

Problème de Mathématiques

Référence pb1502 — Version du 15 octobre 2025

Partie A. Somme d'une série célèbre

On admettra que

$$\sum_{n=1}^m \cos nt = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

pour tout entier $m \geq 1$ et tout $0 < t \leq \pi$.

1. Soit u , une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^\pi u(t) \sin \lambda t \, dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

lorsque λ tend vers $+\infty$.

2. Vérifier que

$$\forall n \geq 1, \quad \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}.$$

3. On considère l'application $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = -1$ et par

$$\forall 0 < t \leq \pi, \quad f(t) = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right).$$

3.a. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

3.b. Vérifier que

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} \, dt$$

pour tout entier $m \geq 1$.

3.c. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie B. Fonction définie par une somme

On étudie ici la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

4. Démontrer que S est définie sur $[0, +\infty[$.

5. Expliciter les valeurs de $S(0)$ et de $S(1)$.

6. Expliciter un réel $K > 0$ tel que

$$\forall x, y \geq 0, \quad |S(x) - S(y)| \leq K|x - y|.$$

7. Démontrer que

$$\left| \frac{S(x) - S(y)}{x - y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) |y - x|$$

quels que soient les réels positifs distincts x et y .

8. Que peut-on déduire des deux questions précédentes?

9. Démontrer que S est concave sur $[0, +\infty[$.

10. Par comparaison avec une intégrale, démontrer que

$$S(x) = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

11. Tracer l'allure du graphe de S . On soignera en particulier l'allure aux voisinages des abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

12. On souhaite tracer l'allure du graphe de S à l'aide d'un ordinateur. Présenter les difficultés soulevées et proposer une manière de les résoudre.

Solution ✿ Étude d'une série de fonctions

Partie A. Somme d'une série célèbre

1. Comme u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(t) \sin \lambda t \, dt &= \frac{1}{\lambda} [u(0) - u(\pi) \cos \lambda \pi] \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos \lambda t \, dt. \end{aligned}$$

Le terme intégré est un $\mathcal{O}(1/\lambda)$ car la fonction $\cos$ est bornée. La fonction u' est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad |u'(t)| \leq M.$$

On en déduit que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad |u'(t) \cos \lambda t| \leq M$$

et donc que

$$\left| \int_0^\pi u'(t) \cos \lambda t \, dt \right| \leq \int_0^\pi |u'(t) \cos \lambda t| \, dt \leq M\pi.$$

Finalement,

$$\int_0^\pi u(t) \sin \lambda t \, dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

lorsque λ tend vers $+\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre par parties :

$$\int_0^\pi t \cos nt \, dt = \underbrace{\left[\frac{t \sin nt}{n} \right]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nt \, dt = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

On intègre encore deux fois par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2 \cos nt \, dt &= \underbrace{\left[\frac{t^2 \sin nt}{n} \right]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{n} \int_0^\pi t \sin nt \, dt \\ &= \frac{2}{n} \left[\underbrace{\left[\frac{t \cos nt}{n} \right]_0^\pi}_{=0} - \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos nt}{n} \, dt}_{=0} \right] \\ &= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

On obtient bien la formule attendue.

3. a. Il est évident que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et en particulier de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle semi-ouvert $]0, \pi]$.

Pour $t > 0$ voisin de 0,

$$f(t) \sim \frac{1}{2(t/2)} t \left(\frac{t}{2\pi} - 1 \right) = -1 + \mathcal{O}(t)$$

donc $f(t)$ tend vers $-1 = f(0)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement supérieures. Cela prouve que la fonction f est continue en 0.

✿ Le Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ (conséquence du Théorème des accroissements finis) nous dit que : si f est continue sur $[0, \pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et si sa dérivée admet une limite finie ℓ au voisinage droit de 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et $f'(0) = \ell$.

Il nous suffit donc de vérifier que f' admet une limite à droite en 0.

Pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{t/2}{\sin t/2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(t/2)^2 \cos t/2}{\sin^2 t/2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{-2 \sin t/2 + t \cos t/2}{4 \sin^2 t/2}}_{=\mathcal{O}(t)} \end{aligned}$$

Cela prouve que $f'(t)$ tend vers $1/2\pi$ lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement supérieures. Pour les raisons précisées plus haut, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et que $f'(0) = 1/2\pi$.

3.b. Par **2.** et la linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\sum_{n=1}^m \cos nt \right) dt.$$

En utilisant la formule rappelée dans le préambule,

$$\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\sum_{n=1}^m \cos nt \right) = 2f(t) \cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}$$

pour tout $0 < t \leq 2\pi$ et il est clair que cette égalité est vraie également pour $t = 0$.

On sait que

$$2 \cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2} = \sin \frac{(2m+1)t}{2} - \sin \frac{t}{2}.$$

On en déduit enfin que

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \int_0^\pi f(t) \sin \frac{t}{2} dt.$$

Or, pour $0 < t \leq \pi$,

$$f(t) \sin \frac{t}{2} = \frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}$$

et cette égalité est encore vraie pour $t = 0$, donc

$$\int_0^\pi f(t) \sin \frac{t}{2} dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2} \right) dt = \frac{-\pi^2}{6}.$$

La formule demandée est ainsi établie.

