n} + o(e^{-3n}).$$

Pour les curieux, je précise que $g^{-1}(u) = -W_0(-u)$ où W_0 est la branche principale de la fonction de Lambert.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$\sum_{k=1}^n x^k = 1$$

admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. Cette solution sera notée a_n .

2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $1/2$.

3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une application $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k.$$

En tant que application polynomiale, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0, 1]$. En tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $[0, 1]$, elle est aussi strictement croissante sur $[0, 1]$.

D'après le Théorème de la bijection monotone, l'application f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)] = [0, n]$. Comme $1 \in [0, n]$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet donc une, et une seule, solution a_n dans le segment $[0, 1]$.

On sait même que $0 < a_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ (puisque $f_n(0) < 1 = f_n(a_n)$) et que $a_n < 1$ pour tout entier $n \geq 2$ (puisque $f_n(a_n) = 1 < n = f_n(1)$).

2. Par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(a_n) = 1 = f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) + a_n^{n+1} > f_n(a_n) = 1$$

et par conséquent

$$f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n > a_{n+1}$$

et donc que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(1/2) = \sum_{k=1}^n (1/2)^k < \sum_{k=1}^{+\infty} (1/2)^k = 1 = f_n(a_n)$$

et comme f_n est croissante, on en déduit que $1/2 < a_n$.

Puisque la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est définie implicitement (son terme général est la solution d'une équation, on ne connaît pas directement sa valeur exacte), il faut l'étudier implicitement, c'est-à-dire manœuvrer l'équation — et pas seulement sa solution.

3. En tant que suite décroissante et minorée par $1/2$, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente et tend vers une limite ℓ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \ell \leq a_n.$$

Comme chaque fonction f_n est strictement croissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(1/2) \leq f_n(\ell) \leq f_n(a_n) = 1.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (1/2)} \leq \frac{\ell}{1 - \ell} \leq 1.$$

Ainsi, $\frac{\ell}{1 - \ell} = 1$ et donc $\ell = 1/2$.

|| Déterminer la nature de la série

$$\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right).$$

Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} = \frac{1}{n} \cdot \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En notant u_n le terme général de la série, on en déduit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, la série $\sum u_n$ est la somme de la série convergente

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

(Critère spécial des séries alternées) et d'une série absolument convergente (puisque son terme général est dominée par $1/n^2$, qui est le terme général d'une série absolument convergente).

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $0 < u_0 < \pi$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$, démontrer que la série $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln u_{n+1} - \ln u_n$, démontrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.

1. Il est clair que l'intervalle $]0, \pi[$ est stable par $\sin$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et prend toutes ses valeurs dans cet intervalle. De plus,

$$\forall 0 < x < \pi, \quad 0 < \sin x < x$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge vers un réel $\ell \in [0, \ell]$.

Puisque $\sin$ est continue sur $]0, \pi[$, si ℓ appartenait à cet intervalle ouvert, ce serait un point fixe de $\sin$: il n'y en a pas. La seule possibilité qui reste compatible avec la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc : $\ell = 0$.

2. Comme u_n tend vers 0, on peut utiliser le développement limité de $\sin$:

$$u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement décroissante, on vient de comparer deux séries dont les termes généraux sont de signe constant (négatifs) et on déduit du Théorème de comparaison que les séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature.

Or $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc la série $\sum u_n^3$ est convergente.

3. Comme u_n tend vers 0 par valeurs strictement positives,

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{\sin u_n}{u_n} = \ln \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{6}.$$

Avec le même raisonnement, les séries $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.

Mais comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la suite de terme général $\ln u_n$ tend vers $-\infty$, donc la série télescopique $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ diverge et, par comparaison, la série $\sum u_n^2$ diverge.

✎ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \sin^\alpha u_n - u_n^\alpha = u_n^\alpha \cdot \left[\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right) - 1 \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\alpha}{6} \cdot u_n^{2+\alpha}.$$

En choisissant $\alpha = -2$, on constate que la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite finie non nulle (égale à $1/3$). On en déduit que la série télescopique est grossièrement divergente et que sa n -ième somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha) = u_n^\alpha - u_0^\alpha \sim u_n^{-2}$$

est aussi équivalente, lorsque n tend vers $+\infty$, à $n^{1/3}$. Par conséquent,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}},$$

ce qui explique tout ce qui précède !

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Vérifier que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

2. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

3. Démontrer que $u_n \sim v_n$. Conclusion ?

1. Par définition,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

et comme $(-1)^n/\sqrt{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut utiliser le développement limité de $(1+x)^{-1}$ au voisinage de $x=0$:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

pour en déduire que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et le résultat cherché s'obtient en développant ce produit.

2. La série $\sum v_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées : c'est une série alternée et, de façon évidente, la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.

D'après le développement précédent,

$$u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

donc la série $\sum (u_n - v_n)$ est divergente (série harmonique). Par conséquent,

$$\sum u_n = \underbrace{\sum (u_n - v_n)}_{DV} + \underbrace{\sum v_n}_{CV}$$

est divergente.

3. Le développement de la première question a beau nous indiquer que $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature : le théorème de comparaison par équivalence s'applique aux séries DONT LE TERME GÉNÉRAL EST DE SIGNE CONSTANT, il ne peut pas s'appliquer aux séries alternées.

On considère une suite positive $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}.$$

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}.$$

2. Démontrer que : si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3. La réciproque est-elle vraie ? On pourra considérer la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2} &\iff \sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n \leq a_n \\ &\iff \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leq u_n + a_n. \end{aligned}$$

Or les a_n sont positifs (par hypothèse) et les u_n aussi (par hypothèse pour u_0 et par récurrence pour $n \geq 1$), donc

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leq u_n + a_n \iff u_n^2 + a_n^2 \leq (u_n + a_n)^2 = u_n^2 + a_n^2 + 2u_n a_n.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}.$$

2. Pour appliquer le théorème de comparaison aux séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum a_n$, il faut encore vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n.$$

Or, d'après la relation de récurrence,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n}{2}.$$

Il est clair que

$$u_n^2 + a_n^2 \geq u_n^2 \geq 0$$

et comme $u_n \geq 0$, on en déduit que

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \geq |u_n| = u_n.$$

On a donc en fait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}.$$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison pour les séries de terme général positif que la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente et donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

3. D'après la relation de récurrence,

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} = 2u_{n+1} - u_n$$

et donc

$$a_n^2 = (2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 = 4u_{n+1}(u_{n+1} - u_n).$$

En prenant $u_n = \frac{n}{n+1}$, on a alors

$$a_n^2 = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}.$$

Comme les a_n sont positifs, on en déduit que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries **de terme général positif** (bis), la série $\sum a_n$ est divergente (puisque la série harmonique est divergente).

La réciproque de la propriété établie plus haut est donc fausse.

