

Problème de Mathématiques

Référence pb1701 — Version du 15 octobre 2025

On note $\mathcal{L}$, l'ensemble des applications **lipschitziennes** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_\varphi |x - y|.$$

Le but de ce problème est de trouver, en fonction des réels $\alpha \neq 0$ et $\lambda \neq 0$ donnés, les applications $F \in \mathcal{L}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x + \alpha) = f(x) \tag{1}$$

où $f \in \mathcal{L}$ est donnée.

Partie A. Préliminaires : quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

1. Démontrer que $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel réel.
2. Soit $f \in \mathcal{L}$. Démontrer que, pour tout réel x_0 , la fonction $g_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_{x_0}(x) = f(x - x_0)$$

appartient aussi à $\mathcal{L}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une application dérivable. Démontrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée f' est bornée.
4. a. Démontrer que les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont lipschitziennes.
4. b. Donner un exemple de fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ qui ne soit pas bornée.
4. c. Donner un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui ne soit pas lipschitzienne.
5. Soient f et g , deux applications *bornées* de $\mathcal{L}$. Démontrer que le produit fg est aussi une application lipschitzienne bornée. Que dire du produit de deux applications lipschitziennes lorsqu'elle ne sont pas toutes les deux bornées?
6. Soit $f \in \mathcal{L}$. Démontrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq A|x| + B. \tag{2}$$

☞ On pourra appliquer la propriété de Lipschitz avec $y = 0$.

Quel ordre de grandeur de $f(x)$ peut-on en déduire au voisinage de $\pm\infty$?

7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

quels que soient les réels x et y vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$. Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie B. Résolution d'un cas particulier

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction nulle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

8. On suppose qu'une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifie l'équation fonctionnelle (1). Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad F(x) = \lambda^n F(x + n\alpha).$$

9. On suppose que $|\lambda| < 1$. Démontrer que F est la fonction nulle.

☞ On pourra étudier l'ordre de grandeur de $\lambda^n F(x + n\alpha)$ lorsque n tend vers l'infini.

10. On suppose que $|\lambda| > 1$. Démontrer que F est la fonction nulle.
 11. On suppose que $\lambda = 1$.
 11. a. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (1)?
 11. b. Expliciter, en fonction de a , un exemple de solution non nulle.
 12. On suppose que $\lambda = -1$.
 12. a. Démontrer que F est périodique et admet $2a$ pour période.
 12. b. Expliciter, en fonction de a , un exemple de solution non nulle.
 12. c. Toute application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de période $2a$ est-elle solution de (1)?

Partie C. Cas où $|\lambda| < 1$

13. On suppose que l'équation (1) admet une solution F . Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka). \quad (3)$$

14. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum \lambda^n f(x + na)$$

est absolument convergente.

☞ On pourra invoquer le résultat du [6.]

15. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na).$$

Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}$, puis que φ est l'unique solution lipschitzienne de l'équation (1).

16. Expliciter la solution F_1 de (1) associée à la donnée $f_1(x) = 1$.
 17. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in]-1, 1[$, on pose

$$F_2(x, \lambda) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}.$$

Démontrer que, pour tout $\lambda \in]-1, 1[$, la fonction

$$[x \mapsto F_2(x, \lambda)]$$

est l'unique solution lipschitzienne de (1) associée à la donnée $f = \cos$.

Partie D. Un cas particulier avec $\lambda = -1$

On suppose dans cette partie que $\lambda = -1$, $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, convexe, décroissante et de limite nulle au voisinage de $+\infty$.

18. a. Quel est le signe de $f(x)$? Et celui de $f'(x)$?
 18. b. On suppose que la fonction f n'est pas constante. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

☞ On pourra minorer f par une fonction affine.

18. c. On suppose que $u \leq v \leq u + 1$. Démontrer que

$$f(u) - f(v) \geq f(u + 1) - f(v + 1) \geq 0.$$

18. d. Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses de l'énoncé.
 19. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum (-1)^n f(x + n)$$

converge.

20. On posera dans la suite de cette partie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x + n).$$

20. a. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(x)| \leq |f(x)|$$

et en déduire la limite de φ au voisinage de $+\infty$.

20. b. Démontrer que φ est lipschitzienne.

☞ On pourra appliquer [7.] en s'aidant de [18.c.]

21. Démontrer que l'équation (1) admet une, et une seule, solution $F \in \mathcal{L}$ qui tende vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Solution ✱ Résolution d'une équation fonctionnelle

Partie A. Préliminaires : quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

1. L'ensemble $\mathcal{L}$ est contenu dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction identiquement nulle est lipschitzienne (elle admet 0 pour constante de Lipschitz). Enfin, si φ et ψ sont lipschitziennes, quel que soit le réel λ , quel que soit le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |(\lambda\varphi + \psi)(x) - (\lambda\varphi + \psi)(y)| &= |\lambda[\varphi(x) - \varphi(y)] + [\psi(x) - \psi(y)]| \\ &\leq |\lambda| |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\psi(x) - \psi(y)| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq (|\lambda|K_\varphi + K_\psi)|x - y|, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{L}$ est stable par combinaison linéaire.

