Problème de Mathématiques

Référence pb1404 — Version du 15 octobre 2025

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$$

et pour tout x tel que la série $\sum f_n(x)$ converge, on note

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Partie A. Variations de f

1. Démontrer que la série $\sum f_n(x)$ converge si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}_+$. La somme f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Démontrer que f est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

☞ *Pour la décroissance de f, on comparera $f(x)$ à $f(y)$ en supposant que $0 \leqslant x \leqslant y$.*

3. Expliciter une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge et que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \geqslant 0, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant u_n.$$

4. a. Calculer $f_n'(x)$.

4. b. Soit $a > 0$. Expliciter une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum v_n$ converge et que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \geqslant a, \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant v_n.$$

4. c. Justifier l'existence de

$$w_n = \sup_{x\geqslant 0} \left|f_n'(x)\right|$$

pour tout $n \geqslant 1$. La série $\sum w_n$ est-elle convergente ?

5. **Pour 5/2 uniquement.** Exploiter les résultats des questions précédentes.

Partie B. Étude de f au voisinage de $+\infty$

6. Que sait-on déjà du comportement de f au voisinage de $+\infty$?

7. Démontrer que $f(x) = \mathcal{O}(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$. Que peut-on en déduire ?

8. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-x(\sqrt{n}-1)}}{n\sqrt{n}}.$$

8. a. Expliciter un réel $\lambda > 0$ tel que $\psi(x) = \mathcal{O}(e^{-\lambda x})$ lorsque x tend vers $+\infty$.

8. b. Exprimer $f(x)e^x$ au moyen de $\psi(x)$ et en déduire un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

8. c. **Pour 5/2 uniquement.** La fonction f est-elle intégrable au voisinage de $+\infty$?

Partie C. Allure du graphe de f

9. On rappelle qu'une fonction φ est **convexe** sur un intervalle I lorsque

$$\varphi\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

quels que soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. On rappelle aussi que la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

9. a. Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

9. b. En déduire que l'expression

$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

admet une limite lorsque x tend vers 0.

9. c. Démontrer que cette limite est infinie.

10. Tracer l'allure du graphe de f.

Solution ❀ Étude d'une série de fonctions

Partie A. Variations de f

1. Si $x \geqslant 0$, alors $0 < e^{-\sqrt{n}x} \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$, donc

$$f_n(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série de Riemann $\sum {}^1\!/_{n^{3/2}}$ est (absolument) convergente, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ est (absolument) convergente.

❧ Si $x < 0$, alors $e^{-x} > 1$ et

$$f_n(x) = \frac{(e^{-x})^{\sqrt{n}}}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

par croissances comparées des puissances de n et des suites géométriques. Dans ce cas, la série $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.

❧ Finalement, la série $\sum f_n(x)$ converge si, et seulement si, $x \geqslant 0$.

2. Pour tout $x \geqslant 0$, la série $\sum f_n(x)$ est une série de terme général positif, donc sa somme $f(x)$ est un réel positif.

❧ Pour tout $\alpha \geqslant 1$, la fonction $[x \mapsto e^{-\alpha x}]$ est décroissante, donc

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant y,\ \forall\, k \geqslant 1, \quad f_k(y) \leqslant f_k(x).$$

En sommant sur k, on en déduit que

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant y,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} f_k(y) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

et en passant à la limite (puisque x et y sont positifs) :

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant y, \quad f(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = f(x)$$

ce qui prouve que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \geqslant 0, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$$

et comme la série de Riemann $\sum {}^1\!/_{n^{3/2}}$ est convergente, on peut choisir

$$u_n = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Remarque.— $\dfrac{1}{n^{3/2}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \big|f_n(x)\big|$

4. a.

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \geqslant 0, \quad f_n'(x) = -\frac{e^{-\sqrt{n}x}}{n}.$$

4. b. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant a$,

$$\big|f_n'(x)\big| = \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{n} \leqslant \frac{(e^{-a})^{\sqrt{n}}}{n}.$$

Choisissons donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad v_n = \frac{(e^{-a})^{\sqrt{n}}}{n} = \sup_{x\in[a,+\infty[} \big|f_n'(x)\big|.$$

Par croissances comparées de $\ell n\, n$ et de $\sqrt{n}$,

$$n^{\alpha} v_n = e^{-\sqrt{n}a + (\alpha-1)\,\ell n\, n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\forall\, \alpha > 1, \quad v_n = o\Big(\frac{1}{n^{\alpha}}\Big),$$

ce qui prouve que la série $\sum v_n$ est absolument convergente (par comparaison aux séries de Riemann).
REMARQUE.— On ne peut pas invoquer la règle de D'Alembert ici car le quotient v_{n+1}/v_n tend vers 1.
4. c. D'après l'axiome de la borne supérieure, toute fonction bornée par M admet une borne supérieure et cette borne supérieure est inférieure à M.
❧ Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \geqslant 0, \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

ce qui prouve d'une part que la borne supérieure w_n existe et d'autre part qu'elle est majorée par $1/n$.
❧ De plus $\left|f_n'(0)\right| = 1/n$, donc $1/n$ est bien le plus petit majorant possible et par conséquent