1. Calculer la limite de

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

2. Calculer un équivalent de

$$S_n = \prod_{k=1}^n (n+k)^{1/n}.$$

1. La fonction $[t \mapsto \ln(1+t)]$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc les sommes de Riemann R_n convergent vers

$$\int_0^1 \ln(1+t) dt = [(1+t) \ln(1+t) - t]_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

2. Chaque réel S_n est un produit de réels strictement positifs, donc

$$\ln S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) = \ln n + R_n.$$

Par conséquent,

$$S_n = n \cdot e^{R_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4n}{e}.$$

✎ Variante avec la formule de Stirling

Si on remarque que

$$S_n = \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{1/n},$$

on peut tenter d'appliquer la Formule de Stirling :

$$\frac{(2n)!}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2} \cdot e^{-n} 4^n n^n.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n!} \cdot \left(\frac{e}{4n} \right)^n = \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

On a ici une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général strictement positif, qui converge vers une limite $\ell > 0$. Par conséquent,

$$u_n^{1/n} \stackrel{\text{déf.}}{=} \exp \frac{\ln u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(0) = 1.$$

En l'occurrence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \cdot \frac{e}{4n} = 1$$

et on retrouve bien le résultat précédent.

Attention! En général, la composition d'équivalents produit des résultats hasardeux. C'est pourquoi on a pris soin ici de composer des limites.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n =]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de la fonction $\tan$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation

$$\tan x = x$$

admet une, et une seule, solution $x_n \in I_n$ et que $x_n \sim n\pi$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose $y_n = x_n - n\pi$.
3. a. Démontrer que $y_n = \operatorname{Arctan} x_n$ et en déduire la limite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. b. Démontrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\pi/2$ et déterminer un réel c tel que

$$y_n - \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n}.$$

4. Démontrer que, pour tout entier n assez grand,

$$\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{x_n \tan(1/n\pi) - 1}{x_n + \tan(1/n\pi)}.$$

5. Trouver quatre réels a, b, c et d tels que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. La fonction $\tan$ est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I_0 =]-\pi/2, \pi/2[$, donc elle admet un développement limité à l'ordre 3 de la forme

$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + bx^3 + o(x^3).$$

On sait que $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$ pour tout $x \in I_0$ et que

$$\operatorname{Arctan} y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

En posant $y = \tan x = ax + bx^3 + o(x^3)$, on a $y^3 = a^3x^3 + o(x^3)$ et donc

$$\operatorname{Arctan}(\tan x) = x = ax + \left(b - \frac{a^3}{3}\right)x^3 + o(x^3).$$

On en déduit que $a = 1$ et que $b = 1/3$.

2. La fonction f définie par $f(x) = \tan x - x$ (sur l'ensemble de définition de $\tan$) est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle I_n et

$$\forall x \in I_n, \quad f'(x) = (1 + \tan^2 x) - 1 = \tan^2 x \geq 0.$$

De plus, sur I_n , la dérivée $f'(x)$ ne s'annule que pour $x = n\pi$, donc f est bien strictement croissante sur l'intervalle I_n .

La fonction f réalise donc une bijection de l'intervalle I_n sur l'intervalle $J_n = f_*(I_n) =]-\infty, +\infty[$ puisque x reste bornée sur I_n alors que

$$\lim_{x \rightarrow (n\pi - \pi/2)^+} \tan x = -\infty \quad \text{et que} \quad \lim_{x \rightarrow (n\pi + \pi/2)^-} \tan x = +\infty.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une, et une seule, solution x_n dans l'intervalle I_n .

3. a.

Par construction, $n\pi - \pi/2 \leq x_n \leq n\pi + \pi/2$, donc $x_n = n\pi + \mathcal{O}(1)$ et en particulier $x_n \sim n\pi$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il est donc naturel de considérer la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour étudier plus précisément le comportement de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme $\tan$ est π -périodique,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tan(y_n) = \tan(x_n - n\pi) = \tan x_n = x_n$$

(par définition de x_n). Or $x_n \in I_n$, donc $y_n = x_n - n\pi \in I_0$ et, par définition de la fonction Arctan ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \text{Arctan } x_n.$$

3. b. On a remarqué que $x_n \sim n\pi$, donc x_n tend vers $+\infty$ et, par composition de limites, y_n tend vers $\pi/2$ (par valeurs inférieures) lorsque n tend vers $+\infty$.

☞ *Personne n'a oublié la célèbre relation ?*

$$\forall x > 0, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Parfait ! Elle permet de comparer facilement $\text{Arctan } x$ à $\pi/2$, ce n'est pas son moindre mérite.

☛ Comme $x_n > 0$,

$$y_n + \text{Arctan } \frac{1}{x_n} = \text{Arctan } x_n + \text{Arctan } \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$y_n - \frac{\pi}{2} = -\text{Arctan } \frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{x_n} \sim \frac{-1}{n\pi}$$

puisque $1/x_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

☞ *Comme on l'a remarqué plus haut, il est donc logique d'étudier maintenant la suite de terme général*

$$u_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$$

pour obtenir une estimation plus précise de x_n .

4. Comme y_n tend vers $\pi/2$ par valeurs inférieures et que $1/n\pi$ tend vers 0 par valeurs positives, on peut supposer que n est assez grand pour que

$$\frac{-\pi}{4} < y_n - \frac{\pi}{2} \leq 0 \leq \frac{1}{n\pi} < \frac{\pi}{4}.$$

On peut donc appliquer la formule d'addition de $\tan$:

$$\forall \frac{-\pi}{4} < a, b < \frac{\pi}{4}, \quad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

en sachant que

$$\forall 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan \theta}.$$

On a donc

$$\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{\tan(y_n - \pi/2) + \tan(1/n\pi)}{1 - \tan(y_n - \pi/2) \tan(1/n\pi)} = \frac{-1 + \tan y_n \tan(1/n\pi)}{\tan y_n + \tan(1/n\pi)}$$

et on conclut en rappelant que $\tan y_n = x_n$ (démontré plus haut).

5. On sait que $\tan u = u + \mathcal{O}(u^3)$ lorsque u tend vers 0 et on a déjà démontré que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit d'une part que

$$\tan y_n \tan \frac{1}{n\pi} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

et d'autre part que

$$x_n + \tan \frac{1}{n\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi.$$

D'après la question précédente,

$$\tan u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi n^2}.$$

✎ Il est tentant de composer cette relation avec la fonction Arctan — mais cela doit être justifié, car on ne dispose d'aucun théorème général à ce sujet.

Cette relation de comparaison peut s'écrire également

$$\tan u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme u_n tend vers 0, on peut supposer que n est assez grand pour que $u_n \in I_0$ et en déduire que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \operatorname{Arctan}\left[\frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'après le développement limité de la fonction Arctan au voisinage de 0.

Finalement,

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{\ln n}{n}, \quad v_n = (-1)^n u_n$$

et

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n v_k, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On admet l'existence d'un réel γ (la constante d'Euler) tel que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

1. Étudier les variations de $\frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$.
2. Comparer u_n à $1/n$. En déduire la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
3. Exprimer $S_{2n} - S_n$ sous la forme d'une somme. En déduire que

$$S_{2n} - S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 \cdot \ln n + o(1).$$

4. Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ en fonction de H_n et de S_n . En déduire la somme de la série $\sum v_n$.