L'ensemble $\mathcal{L}$ des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Quels que soient les réels x et y ,

$$\begin{aligned} |g_{x_0}(x) - g_{x_0}(y)| &= |f(x - x_0) - f(y - x_0)| \\ &\leq K_f |(x - x_0) - (y - x_0)| \\ &\leq K_f |x - y|, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $g_{x_0} \in \mathcal{L}$.

3. Supposons que f soit lipschitzienne et dérivable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall h \neq 0, \quad \frac{|f(x) - f(x+h)|}{|x - (x+h)|} \leq K_f$$

donc

$$|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(x+h)|}{|x - (x+h)|} \leq K_f.$$

Réciproquement, si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors le théorème des accroissements finis nous assure que

$$\forall x \neq y, \exists c \in]x, y[, \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

Si la dérivée de f est bornée par K , on en déduit que

$$\forall x \neq y, \quad \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq K$$

et donc que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

(L'inégalité de Lipschitz est évidente pour $x = y$.)

4. a. La dérivée de $\sin$, qui est $\cos$, est une fonction bornée. Par [3.], la fonction $\sin$ est lipschitzienne. De même pour $\cos$.

4. b. De même, la fonction $[x \mapsto x]$ est lipschitzienne, mais elle n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

4. c. Enfin, la fonction $[x \mapsto x^2]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas lipschitzienne puisque sa dérivée n'est pas bornée.

5. Soient f et g , deux applications lipschitziennes, respectivement bornées par M_f et M_g . Alors, quel que soit le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| \cdot |g(x)| + |f(y)| \cdot |g(x) - g(y)| \\ &\leq (M_g K_f + M_f K_g)|x - y|. \end{aligned}$$

Leur produit fg est bien une application lipschitzienne et bornée.

✱ Si $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x$, alors f et g sont lipschitziennes. Mais $(fg)'(x) = \sin x + x \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: en particulier, $(fg)'(k\pi) = k\pi$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier k tend vers $+\infty$, donc fg n'est pas lipschitzienne (toujours d'après [3.]).

6. D'après la propriété de Lipschitz, $|f(x) - f(0)| \leq K_f|x - 0|$ et par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leq K_f|x| + |f(0)|.$$

• Cet encadrement montre que $f(x) = \mathcal{O}(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.

7. Soient $x < y$ et $N = \lfloor y - x \rfloor$, de telle sorte que $0 < \delta = (y - x)/(N + 1) < 1$. On pose alors $x_k = x + k\delta$ pour tout entier $0 \leq k \leq N + 1$. (En particulier, $x_0 = x$ et $x_{N+1} = y$.) Comme $0 \leq x_{k+1} - x_k \leq 1$ pour tout $0 \leq k \leq N$, on déduit de l'hypothèse de l'énoncé et de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^N f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &\leq M \sum_{k=0}^N \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\geq 0} = M(y - x) \\ &\leq M|y - x|. \end{aligned}$$

Cela prouve que f est lipschitzienne et admet M pour constante de Lipschitz.

REMARQUE.— Si f est dérivable, l'hypothèse de l'énoncé permet de démontrer que la dérivée f' est bornée par M (à vérifier) pour conclure en invoquant une nouvelle fois [3.]

Partie B. Résolution d'un cas particulier

8. La propriété $F(x) = \lambda^n F(x + na)$ est évidente pour $n = 0$ (car $\lambda^0 = 1$) et pour $n = 1$ par (1). Supposons-la démontrée pour un entier $n \geq 1$. Alors, en appliquant (1) avec $x \leftarrow x + na$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^n F(x + na) \\ &= \lambda^n [\lambda F((x + na) + a)] \\ &= \lambda^{n+1} F[x + (n + 1)a]. \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, la propriété est établie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Comme $\lambda \neq 0$, l'équation (1) peut aussi s'écrire

$$F(x) = F[(x - a) + a] = \lambda^{-1} F(x - a).$$

Autrement dit, ce qui vaut pour le couple (λ, a) vaut également pour le couple $(\lambda^{-1}, -a)$. On peut alors déduire de ce qui précède que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F(x) = (\lambda^{-1})^n F[x + n(-a)] = \lambda^{-n} F(x - na)$$

et finalement que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad F(x) = \lambda^n F(x + na).$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $a \neq 0$, alors $x + na$ tend vers l'infini lorsque n tend $+\infty$, donc $F(x + na) = \mathcal{O}(n)$ d'après [6.] et donc

$$\lambda^n F(x + na) = \mathcal{O}(n\lambda^n).$$

Or λ^n tend vers 0 (puisque $|\lambda| < 1$) et par croissances comparées, il en va de même pour $n\lambda^n$. Donc $\lambda^n F(x + na)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On déduit alors de [8.] que $F(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. On reprend la même méthode en faisant cette fois tendre n vers $-\infty$. On a encore

$$F(x) = \lambda^n F(x + na) = \mathcal{O}(n\lambda^n)$$

et, par croissances comparées, cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $-\infty$ puisque $|\lambda| > 1$.