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad w_n = \frac{1}{n}.$$

Chacun sait que la série harmonique diverge, donc $\sum w_n$ diverge.
5. Par **1.**, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
Toutes les fonctions f_n sont continues et, d'après **3.**, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, donc la somme f est continue sur $[0, +\infty[$.
Par **4.b.**, la série dérivée $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc la somme f est dérivable terme à terme sur $]0, +\infty[$:

$$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{n}.$$

Partie B. Étude de f au voisinage de $+\infty$

6. Par **2.**, la fonction f est décroissante et positive, donc admet une limite finie (et positive) au voisinage de $+\infty$.
7. Il est clair que

$$\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{n^{3/2}}.$$

Comme les séries $\sum f_n(x)$ et $\sum 1/n^{3/2}$ sont convergentes, on en déduit par sommation que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

et par conséquent $f(x) = \mathcal{O}(e^{-x})$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En particulier, la limite de f au voisinage de $+\infty$ est nulle.
8. a. Prenons $\lambda = \sqrt{2} - 1 > 0$ pour que $(\sqrt{n} - 1) \geqslant \lambda$ pour tout $n \geqslant 2$. Alors

$$\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{e^{-\lambda x}}{n^{3/2}}.$$

Comme les séries $\sum f_n(x)$ et $\sum 1/n^{3/2}$ sont convergentes, on en déduit par sommation que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \psi(x) \leqslant e^{-\lambda x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

et en particulier que $\psi(x) = \mathcal{O}(e^{-\lambda x})$ lorsque x tend vers $+\infty$.
8. b. Comme $\lambda > 0$, il est clair que

$$e^x f(x) = 1 + \psi(x) = 1 + \mathcal{O}(e^{-\lambda x}) = 1 + o(1)$$

ce qui prouve que $f(x) \sim e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$.
8. c. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et équivalente à e^{-x} au voisinage de $+\infty$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$ (et intégrable sur $[0, +\infty[$ en fait).

Partie C. Allure du graphe de f

9. a. Par convexité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, les fonctions f_n sont convexes sur $\mathbb{R}_+$. En effet, quels que soient $x, y \geqslant 0$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

$$e^{-\sqrt{n}\left[(1-\lambda)x+\lambda y\right]} = e^{(1-\lambda)(-\sqrt{n}x)+\lambda(-\sqrt{n}y)}$$
$$\leqslant (1-\lambda)e^{-\sqrt{n}x} + \lambda e^{-\sqrt{n}y}.$$

(On pouvait aussi étudier le signe de f_n''.)

❧ Fixons $x, y \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et $z = (1-\lambda)x + \lambda y \geqslant 0$. Par convexité des f_n,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad f_n(z) \leqslant (1-\lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y).$$

Comme les séries $\sum f_n(x)$, $\sum f_n(y)$ et $\sum f_n(z)$ convergent (puisque x, y et z sont positifs), on en déduit par sommation que

$$f(z) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

ce qui prouve que la fonction f est convexe sur $[0, +\infty[$.

REMARQUE.— On peut prouver que f est deux fois dérivable terme à terme sur $]0, +\infty[$, ce qui permet de prouver facilement que f est convexe sur l'intervalle *ouvert* $]0, +\infty[$. Mais comment justifier ensuite que f est convexe sur l'intervalle *fermé* $[0, +\infty[$?

9. b. Par convexité de f sur $[0, +\infty[$, le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

est une fonction croissante de x sur $]0, +\infty[$ et on sait que toute fonction monotone sur $]0, +\infty[$ admet une limite, finie ou infinie, au voisinage de 0.

9. c. Soit $x > 0$. Pour tout $k \geqslant 1$, la fonction f_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$, donc il existe $0 < c_k < x$ tel que

$$\frac{f_k(x) - f_k(0)}{x} = f_k'(c_k) = -\frac{e^{-\sqrt{k}c_k}}{k} \leqslant -\frac{e^{-\sqrt{k}x}}{k} \leqslant 0.$$

Comme la somme d'une série de terme général négatif est un minorant de la suite des sommes partielles, on en déduit que

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\sqrt{k}x}}{k}.$$

D'après **9.b.**, on peut faire tendre x vers 0 (les limites existent, celle du membre de gauche étant éventuellement infinie) :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Comme la série harmonique est une série divergente de terme général positif, on en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty,$$

ce qui signifie que le graphe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse $x = 0$.

10.