1. La fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Par conséquent, la fonction f est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Elle atteint donc un maximum, égal à $1/e$, en $x = e$. Il est par ailleurs clair que f tend vers $-\infty$ au voisinage de 0 et vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Il est clair que $\frac{1}{n} = o(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Or la série $\sum u_n$ est une série de terme général positif et la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif. Par comparaison, la série $\sum u_n$ est divergente.

• La série $\sum v_n$ est une série alternée, son terme général tend vers 0 et la suite $(|v_n|)_{n \geq 3} = (u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum v_n$ est convergente.

3. D'après la relation de Chasles,

$$\forall n \geq 1, \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} f(k).$$

Comme la fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$, on peut facilement comparer cette somme à une intégrale (**Faites une FIGURE!**) et en déduire que

$$\forall n \geq 3, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \int_n^{2n} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{2n-1} u_k.$$

✎ Cet encadrement n'est valable que pour $n \geq 3$. Ce n'est pas un problème, puisqu'on va faire tendre n vers $+\infty$.

En retournant l'encadrement, on obtient que

$$\forall n \geq 3, \quad \int_n^{2n} f(t) dt + u_{2n} - u_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \int_n^{2n} f(t) dt.$$

- Pour tout $n \geq 1$,

$$\int_n^{2n} \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2} \right]_n^{2n} = \ln 2 \cdot \ln n + \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Par ailleurs, il est clair que $u_{2n} - u_n = o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc on déduit de l'encadrement précédent que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln 2 \cdot \ln n + \frac{\ln^2 2}{2} + o(1).$$

4. En sommant S_{2n} et T_{2n} , les termes de rang impair se compensent pendant que les termes de rang pair s'ajoutent et il reste

$$S_{2n} + T_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n u_{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln 2 + \ln k}{k} = \ln 2 H_n + S_n.$$

Par conséquent, d'après la formule d'Euler (rappelée par l'énoncé) et la question précédente,

$$T_{2n} = \ln 2 H_n - (S_{2n} - S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} [\ln 2 \ln n + \gamma \ln 2 + o(1)] - \left[\ln 2 \ln n + \frac{\ln^2 2}{2} + o(1) \right] = \frac{2\gamma - \ln 2}{2} \cdot \ln 2 + o(1).$$

Comme la série $\sum v_n$ est convergente, sa somme est aussi la limite de la suite extraite $(T_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right) \ln 2.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n}.$$

1. Démontrer que $u_n = \mathcal{O}(2^{-n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Démontrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\gamma}{2^n}.$$

1. On peut démontrer par récurrence que u_n est bien défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2 + 0}$$

et donc (à nouveau par récurrence)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \frac{u_0}{2^n}.$$

On en déduit en particulier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Ce qui précède conduit à introduire la suite de terme général $v_n = 2^n u_n$ pour démontrer que cette suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement positive.

D'après la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = -\ln \left(1 + \frac{v_n}{2^{n+1}} \right).$$

D'après la question précédente, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-v_n}{2^{n+1}}$$

et le second membre est le terme général d'une série absolument convergente (dominé par le terme général de la série géométrique de raison $1/2$). Par conséquent, la série télescopique $\sum (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ est (absolument) convergente et la suite de terme général $\ln v_n$ converge vers un réel ℓ .

Par continuité de la fonction $\exp$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $\gamma = e^\ell > 0$.

On peut même expliciter la valeur de γ ! Au contraire de ce qu'on vient de voir, c'est une démonstration ad hoc, qui n'est pas susceptible de servir dans d'autres circonstances.

On a relevé plus haut la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n \cdot \frac{1}{1 + \frac{u_n}{2}}$$

En posant $p_{-1} = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{u_k}{2} \right), \quad (1)$$

on arrive (par récurrence) à l'expression suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{v_0}{p_{n-1}} = \frac{u_0}{p_{n-1}}$$

et donc à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{u_0}{2^n p_{n-1}}. \quad (2)$$

Il reste à déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour obtenir une expression explicite de la constante γ .

D'après la définition (1) du produit p_n et l'expression (2) de u_n ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = p_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{u_n}{2} \right) = p_{n-1} + \frac{u_0}{2^{n+1}}.$$

En reconnaissant une série télescopique et une série géométrique,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n - p_{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_n - p_{n-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_0}{2^{n+1}} = u_0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p_{-1} + u_0 = 1 + u_0$$

et finalement

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_0}{1 + u_0} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

On note a_n , le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n!$. Donner un développement asymptotique à trois termes de a_n .

Le développement décimal de l'entier x s'écrit avec $(d+1)$ chiffres si, et seulement si,

$$x = b_0 + 10b_1 + \dots + 10^d b_d = \sum_{k=0}^d b_k 10^k$$

avec $0 \leq b_0, \dots, b_{d-1} \leq 9$ et $1 \leq b_d \leq 9$.

Autrement dit, le développement décimal de x s'écrit avec $(d+1)$ chiffres si, et seulement si, $10^d \leq x < 10^{d+1}$, c'est-à-dire

$$d \ln 10 \leq x < (d+1) \ln 10$$

ou encore

$$d = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \right\rfloor.$$

Par conséquent,

$$a_n = \left\lfloor \frac{\ln(n!)}{\ln 10} \right\rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n!)}{\ln 10} + \mathcal{O}(1)$$

puisque $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \mathcal{O}(1)$ par définition de la partie entière.

On étudie donc en fait $\ln(n!)$.

La comparaison classique entre somme et intégrale nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_1^n \ln t \, dt \leq \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^n \ln t \, dt + \ln n.$$

En calculant l'intégrale, on en déduit que

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n) \quad (\star)$$

et donc que

$$a_n = \frac{\ln(n!)}{\ln 10} + \mathcal{O}(1) = \frac{n \ln n}{\ln 10} - \frac{n}{\ln 10} + \mathcal{O}(\ln n)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous allons préciser ce développement en reprenant l'estimation $(\star)$ d'une manière classique : la méthode qui suit est celle qui justifie l'existence de la **constante d'Euler**.

Pour préciser l'estimation

$$\sum_{k=1}^n u_k = v_n + o(v_n),$$

on réécrit la différence des quantités connues comme une somme partielle :

$$\left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - v_n = \sum_{k=1}^n (u_k - (v_k - v_{k-1})) - v_1$$

puis on étudie la série de terme général $w_k = u_k - (v_k - v_{k-1})$.