Donc $F(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ lorsque $|\lambda| \neq 1$.

11. a. L'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = f(x + a)$$

est l'ensemble des fonctions lipschitziennes et périodiques, de période a .

11. b. La fonction $F = [x \mapsto \cos(2\pi x/a)]$ est lipschitzienne et de période a .

12. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) = (-1)^2 F(x + 2a) = F(x + 2a)$$

d'après [8.], donc F est périodique et admet $2a$ pour période.

12. b. La fonction $F = [x \mapsto \cos(\pi x/a)]$ est lipschitzienne et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -F(x + a) = -\cos\left(\frac{\pi x}{a} + \pi\right) = \cos\frac{\pi x}{a} = F(x).$$

12. c. Les solutions de (1) admettent toutes a pour *anti*-période, ce qui est bien le cas de l'exemple précédent, mais qui n'est pas le cas de toutes les fonctions de période $2a$.

La fonction affine par morceaux et continue φ qui passe par les points de coordonnées $(0, 0)$, $(3a/2, 1)$ et $(2a, 0)$, prolongée en une fonction de période $2a$, n'est pas une solution de (1) car $\varphi(a) \neq -\varphi(0)$. (Faites une figure!)

Partie C. Cas où $|\lambda| < 1$

13. On va démontrer (3) par récurrence sur n , en remarquant que, pour $n = 1$, cette propriété n'est autre que l'hypothèse (1). Supposons donc cette propriété pour un entier $n \geq 1$. Alors, d'après (1) (avec $x \leftarrow x + na$),

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} F[x + (n+1)a] + \sum_{k=0}^{(n+1)-1} \lambda^k f(x + ka) \\ &= \lambda^n (\lambda F[(x + na) + a]) + \sum_{k=0}^n \lambda^k f(x + ka) \\ &= \lambda^n (F(x + na) - f(x + na)) + \sum_{k=0}^n \lambda^k f(x + ka) \\ &= \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

La propriété (3) est ainsi établie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

14. Comme $a \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la variable $(x + na)$ tend vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$. On déduit alors de [6.] que $\lambda^n f(x + na) = \mathcal{O}(n\lambda^n)$. Or $|\lambda| < 1$, donc la série $\sum n\lambda^n$ converge absolument (puisque $n\lambda^n = o(\mu^n)$ pour tout $|\lambda| < \mu < 1$). Par comparaison, la série $\sum \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente.

15. D'après la question précédente, l'application φ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Démontrons qu'elle est lipschitzienne.

La différence de deux séries absolument convergentes est absolument convergente et par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (f(x + na) - f(y + na)) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n |f(x + na) - f(y + na)|. \end{aligned}$$

Mais f est lipschitzienne : quels que soient le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et l'entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |f(x + na) - f(y + na)| \leq K_f |x - y|$$

et comme $|\lambda| < 1$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K_f |x - y| \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n = \frac{K_f}{1 - |\lambda|} |x - y|$$

Cet encadrement démontre que φ est lipschitzienne.

✱ Vérifions ensuite que φ est bien une solution de (1).

$$\begin{aligned} & \varphi(x) - \lambda \varphi(x+a) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} f[(x+a)+na] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) \\ &= \lambda^0 f(x+0 \times a) = f(x) \end{aligned}$$

✱ Vérifions enfin que la solution de (1) est unique. S'il existe deux solutions : φ_1 et φ_2 , alors $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ est lipschitzienne (par [1.]) et solution de (1) avec $f(x) \equiv 0$. D'après [9.], la fonction ψ est identiquement nulle et par suite $\varphi_1 = \varphi_2$.

✱ Ainsi, la fonction φ est l'unique solution de (1).

REMARQUE.— Une solution de (1) doit vérifier la formule (3) et comme une telle fonction est lipschitzienne, il faut en outre que $\lambda^n f(x+na)$ tende vers 0 : la formule qui définit φ est donc bien *la seule possible*.

16. D'après [15.], $F_1(x) = 1/(1-\lambda)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (somme d'une série géométrique).

17. D'après le cours, si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S , alors la série $\sum \Re(u_n)$ est convergente et sa somme est la partie réelle de S .