3.c. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, le **1.** prouve que l'intégrale du **3.b.** tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. Par conséquent, la série $\sum 1/n^2$ est convergente (ce qu'on savait déjà) et ses sommes partielles convergent vers $\pi^2/6$.

Partie B. Fonction définie par une somme

4. Pour tout $x \geq 0$ (fixé),

$$u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} = \mathcal{O}(1/n^2).$$

Comme la série (de Riemann) $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, la série $\sum u_n(x)$ est aussi absolument convergente, donc convergente, ce qui prouve que la fonction S est bien définie sur $[0, +\infty[$.

5. Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls, donc $S(0) = 0$.

Pour $x = 1$, on reconnaît une somme télescopique : pour tout entier $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

donc $S(1) = 1$.

6. Les deux séries $\sum u_n(x)$ et $\sum u_n(y)$ sont convergentes. Par linéarité de la somme,

$$S(x) - S(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+y} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x-y}{(n+x)(n+y)}.$$

Pour tout $n \geq 1$, quels que soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \frac{1}{n^2}$$

donc

$$|S(x) - S(y)| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) |x - y|.$$

Le réel $K = \pi^2/6$ convient donc.

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (fixé),

$$\frac{1}{(n+x)^2} \sim \frac{1}{n^2},$$

donc la série $\sum 1/(n+x)^2$ est (absolument) convergente.

On déduit alors des calculs précédents que, quels que soient les réels positifs *distincts* x et y ,

$$\begin{aligned} \frac{S(x) - S(y)}{x - y} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x} \left(\frac{1}{n+y} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= (x-y) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}. \end{aligned}$$

Quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \frac{1}{n^3}.$$

On en déduit donc que

$$\left| \frac{S(x) - S(y)}{x - y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) |y - x|,$$

encadrement intéressant parce que la série (de Riemann) $\sum 1/n^3$ est convergente.

8. Par 6., on voit que S est K -lipschitzienne, donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par 7., on voit que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quels que soient les réels $0 \leq x \leq y$,

$$0 \leq \frac{1}{(n+y)^2} \leq \frac{1}{(n+x)^2}.$$

En sommant ces encadrements, on en déduit que

$$0 \leq S'(y) \leq S'(x).$$

Par conséquent, la fonction S est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme sa dérivée est décroissante, la fonction S est concave sur $\mathbb{R}_+$.

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ (fixé). La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$$

est clairement une fonction (de t) continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

On encadre l'intégrale de f sur $[1, N]$ par des sommes partielles (*faire une figure*) et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S(x) - \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq S(x)$$

ce qui revient à

$$\ln(1+x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Le minorant est $\ln x + o(1)$ et le majorant $\ln x + 1 + o(1)$. Cet encadrement prouve que

$$S(x) = \ln x + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— On peut être beaucoup plus précis en usant de l'astuce taupinale et en étant un peu savant.

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) + \left(\ln N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} \right) \right] \\ &= \gamma + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\ln N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} \right). \end{aligned}$$

Par comparaison de sommes et d'intégrales (*faire une figure*),

$$\int_{x+1}^{x+N+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} \leq \int_x^{x+N} \frac{dt}{t}$$

donc

$$\ln \frac{Nx}{N+x} \leq \ln N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} \leq \ln \frac{N(x+1)}{N+x+1}.$$

Le minorant tend vers $\ln x$, le majorant tend vers $\ln(1+x)$ et le terme médian admet une limite (fait démontré un peu plus haut). On en déduit que

$$\ln x \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\ln N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} \right) \leq \ln(1+x)$$

pour tout $x > 0$. Lorsque x tend vers $+\infty$, on sait que $\ln(1+x) = \ln x + o(1)$. Par conséquent,

$$S(x) = \ln x + \gamma + o(1).$$

11. On sait que $S(0) = 0$ avec $S'(0) = \pi^2/6 \approx 1,7$; que $S(1) = 1$ avec

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} \approx 0,7.$$

Enfin, la fonction S est croissante, concave et équivalente à $\ln x$ au voisinage de $+\infty$.

En tenant compte de ces informations, il est facile de tracer l'allure du graphe de S .

12. Il n'y a qu'une seule méthode pour tracer l'allure d'un graphe à l'ordinateur : calculer des points du graphe et interpoler (disons linéairement pour simplifier) ces points.

Il faut donc définir une famille d'abscisses $(x_k)_{k \in I}$ et calculer une valeur approchée raisonnable de $S(x_k)$ pour chaque valeur de k .

Comme la fonction S est croissante et concave, sa dérivée varie peu dès qu'on s'éloigne un peu de l'origine. On va donc procéder en deux étapes pour masquer les effets de l'interpolation linéaire (de telle sorte que le graphe tracé ait l'air d'une courbe $\mathcal{C}^1$ et non pas d'une ligne brisée) : on va choisir des abscisses x_k assez rapprochées au voisinage de 0 et assez éloignées les unes des autres ailleurs.

Pour tout x fixé, on doit calculer (une valeur approchée de) la somme de la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \sim \frac{x}{n^2}.$$

On sait alors que le reste d'ordre n est équivalent à x/n . Pour obtenir une précision satisfaisante (à l'écran!), on imposera donc $n = 50x$.