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \ln k \right) - (n \ln n - n) &= 1 + \sum_{k=2}^n [\ln k - (k \ln k - k) + (k-1) \ln(k-1) + 1] \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \left[1 + (k-1) \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right]. \end{aligned}$$

On vérifie rapidement que

$$w_k = 1 + (k-1) \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2k} + z_k \quad \text{avec} \quad z_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (\dagger)$$

♣ Version simple

On a démontré que $w_k \sim 1/2k$ lorsque k tend vers $+\infty$. Or $1/2k$ est positif pour tout $k \geq 1$, donc w_k est positif pour k assez grand et comme la série harmonique est divergente, les sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=2}^n w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k}.$$

On sait bien que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$$

et on peut conclure :

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + o(\ln n).$$

♣ Version savante

On connaît l'histoire de la constante d'Euler et on sait que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, on a vu (†) que la série $\sum z_k$ était absolument convergente et que, en notant S la somme de cette série,

$$S - \sum_{k=2}^n z_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) = \mathcal{O}(1/n).$$

Par conséquent, il existe une constante C telle que

$$\sum_{k=2}^n w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln n}{2} + C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement, il existe une constante K telle que

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + K + o(1/n).$$

🔗 Pour retrouver l'équivalent de Stirling, il reste à démontrer que $K = \ln \sqrt{2\pi}$ (ce qui se déduit des intégrales de Wallis).

Trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \tan \frac{1}{k+n}.$$

Les termes de la somme dépendent de l'indice n , par conséquent S_n n'est pas la somme partielle d'une série.

En réécrivant les termes de la somme, on fait apparaître le motif k/n :

$$\tan \frac{1}{k+n} = \tan \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+k/n)} \right)$$

qui doit faire penser aux sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Mais la tangente complique la donne !

Pour $1 \leq k \leq n$, le quotient $\frac{1}{k+n}$ est compris entre 0 et $1/n$. Il est donc petit et par conséquent

$$\tan \frac{1}{k+n} \approx \frac{1}{k+n}, \quad (3)$$

ce qui suggère que

$$S_n \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

Malheureusement, la relation (3) n'a pas vraiment de sens (l'entier k est-il fixé ? s'agit-il d'un équivalent uniforme en k ?) et aucun théorème du cours ne permet de passer de cette relation de comparaison entre les termes à la relation analogue entre les sommes.

• Première méthode

La fonction $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0, \pi/4]$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, \pi/4], \quad \tan'(x) &= 1 + \tan^2 x \\ \tan''(x) &= 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \end{aligned}$$

donc

$$\forall 0 \in [0, \pi/4], \quad 0 \leq \tan''(x) \leq 2 \times 1 \times (1 + 1^2) = 4.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a donc

$$\forall x \in [0, \pi/4], \quad |\tan x - x| \leq 4 \frac{x^2}{2} = 2x^2.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+n)^2} \leq \frac{2n}{(1+n)^2}. \quad (4)$$

Pour majorer une somme, on peut parfois se contenter de multiplier le plus grand terme par le nombre total de termes...

L'encadrement (4) prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = 0.$$

On a reconnu plus haut une somme de Riemann et on a déjà calculé sa limite, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2.$$

♣ Variante de la première méthode

✎ On a travaillé sur le segment $[0, \pi/4]$ de manière assez arbitraire. Or les arguments de la fonction $\tan$ sont tous compris entre $1/2n$ et $1/n$. Il serait donc plus judicieux d'étudier $\tan$ au voisinage de 0 et plus précisément l'écart entre le graphe de $\tan$ et sa tangente à l'origine...

On considère la fonction $f = [x \mapsto \tan x - x]$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1/n]$ et

$$\forall x \in [0, 1/n], \quad 0 \leq f'(x) = \tan^2 x \leq \tan^2 \frac{1}{n}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est donc lipschitzienne sur $[0, 1/n]$ avec en particulier

$$\forall x \in [0, 1/n], \quad |f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq \tan^2 \frac{1}{n} \cdot |x| \leq \frac{1}{n} \tan^2 \frac{1}{n}.$$

On a donc (inégalité triangulaire)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{1}{k+n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \tan^2 \frac{1}{n}$$

et donc (somme de n termes, tous égaux)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq \tan^2 \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Comme plus haut, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = 0$$

et on peut conclure de la même manière.

✎ Il est important de noter qu'on a utilisé ici un théorème moins précis que dans la première version (inégalité des accroissements finis, c'est-à-dire approximation au premier ordre, vs inégalité de Taylor-Lagrange au second ordre), mais on s'en est servi de façon plus judicieuse (en considérant un intervalle plus petit).

Cela explique pourquoi on a obtenu une meilleure approximation (le majorant de (5) est un infiniment petit du second ordre alors que le majorant de (4) était un infiniment petit du premier ordre).

♣ Deuxième méthode

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \tan \frac{1}{n+t}.$$

Il est clair que cette fonction est continue et décroissante. Une comparaison classique entre somme et intégrale nous donne l'encadrement suivant.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) - f(0) + \int_0^n \tan \frac{1}{n+t} dt \leq S_n \leq \int_0^n \tan \frac{1}{n+t} dt \quad (6)$$

D'une part,

$$f(n) - f(0) = \tan \frac{1}{2n} - \tan \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'autre part, le changement de variable $t = nu$ nous donne

$$\int_0^n \tan \frac{1}{n+t} dt = \int_0^1 g_n(u) du \quad \text{avec} \quad g_n(u) = n \tan \frac{1}{n(1+u)}.$$

Chaque fonction g_n est intégrable sur $[0, 1]$ (fonction continue sur un segment) et

$$g_n(u) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n(1+u)} = \frac{1}{1+u}.$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge donc simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction continue sur $[0, 1]$ (et donc intégrable sur ce segment).

Par croissance de la fonction $\tan$ sur $[0, 1/n] \subset [0, 1]$,

$$\forall u \in [0, 1], \quad 0 \leq n \tan \frac{1}{n(1+u)} \leq n \tan \frac{1}{n}$$

et d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction $\tan$ est 2-lipschitzienne sur $[0, \pi/4]$, donc

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq \tan \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n},$$

si bien que la convergence est dominée :

$$\forall n \geq 2, \forall u \in [0, 1], \quad 0 \leq g_n(u) \leq 2.$$

(Le majorant est indépendant du paramètre n et, en tant que fonction de u , il est intégrable sur le segment $[0, 1]$.)

On déduit alors du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(u) \, du = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln 2$$

et finalement, on déduit de (6) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$$

par encadrement.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Il est clair que tous les facteurs sont strictement positifs :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdots \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

donc $u_n > 0$ et

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

On sait que

$$\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3).$$

Donc

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Ainsi, $\ln u_n$ est la somme des trois sommes partielles :

— la somme partielle d'une série convergente

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

(Critère spécial des séries alternées);

— la somme partielle d'une série divergente

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2}$$

(comparaison bien connue des sommes partielles de la série harmonique avec une intégrale);

— la somme partielle d'une série absolument convergente (terme général dominée par le terme général d'une série de Riemann d'exposant $3/2 > 1$).

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \ln u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} [S_1 + o(1)] + \left[\frac{\ln n}{2} + o(\ln n)\right] + [S_2 + o(1)] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2}. \end{aligned}$$

Par composition de limites, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

et donc que la série $\sum u_n$ est (très) grossièrement divergente.