D'après [15.], l'expression de l'unique solution lipschitzienne de (1) associée à $\cos$ est

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x+na) &= \Re \left(e^{ix} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda e^{ia})^n \right) \\ &= \Re \left(e^{ix} \frac{1}{1 - \lambda e^{ia}} \right) \\ &= \Re \left(e^{ix} \frac{1 - \lambda e^{-ia}}{(1 - \lambda \cos a)^2 + (\lambda \sin a)^2} \right) \\ &= \frac{\cos x - \lambda \cos(x-a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2} = F_2(x, \lambda). \end{aligned}$$

Partie D. Un cas particulier avec $\lambda = -1$

18. a. Comme f est décroissante et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, elle est positive sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est négative.

REMARQUE.— Si la fonction f était deux fois dérivable (hypothèse que ne fait pas l'énoncé), alors sa dérivée seconde serait positive (convexité).

18. b. Comme f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, mais pas constante, alors il existe un réel x_0 tel que $f'(x_0) \neq 0$. Alors par convexité de f , on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Comme $f'(x_0) < 0$ par décroissance de f , le second membre tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et, par comparaison, f tend vers $+\infty$ au voisinage de $-\infty$.

REMARQUE.— Une figure peut aider.

18. c. La fonction f étant convexe, son graphe est au-dessus de la tangente au point d'abscisse v . En particulier,

$$f(u) \geq f(v) + (u - v)f'(v).$$

De même, son graphe est au-dessus de la tangente au point d'abscisse $(u+1)$ et en particulier,

$$f(v+1) \geq f(u+1) + [(v+1) - (u+1)]f'(u+1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &\geq (u - v)f'(v) \\ \text{et que } (u - v)f'(u+1) &\geq f(u+1) - f(v+1). \end{aligned}$$

Mais la fonction f' est croissante et négative et $v \leq u+1$, donc

$$0 \geq f'(u+1) \geq f'(v)$$

et comme $(u - v) \leq 0$, alors

$$0 \leq (u - v)f'(u + 1) \leq (u - v)f'(v)$$

d'où finalement

$$f(u) - f(v) \geq f(u + 1) - f(v + 1).$$

REMARQUE.— Là encore, une figure peut aider. Faites des figures!

18. d. L'expression $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ convient (mais on peut se contenter de tracer son graphe).

REMARQUE.— La fonction $[x \mapsto e^{-x}]$ ne convient pas, car elle n'est pas lipschitzienne.

19. La série de terme général $u_n = (-1)^n f(x + n)$ est alternée car f est une fonction positive. Par hypothèse, la fonction f est décroissante et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc la suite de terme général $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n f(x + n)$ est convergente.

20. a. Lorsqu'une série alternée vérifie les hypothèses du critère spécial, on sait que sa somme est bornée par la valeur absolue du premier terme. Ici, le premier terme est $(-1)^0 f(x + 0) = f(x)$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(x)| \leq |f(x)|.$$

Comme f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, alors φ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

REMARQUE.— Le critère spécial nous dit également que $\varphi(x)$ est du signe de $f(x)$, c'est-à-dire positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

20. b. Soient x et y , deux réels tels que $0 \leq x - y \leq 1$. Alors

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [f(x + n) - f(y + n)].$$

Comme f est décroissante et que $y \leq x$, on reconnaît la somme d'une série alternée. Son terme général tend vers 0 puisque $x + n$ et $y + n$ tendent vers $+\infty$ et que f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u = y + n$ et $v = x + n$, de telle sorte que $u \leq v \leq u + 1$ et d'après [18.c.],

$$f(y + n) - f(x + n) \geq f(y + n + 1) - f(x + n + 1)$$

c'est-à-dire

$$|f(x + n) - f(y + n)| \geq |f(x + (n + 1)) - f(y + (n + 1))|.$$

La valeur absolue du terme général est donc une fonction décroissante de n , ce qui permet d'invoquer le critère spécial des séries alternées. En particulier, la somme de cette série est bornée par la valeur absolue de son premier terme :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq K_f |x - y|$$

puisque $f \in \mathcal{L}$. La propriété de Lipschitz est donc établie pour φ d'après [7.]

21. D'après ce qui précède, la fonction φ est lipschitzienne et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \varphi(x + 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x + n) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x + 1 + n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x + n) - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} f(x + n + 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x + n) - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(x + n) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc la fonction φ est bien une solution de (1) pour $(\lambda, a, f) = (-1, 1, f)$.

• Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de (1) pour

$$(\lambda, a, f) = (-1, 1, f),$$

alors leur différence $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ est une solution de (1) pour

$$(\lambda, a, f) = (-1, 1, 0)$$

et d'après [12.], la fonction ψ est périodique, de période 2. Si φ_1 et φ_2 tendent toutes deux vers 0, alors ψ est une fonction périodique qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, c'est donc la fonction nulle et par suite, $\varphi_1 = \varphi_2$.

La fonction φ est donc l'unique solution de (1) qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.