On a calculé un équivalent de $\ln u_n$ qui ne permet pas de trouver facilement un équivalent de u_n . En effet, on a obtenu

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \frac{\ln n}{2} \cdot \exp(o(\ln n)) = \sqrt{n} \cdot \exp(o(\ln n))$$

et le dernier facteur est une forme indéterminée :

- si $o(\ln n)$ tend vers $+\infty$, ce facteur tend vers $+\infty$;
- si $o(\ln n)$ est borné, ce facteur est borné;
- si $o(\ln n)$ tend vers $-\infty$, ce facteur tend vers 0.

Avec un peu de culture, on connaît la constante d'Euler

$$\gamma \approx 0,577$$

qui est définie par

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

On en déduit alors que

$$\ln u_n = \frac{\ln n}{2} + (S_1 + \gamma + S_2) + o(1),$$

ce qui nous donne

$$u_n \sim e^{\gamma + S_1 + S_2} \cdot \sqrt{n}.$$

On dispose ainsi d'un équivalent de u_n — faussement précis, car on n'a aucune idée des valeurs de S_1 et de S_2 .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note r_n , le reste de la division euclidienne de n par 5.

1. La série $\sum \frac{r_n}{n(n+1)}$ est convergente.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{k(k+1)}.$$

Exprimer S_{5n} en fonction des nombres harmoniques

$$H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

3. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}.$$

1. Par définition de la division euclidienne,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r_n < 5.$$

Donc

$$\frac{r_n}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et, par comparaison avec une série de Riemann, la série est (absolument) convergente.

2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $0 \leq r \leq 4$,

$$r_k = r \iff \exists \ell \in \mathbb{N}, \quad k = 5\ell + r.$$

On peut donc décomposer S_{5n} en somme de cinq termes.

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+1)(5\ell+2)} + 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+2)(5\ell+3)} + 3 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+3)(5\ell+4)} \\ &\quad + 4 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+4)(5\ell+5)} + 0 \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{5\ell(5\ell+1)} \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

permet de simplifier l'expression.

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} - \frac{1}{5\ell+2} + 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+2} - \frac{1}{5\ell+3} \\ &\quad + 3 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+3} - \frac{1}{5\ell+4} + 4 \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+4} - \frac{1}{5\ell+5} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} - \frac{4}{5\ell+5} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} + \frac{1}{5\ell+5} - \frac{1}{\ell+1} \\ &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_{5n} - H_n. \end{aligned}$$

3. Il faut alors comparer la somme

$$H_{5n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}$$

à l'intégrale

$$I_n = \int_n^{5n} \frac{dt}{t} = \ln 5.$$

La méthode usuelle (FAITES UNE FIGURE !) nous donne :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln 5 + \frac{1}{5n} \leq S_{5n} \leq \ln 5 + \frac{1}{n}$$

et on déduit du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n} = \ln 5.$$

✪ Comme la série converge, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente. Toute suite extraite d'une suite convergente est elle-même convergente et tend vers la même limite. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n} = \ln 5.$$

Autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)} = \ln 5.$$

🔗 En présentant les calculs de manière un peu plus abstraite (c'est-à-dire en faisant intervenir une somme double), on devrait pouvoir généraliser le résultat au cas de la division euclidienne par un entier naturel $p \geq 2$ quelconque.

On considère deux suites positives $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad u_n \leq k + \frac{n\varepsilon_k}{k}.$$

Démontrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{n}).$$

Soient $0 < \eta < 1$ et $\varepsilon = \eta^2 > 0$.

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et que $\varepsilon > 0$, il existe un rang K_0 tel que

$$\forall k \geq K_0, \quad 0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $K_0 \leq k \leq n$, on a donc

$$0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{k}. \quad (*)$$

Le terme médian étant indépendant de k et l'entier k prenant un nombre fini de valeurs, on peut passer au minimum dans $(*)$:

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \min_{K_0 \leq k \leq n} \left(\frac{k}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{k} \right).$$

• Une étude rapide montre que la fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{x}$$

atteint son minimum en

$$x = x_0 = \sqrt{n\varepsilon} = \sqrt{n}\eta.$$

Cela nous suggère de poser

$$k = \lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor.$$

Comme $0 < \eta < 1$ et $1 \leq \sqrt{n} \leq n$, il est clair que $\lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor \leq n$ et comme $\lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad \lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor \geq K_0.$$

On peut donc déduire de $(*)$ que

$$\forall n \geq \max\{K_0, N_1\}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq f(\lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor) \leq \frac{\sqrt{n}\eta + 1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{n}\eta}$$

puisque, comme on sait, $\sqrt{n}\eta \leq \lfloor \sqrt{n}\eta \rfloor \leq \sqrt{n}\eta + 1$. Il reste donc

$$\forall n \geq \max\{K_0, N_1\}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\eta.$$

Comme $1/\sqrt{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \eta$$

et par conséquent,

$$\forall n \geq \max\{K_0, N_1, N_2\}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq 3\eta.$$

Autrement dit : la suite de terme général $u_n/\sqrt{n}$ tend vers 0, c'est-à-dire

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{n}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$x^n + x - 1 = 0 \quad (E_n)$$

1. Démontrer que l'équation (E_n) admet une, et une seule, solution dans $\mathbb{R}_+$. Cette solution sera notée x_n dans la suite.
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée. Que peut-on en déduire ?
- 3.a. Écrire un code python qui calcule par dichotomie une valeur approchée à 10^{-4} près de x_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3.b. Représenter graphiquement les 100 premières valeurs de x_n et conjecturer la limite de la suite.
4. Démontrer cette conjecture.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$f_n = [x \mapsto x^n + x - 1].$$

Il est clair que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ (polynomiale!) et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \quad f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0.$$

Comme $f_n(0) = -1$ et que f_n tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$. En particulier, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une, et une seule, solution sur $\mathbb{R}_+$.

▮ Quand il s'agit de prouver qu'une équation admet une, et une seule, solution dans un intervalle donné, il faut systématiquement penser à appliquer une version du Théorème de la bijection monotone.

On dit que la suite (x_n) est **définie implicitement** : on ne connaît pas la valeur de x_n (on sait la calculer pour $n = 1$ et pour $n = 2$), mais on a caractérisé le réel x_n comme l'unique solution d'une équation sur un intervalle donné.

Par conséquent, on va déduire les propriétés de la suite (x_n) de l'étude de l'équation (E_n) , c'est-à-dire des fonctions f_n .

2. Comme $f_n(1) = 1$, on peut préciser la réponse précédente : la fonction f_n réalise une bijection du segment $[0, 1]$ sur le segment $[f(0), f(1)] = [-1, 1]$ et par conséquent l'unique solution x_n de l'équation (E_n) appartient en fait au segment $[0, 1]$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est donc bornée.

▮ En fait, x_n appartient à l'intervalle ouvert $]0, 1[$ puisque $f_n(0) \neq 0$ et que $f_n(1) \neq 0$.

♣ Par hypothèse,

$$\forall n \geq 1, \quad f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n).$$

On sait que $0 < x_n, x_{n+1} < 1$ et que

$$\forall u \in]0, 1[, \quad 0 < u^{n+1} < u^n.$$

Par conséquent,

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 > x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n).$$

Comme f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ et que $0 \leq x_n, x_{n+1} \leq 1$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad x_{n+1} > x_n.$$

Autrement dit, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) croissante.

♣ En tant que suite croissante et majorée, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge — et de plus sa limite ℓ appartient au segment $[x_1, 1] = [1/2, 1]$.

- 3.a. Le code de l'algorithme dichotomique doit être connu !

```
def resolution(fn, a, b, eps):
    fa, delta = fn(a), (b-a)
    while delta > eps:
        m = (a+b)/2
```

```

fm = fn(m)
if fa*fm>0:
    a, fa = m, fm
else:
    b = m
delta /= 2
return (a+b)/2

```

Compte-tenu de l'analyse qui précède, on pourra choisir $a = 0$ et $b = 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. De ce fait, la longueur de l'intervalle résiduel sera inférieure à 10^{-4} au terme de la 14-ième itération et on aurait pu remplacer la traditionnelle boucle `while` par une boucle `for`.

3.b. La fonction qui détermine l'équation dépend de n , elle doit donc être définie à l'intérieur de la boucle `for`. Le reste de la résolution ne devrait poser aucune difficulté.

```

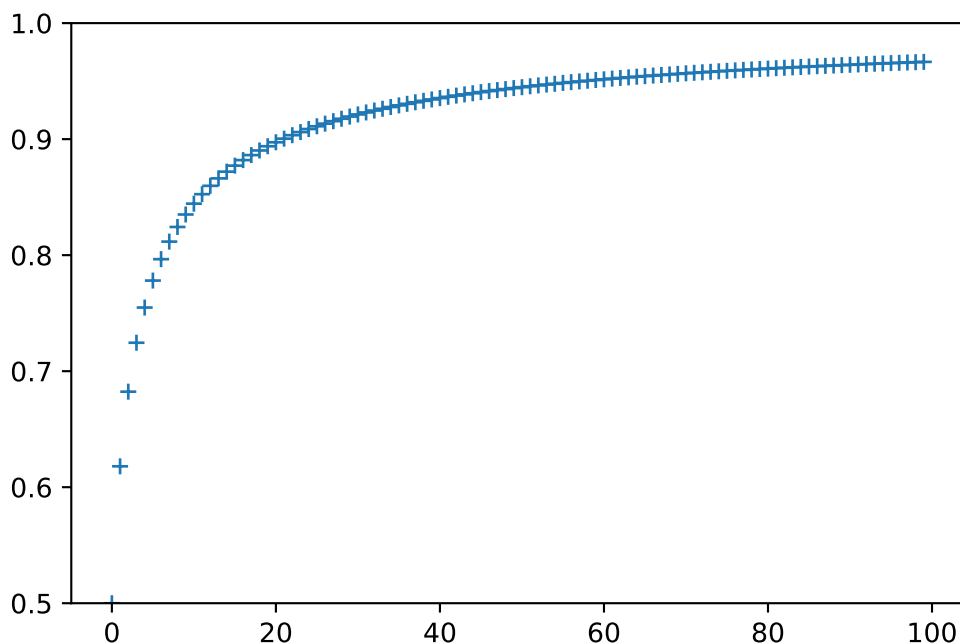
def f(n, x):
    return x**n+x-1

a, b, eps, N = 0, 1, 1e-4, 100
liste_x = []
for n in range(1, N+1):
    fn = lambda x: f(n, x)
    liste_x.append(resolution(fn, a, b, eps))

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(liste_x, '+')
plt.ylim(0.5, 1)

```

On obtient alors la figure suivante, qui suggère que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.



4. On sait que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ell \in [0, 1]$ et qu'elle est croissante. Procédons par l'absurde.

Si $\ell < 1$, alors $0 \leq x_n \leq \ell$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x_n^n \leq \ell^n$$

et, par encadrement ($0 \leq \ell < 1$!), x_n^n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

✎ Si $\ell = 1$, alors le terme x_n^n est une *forme indéterminée* en 1^∞ . L'hypothèse $\ell < 1$ permet de calculer en éliminant cette indétermination.

On en déduit alors que

$$0 = f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + \ell - 1 < 0,$$

ce qui est absurde : la suite identiquement nulle ne peut tendre vers une limite strictement négative!

On a ainsi démontré que $\ell = 1$.

✎ Ce qui précède permet d'écrire $x_n = 1 - \varepsilon_n$ où ε_n est un réel strictement positif qui tend vers 0. On déduit de l'équation (E_n) que

$$\varepsilon_n = 1 - x_n = x_n^n = \exp[n \ln(1 - \varepsilon_n)] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(-n\varepsilon_n[1 + o(1)])$$

et donc que $n\varepsilon_n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, l'infiniment petit ε_n est infiniment grand par rapport à $1/n$.

Soit n , un entier supérieur à 3. On considère l'équation

$$e^x = nx \quad (E_n)$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, l'équation (E_n) admet exactement deux solutions α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < \beta_n$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis un équivalent simple.
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de α_n .

1. Pour tout entier $n \geq 3$, la fonction $f_n = [x \mapsto e^x - nx]$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) = e^x - n.$$

Par conséquent, la fonction f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, \ln n]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\ln n, +\infty[$.

Il est clair que f_n tend vers $+\infty$ au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$; que $f_n(0) = 1 > 0$ et que le minimum de f_n est strictement négatif :

$$\forall n \geq 3, \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = f_n(\ln n) = n - n \ln n = n(1 - \ln n) < 0.$$

En appliquant le théorème de la bijection monotone, on en déduit que l'équation (E_n) n'a pas de solution sur $]-\infty, 0]$ (la fonction f_n est strictement positive); qu'elle admet exactement une solution sur $]0, \ln n[$ et exactement une solution sur $]\ln n, +\infty[$.

L'équation (E_n) admet donc exactement deux solutions réelles α_n et β_n qui vérifient :

$$\forall n \geq 3, \quad 0 < \alpha_n < \ln n < \beta_n.$$

On aurait pu étudier les variations de la fonction $\varphi = [x \mapsto xe^{-x}]$ en transformant l'équation (E_n) en $\varphi(x) = 1/n$ mais cela n'aurait pas été plus simple.

2.

Comme d'habitude, quand une suite est définie implicitement, il faut comparer les fonctions qui définissent α_n et α_{n+1} pour comparer les réels α_n et α_{n+1} .

Pour tout entier $n \geq 3$, par construction,

$$f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) - \alpha_n = -\alpha_n < 0$$

puisque $\alpha_n > 0$. Donc

$$\forall n \geq 3, \quad f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 > f_{n+1}(\alpha_n).$$

Mais on a démontré plus haut que f_{n+1} était strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \ln(n+1)]$ qui contient l'intervalle $[0, \ln n]$. Par conséquent, f_{n+1} est strictement décroissante sur un intervalle qui contient à la fois α_n et α_{n+1} .

On a ainsi démontré que $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \ln n$ pour tout $n \geq 3$: la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ est donc (strictement) décroissante.

3. On a démontré que la suite (α_n) était (strictement) décroissante et minorée (par 0), donc elle est convergente et sa limite ℓ est positive.

Si la suite (α_n) converge vers un réel $\ell > 0$, alors e^{α_n} tend vers e^ℓ alors que $n\alpha_n$ tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$0 = f_n(\alpha_n) = e^{\alpha_n} - n\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty,$$

ce qui est absurde. La suite (α_n) converge donc vers 0.

En déduit que e^{α_n} tend vers 1 et, puisque $f_n(\alpha_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $n\alpha_n = e^{\alpha_n}$ tend vers 1. Autrement dit,

$$\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

4. D'après la question précédente, il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \geq 3, \quad \alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Comme $f_n(\alpha_n) = 0$, on a donc $e^{\alpha_n} = n\alpha_n = 1 + \varepsilon_n$ et par conséquent

$$1 + \varepsilon_n = \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right) = 1 + \frac{1 + \varepsilon_n}{n} + o(1/n) = 1 + 1/n + o(1/n).$$

Par unicité du développement asymptotique, on en déduit que $\varepsilon_n \sim 1/n$ et par conséquent

$$\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(1/n^2).$$

✎ Quant à la suite (β_n) , il est clair qu'elle tend vers $+\infty$ (puisque $\ln n < \beta_n$).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = [2n\pi, 2n\pi + \pi/2].$$

1. Démontrer que l'équation $\sin x = e^{-x}$ admet une, et une seule, solution dans le segment I_n . Cette solution sera notée x_n .
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n .

1. La fonction $f = [x \mapsto \sin x - e^{-x}]$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I_n, \quad f'(x) = \underbrace{\cos x}_{\geq 0} + e^{-x} > 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I_n et réalise donc une bijection du segment I_n sur le segment

$$[f(2n\pi), f(2n\pi + \pi/2)] = [-e^{-2n\pi}, 1 - e^{-2n\pi - \pi/2}].$$

Comme $0 < e^{-u}$ pour tout $u \geq 0$ et que $e^{-u} < 1$ pour tout $u > 0$, on en déduit que $0 \in f_*(I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une, et une seule, solution sur chaque segment I_n .

2. Par construction,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n\pi \leq x_n \leq 2n\pi + \pi/2$$

donc $x_n \sim 2n\pi$ et en particulier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

3. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, e^{-x_n} tend vers 0 et donc (par construction des x_n et par périodicité de $\sin$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-x_n} = \sin x_n = \sin(x_n - 2n\pi).$$

On a démontré que $0 \leq x_n - 2n\pi \leq \pi/2$, c'est-à-dire $x_n - 2n\pi \in I_0$. Or on sait que $\sin$ réalise une bijection de I_0 sur $[0, 1]$ et que la réciproque de cette bijection est continue sur $[0, 1]$. Par conséquent,

$$x_n - 2n\pi = \operatorname{Arcsin}[\sin(x_n - 2n\pi)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $x_n = 2n\pi + o(1)$ et donc que

$$x_n - 2n\pi \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin(x_n - 2n\pi) = \sin x_n = e^{-x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{[-2n\pi + o(1)]} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-2n\pi}.$$

Ainsi,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2n\pi + e^{-2n\pi} + o(e^{-2n\pi}).$$

|| Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de réels positifs qui converge vers 0. Démontrer que cette suite possède une sous-suite décroissante.

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et tend vers 0, on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n \leq \varepsilon. \quad (\star)$$

• S'il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = 0$, alors il existe une suite extraite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} = (u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $v_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et cette suite extraite est décroissante (au sens large).

• Sinon, il n'existe qu'un nombre fini d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = 0$ et par conséquent, il existe un rang N_0 tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad u_n > 0.$$

On choisit alors $v_0 = u_{N_0}$.

Supposons connus des indices $N_0 < n_1 < \dots < n_p$ tels que

$$u_{N_0} > u_{n_1} > \dots > u_{n_p} > 0.$$

On pose alors $\varepsilon = u_{n_p} > 0$ et on déduit de $(\star)$ qu'il existe un rang $n_{p+1} > n_p$ tel que

$$\forall n \geq n_{p+1}, \quad 0 \leq u_n \leq u_{n_{p+1}}.$$

On a ainsi justifié l'existence d'une suite extraite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui est décroissante.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n(t) = \ln t - \operatorname{Arctan} t - n\pi.$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g_n(x_n) = 0$.

2. Démontrer que $e^{n\pi} < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature de la série $\sum 1/x_n$.

1. Considérons la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \ln t - \operatorname{Arctan} t.$$

Il est clair que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, qu'elle tend vers $-\infty$ au voisinage de 0 et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

La fonction Arctan est bornée sur $\mathbb{R}$, c'est donc la fonction $\ln$ qui impose les limites de g .

De plus,

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2 - t + 1}{t(1+t^2)} > 0.$$

Le discriminant du numérateur est strictement négatif (égal à -3), donc le numérateur est de signe constant et il est strictement positif pour $t = 1$.

Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et on déduit du Théorème de la bijection monotone que g réalise une bijection (strictement croissante) de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur l'intervalle

$$]\lim_{t \rightarrow 0} g(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)[=]-\infty, +\infty[.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, réel $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(x_n) = n\pi$.

En définissant les fonctions g_n , l'énoncé offre une fausse piste : il n'y a ici qu'une seule fonction à étudier !

2. Il est clair que

$$\forall n \geq 1, \quad g(e^{n\pi}) = n\pi - \operatorname{Arctan}(n\pi) < n\pi = g(x_n).$$

Comme la fonction g est croissante, on en déduit que $e^{n\pi} < x_n$.

• Comme $e^{n\pi} > 0$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{e^{n\pi}} = (e^{-\pi})^n.$$

Comme $-\pi < 0$, on a donc $0 < e^{-\pi} < 1$, ce qui prouve que la série géométrique $\sum (e^{-\pi})^n$ est convergente et, par comparaison de série de termes généraux positifs, la série $\sum 1/x_n$ est (absolument) convergente.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle ou complexe. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente. Démontrer que la série

$$\sum \frac{u_n}{n}$$

est convergente.

Comme la série $\sum u_n$ est convergente, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

est convergente et en particulier elle est bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |U_n| \leq M.$$

✎ Pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{U_n - U_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{U_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{U_n}{n+1} = \frac{U_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} U_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - U_0.$$

Le dernier terme, $-U_0$, est constant. Le premier terme, U_N/N , tend vers 0 puisque la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est bornée. Enfin, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{\left| U_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right|}_{\geq 0} \leq \sum_{n=1}^{N-1} M \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = M(1 - 1/N) \leq M.$$

On vient ici de majorer les sommes partielles d'une série de terme général positif. Autrement dit, on a prouvé que la série

$$\sum U_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

était (absolument) convergente. Par conséquent, les sommes partielles

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n}{n}$$

tendent vers une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$, on a démontré que la série $\sum u_n/n$ était convergente.

On considère la suite u définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

2. Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$?

1. Il est clair que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ (on ne connaît pas le signe de u_0). On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Par conséquent, $u_{n+1} \sim 1/n$ et comme la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, la série $\sum u_n$ est divergente.

2. En reprenant la relation de récurrence, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} &= \frac{1 - u_n + o(u_n)}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right) \\ &= \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(-1)^n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}(1/n^2).$$

• La série harmonique alternée $\sum (-1)^n/n$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). Comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, toute série dont le terme général est $\mathcal{O}(1/n^2)$ est elle-même (absolument) convergente.

Ainsi, la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente (comme somme de deux séries convergentes).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle à valeurs non nulles. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. Démontrer que les u_n sont de signe constant à partir d'un certain rang.
2. On suppose que tous les u_n sont strictement positifs et on considère

$$w_n = \ln \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}.$$

Démontrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente. En déduire que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. En déduire, sans utiliser l'équivalent de Stirling, la nature de la suite de terme général

$$u_n = \frac{n^n}{n!e^n}.$$

1. Par hypothèse, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite strictement positive (égale à 1 en fait). Donc, à partir d'un certain rang, ce quotient est strictement positif et les deux réels u_n et u_{n+1} sont donc de même signe.

Il n'est pas nécessaire de recourir aux ε pour justifier le résultat si on pense à bien mettre l'accent sur la stricte positivité de la limite.

Pour ceux qui y tiennent quand même, les voici. La limite du quotient est égale à 1, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 + \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un rang $n_{1/2} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_{1/2}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{1}{2} > 0.$$

2. D'après la première question, comme les réels u_n sont tous de même signe pour $n \geq n_{1/2}$,
 — ou bien $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_{1/2}$,
 — ou bien $u_n < 0$ pour tout $n \geq n_{1/2}$.

Puisqu'on s'intéresse uniquement au comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que tous les u_n sont strictement positifs, quitte à remplacer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la suite extraite $(u_n)_{n \geq n_{1/2}}$ ou par la suite extraite $(-u_n)_{n \geq n_{1/2}}$: cela sera sans conséquence sur les valeurs de w_n .

On sait que $\ln(1+u) = u + \mathcal{O}(u^2)$ lorsque u tend vers 0. Avec

$$u \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

on a bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(u^2) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \alpha \cdot \left[\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \ln\left[1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par comparaison avec une série de Riemann, on en déduit que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

• On peut aussi réécrire w_n de la façon suivante :

$$w_n = \ln[(n+1)^\alpha u_{n+1}] - \ln[n^\alpha u_n],$$

ce qui exprime $\sum w_n$ comme une série télescopique.

Comme la série $\sum w_n$ est convergente, on en déduit que la suite de terme général $\ln(n^\alpha u_n)$ est convergente et, par continuité de la fonction $\exp$, la suite de terme général $n^\alpha u_n$ est convergente.

Plus précisément, si $\ln(n^\alpha u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $n^\alpha u_n$ tend vers $K = e^\ell > 0$ et par conséquent

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}.$$

3. Tous les u_n sont strictement positifs et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!e^n}{(n+1)!e^{n+1}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot \frac{n!e^n}{(n+1)e \cdot n!e^n} \\ &= \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \exp\left(n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right) \\ &= e \cdot \exp\left[\frac{-1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= e \cdot \left[1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On peut donc appliquer le résultat précédent avec $\alpha = 1/2$, ce qui prouve qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

En particulier, la série $\sum u_n$ est divergente (par comparaison avec une série de Riemann).

La règle de D'Alembert ne permet pas de déterminer la nature de la série $\sum u_n$, puisque le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1.

D'après l'équivalent de Stirling,

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} e^{-n} \sqrt{n}$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos u_n$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Comme $u_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$u_1 = \cos u_0 \in [-1, 1] \subset [-\pi/2, \pi/2],$$

donc

$$u_2 = \cos u_1 \in [0, 1] \subset [0, \pi/2]$$

et, par récurrence,

$$\forall n \geq 2, \quad u_n \in [0, 1].$$

• La fonction $\cos$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], \quad \cos'(x) = -\sin x \in [-\sin 1, 0].$$

En posant $0 \leq k = \sin 1 < 1$, on déduit de l'inégalité des accroissements finis que $\cos$ est k -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

• Pour tout $n \geq 2$, les termes u_n et u_{n+1} appartiennent au segment $[0, 1]$ et

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\cos u_{n+1} - \cos u_n| \leq k|u_{n+1} - u_n|.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k^{n-2}|u_3 - u_2|.$$

Comme $0 < k < 1$, on en déduit que la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente (comparaison à une série géométrique convergente). Cette série est donc convergente et par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

• Cette suite converge vers l'unique point fixe de la fonction $\cos$, mais cela n'est pas demandé par l'énoncé. Il faut se tenir prêt à appliquer le Théorème de la bijection monotone à la fonction $[x \mapsto x - \cos x]$.

L'étude des variations de la suite n'est pas demandée non plus. Comme $\cos$ est décroissante sur $[0, 1]$, les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et varient en sens inverse. (Faire une figure pour en savoir plus!)

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux suivent.

1. $u_n = \operatorname{Arccos} \sqrt{1 - \frac{1}{n^\alpha}}$ avec $\alpha > 0$

(Indication : $\cos^2 u_n + \sin^2 u_n = 1$)

2.

$$v_n = \cos\left(n^2 \pi \ln \frac{n-1}{n}\right)$$

1. Comme $\alpha > 0$, il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^\alpha} = 1,$$

donc u_n tend vers 0 (par composition de limites) par valeurs positives (puisque la fonction Arccos prend des valeurs comprises entre 0 et π). Par conséquent,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin u_n \sim \sqrt{\sin^2 u_n}.$$

Par définition de la fonction Arccos ,

$$\cos^2 u_n = \left[\cos \operatorname{Arccos} \sqrt{1 - \frac{1}{n^\alpha}} \right]^2 = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

On a donc

$$\sin^2 u_n = 1 - \cos^2 u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

et finalement

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

D'après le Théorème de comparaison par équivalence (cas des séries de terme général positif), la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 2$.

La fonction Arccos est continue en $x = 1$, mais elle n'est pas dérivable en $x = 1$. Par conséquent, elle admet un développement limité à l'ordre 0, mais pas à l'ordre 1, en $x = 1$.

Pour trouver un ordre de grandeur sans recourir à l'astuce suggérée par l'énoncé, il faut passer par le Théorème fondamental :

$$\operatorname{Arccos} 1 - \operatorname{Arccos} x = \int_x^1 \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

et par conséquent

$$\operatorname{Arccos} x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

Ici,

$$1 - x = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^\alpha}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^\alpha}$$

et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

2. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\ln \frac{n-1}{n} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Par conséquent,

$$n^2 \pi \ln \frac{n-1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^n \sin\left[\frac{-\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \frac{(-1)^{n+1} \pi}{3n}$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). Toute série dont le terme général est dominé par $1/n^2$ est absolument convergente (Théorème de comparaison à une série de Riemann). Par somme, la série $\sum v_n$ est convergente.

🔗 La série $\sum v_n$ est semi-convergente car

$$|v_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{3n}$$

et la série (harmonique) $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif.