Problème de Mathématiques

Référence pb1602 — Version du 15 octobre 2025

Dans tout le problème, on note H_n, le n-ième **nombre harmonique** :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

La fonction ζ (*dzèta*) de Riemann est définie par

$$\forall\, x > 1, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce qui suit permet d'établir une formule découverte par Euler :

$$\forall\, r \geqslant 3, \quad 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k).$$

Partie A. Représentation intégrale de sommes

1. a. Démontrer que la série de terme général

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$$

est convergente.

1. b. En déduire qu'il existe une constante réelle A telle que

$$H_n = \ell n\, n + A + o(1)$$

puis que $H_n \sim \ell n\, n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{N}$ la somme

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$$

est-elle définie ?

3. On *rappelle* que

$$\ell n(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \quad \text{et que} \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$. En déduire que

$$\forall\, t \in \left]-1, 1\right[, \quad \frac{-\ell n(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

4. Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et tout $0 < \varepsilon < 1$, on pose

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p\, \ell n^q\, t\, dt \quad \text{et} \quad I^{\varepsilon}_{p,q} = \int_{\varepsilon}^1 t^p\, \ell n^q\, t\, dt.$$

4. a. Démontrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

4. b. Soit $0 < \varepsilon < 1$, fixé. Démontrer que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, q \in \mathbb{N}^*, \quad I^{\varepsilon}_{p,q} = \frac{-q}{p+1} I^{\varepsilon}_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}\, \ell n^q\, \varepsilon}{p+1}.$$

4. c. En déduire que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, q \in \mathbb{N}^*, \quad I_{p,q} = \frac{-q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

4. d. En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série

$$\sum \frac{a_n}{(n+1)^r}$$

soit absolument convergente.

5. a. Démontrer que la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$.

Le cours sur les séries entières montre alors que la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est *continue* sur $\left]-1, 1\right[$.

5. b. Démontrer que

$$\int_0^1 \ell n^{r-1}\, t f(t)\, dt = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.$$

6. Soit $r \geqslant 2$.

6. a. Déduire des questions précédentes que

$$S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 \ell n^{r-1}\, t \frac{\ell n(1-t)}{1-t}\, dt.$$

6. b. Établir alors que

$$S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{\ell n^{r-2}\, t\, \ell n^2(1-t)}{t}\, dt.$$

6. c. En déduire que

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ell n^2\, t}{1-t}\, dt$$

puis exprimer S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

Partie B. La fonction β

7. On présente ici rapidement la fonction Γ définie par

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

On *admettra* que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]0, +\infty\right[$, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie la relation fonctionnelle :

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1}$$

7. a. Vérifier que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$\left[t \mapsto t^{x-1} e^{-t}\right]$$

est intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$ (de telle sorte que Γ est bien définie sur cet intervalle).

7. b. Soient x et α, deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t}\, dt$$

et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et de α^x.

8. On établit ici quelques propriétés de la fonction β définie par

$$\forall\, x, y > 0, \quad \beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

8. a. Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ quels que soient $x > 0$ et $y > 0$.

8. b. Démontrer que

$$\forall\, x, y > 0, \quad \beta(x, y) = \beta(y, x).$$

8. c. Démontrer que
$$\forall\, x, y > 0, \quad \beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\, \beta(x, y).$$

8. d. En déduire que
$$\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\, \beta(x, y)$$
quels que soient $x > 0$ et $y > 0$.

9. Nous allons maintenant établir la relation
$$\forall\, x, y > 0, \quad \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{2}$$

9. a. Expliquer pourquoi il suffit de démontrer (2) pour $x > 1$ et $y > 1$. *Dans la suite de cette question, on suppose que* $x > 1$ *et que* $y > 1$.

9. b. Démontrer que
$$\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du.$$
☞ *On pourra utiliser le changement de variable* $t = \frac{u}{1+u}$.

9. c. On note $F_{x,y}$, la primitive de $\left[t \mapsto e^{-t} t^{x+y-1}\right]$ qui s'annule en 0. Justifier l'existence de $F_{x,y}$ et démontrer que
$$\forall\, t \geqslant 0, \quad F_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y).$$

9. d. Démontrer que la fonction G définie par
$$G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, F_{x,y}\big((1+u)a\big)\, du$$
est continue sur $\mathbb{R}_+$.

9. e. Démontrer que G tend vers $\Gamma(x+y)\beta(x, y)$ au voisinage de $+\infty$.

9. f. Démontrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[c, d] \subset \,]0, +\infty[$, puis que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

9. g. Pour $a > 0$, exprimer $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, de e^{-a} et de a^{y-1}.

9. h. Déduire la relation (2) de ce qui précède.

Partie C. La fonction F

La fonction F (lire : *digamma*) est la dérivée de $\ell n(\Gamma)$:
$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

10. Démontrer que
$$\forall\, x > 0, \quad F(x+1) - F(x) = \frac{1}{x}.$$

11. a. Déduire de la relation (2) que la dérivée partielle $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et que
$$\forall\, x, y > 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)\big[F(y) - F(x+y)\big].$$

11. b. Soit $x > 0$, fixé. Quel est le sens de variation de la fonction $[y \mapsto \beta(x, y)]$?

11. c. Démontrer que F est croissante sur $]0, +\infty[$.

12. a. Démontrer que
$$F(1+x) - F(1) = F(n+x+1) - F(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$
pour tout réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$.

12. b. Soient $n \geqslant 2$, un entier et $x > -1$, un réel. On pose $p = \lfloor x \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Démontrer que
$$\frac{-1}{n} \leqslant F(n+x+1) - F(n+1) \leqslant H_{n+p} - H_n \leqslant \frac{p}{n}.$$

12. c. En déduire que, pour tout réel $x > -1$,

$$F(1+x) = F(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

13. On note g, la fonction définie par

$$\forall\, x \in [-1, +\infty[, \quad g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

13. a. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1, +\infty[$. On exprimera $g^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k+1)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.
13. b. Démontrer que, pour tout entier n,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leqslant \zeta(2)\, |x|^{n+1}.$$

Que peut-on en déduire ?
13. c. Démontrer que

$$F(1+x) = F(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

pour tout réel $x \in]-1, 1[$.

Extraits du rapport du jury

Les correcteurs ont, comme toujours, accordé une grande importance à la rédaction et à la clarté des raisonnements.

La question **[1.a.]** n'est traitée correctement que par la moitié des candidats.

La question **[5.b.]** n'est correctement traitée que par une minorité de candidats.

Au **[6.a.]** et **[6.b.]**, les justifications sont le plus souvent inexistantes. Rappelons que, lorsque le résultat est donné, l'argumentation doit être d'autant plus rigoureuse. L'expression de S_2 en fonction de $\zeta(3)$ est rarement montrée.

Le calcul de **[8.c.]** n'aboutit que dans peu de copies.

Pour **[9.a.]**, un discours peu structuré ne peut tenir lieu de preuve.

Dans **[9.b.]**, le changement de variable est donné ; il faut donc justifier les calculs.

Les questions **[9.d.]**, **[9.e.]** et **[9.f.]** ne sont correctement traitées que dans moins d'un quart des copies.

La question **[13.a.]** n'est que rarement bien traitée. La preuve de **[13.b.]** est souvent partielle.

❧ **Conseils aux futurs candidats**

Les théorèmes doivent être connus et utilisés en vérifiant précisément les hypothèses.

Les démonstrations et les calculs doivent figurer sur les copies et être d'autant plus détaillés que le résultat est donné.

Rappelons que la présentation et la rédaction sont évaluées. Le manque de soin est systématiquement sanctionné.

Il est par ailleurs indispensable de mettre en valeur les résultats, par exemple en les encadrant.

Solution ❀ Autour des sommes d'Euler

Partie A. Représentation intégrale de sommes

1. a. La fonction $[t \mapsto 1/t]$ est continue sur $]0, +\infty[$, mais pas intégrable au voisinage de 0. Par conséquent, le réel a_n est bien défini si, et seulement si, l'entier n est au moins égal à 2.

De plus,

$$a_n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} + \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)$$

donc $a_n = \mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, on en déduit que $\sum a_n$ est absolument convergente (et donc convergente).

1. b. Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} a_k &= \sum_{k=2}^{n} \big(\frac{1}{k} - \ln k + \ln(k-1)\big)\\ &= (H_n - 1) + (-\ln n + \ln 1)\\ &= H_n - \ln n - 1.\end{aligned}$$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, la suite de ses sommes partielles est convergente. En notant S, la limite de cette suite, on déduit du calcul précédent que

$$H_n - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S + 1$$

c'est-à-dire $H_n - \ln n = S + 1 + o(1)$ ou encore, en posant $A = S + 1$,

$$H_n = \ln n + A + o(1).$$

En particulier, comme $\ln n$ tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln n + o(\ln n)$$

et donc $H_n \sim \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Par **[1.b.]** :

— Si $r = 0$, alors H_n tend vers $+\infty$ et la série diverge grossièrement.

— Si $r = 1$, alors

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{H_n}{(n+1)}$$

et comme la série (harmonique ou presque) $\sum \frac{1}{n+1}$ est divergente, alors la série $\sum \frac{H_n}{n+1}$ est divergente (comparaison des séries de termes généraux *positifs*).

— Si $r \geqslant 2$, alors

$$\frac{H_n}{(n+1)^r} \sim \frac{\ln n}{n^r} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^{r-1/2}} = o\Big(\frac{1}{n^{r-1/2}}\Big)$$

et comme $r - 1/2 \geqslant 3/2 > 1$, alors la série $\sum \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est absolument convergente.

Bref, la somme S_r est définie (en tant que somme d'une série convergente) si, et seulement si, l'entier r est supérieur à 2.

Remarque.— En tant que somme d'une famille dénombrable de réels *positifs*, la somme S_r a un sens pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, mais elle est égale à $+\infty$ pour $r = 0$ et $r = 1$ et ne prend une valeur *réelle* que pour $r \geqslant 2$.

3. Pour $|t| < 1$, la série *géométrique* de terme général $v_n = t^n$ est *absolument* convergente. Comme $t^n/n = o(t^n)$, on en déduit que la série de terme général $u_n = t^n/n$ est elle aussi *absolument* convergente.

Le terme général du produit de Cauchy de ces deux séries est défini par

$$\begin{aligned}c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} \cdot t^{n-k} = H_n t^n,\end{aligned}$$

puisque $u_0 = 0$ (la série $\sum u_n$ commençant avec le terme u_1).

Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergent et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\Big)$$

donc

$$\forall\, t \in \left]-1,1\right[,\quad \frac{-\ell n(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

4. a. Quels que soient les entiers naturels p et q, la fonction

$$f_{p,q} = [t \mapsto t^p \,\ell n^q\, t]$$

est continue sur l'intervalle $\left]0,1\right]$.

Si $p \geqslant 1$, cette fonction tend vers 0 au voisinage de 0 et est donc intégrable sur $\left]0,1\right]$.

Si $p = 0$, alors on sait que

$$\forall\, q \in \mathbb{N},\quad \ell n^q\, t = o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$$

au voisinage de 0 et comme $1/\sqrt{t}$ est intégrable au voisinage de 0, alors $f_{p,q}$ est intégrable sur $\left]0,1\right]$.

Ainsi, quels que soient p et q dans $\mathbb{N}$, l'intégrale $I_{p,q}$ existe au sens propre (en tant qu'intégrale d'une fonction intégrable).

4. b. Sur le segment $[\varepsilon, 1]$, les fonctions $[t \mapsto t^p]$ et $[t \mapsto \ell n^q\, t]$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. On peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 t^p \,\ell n^q\, t\, dt &= \Big[\frac{t^{p+1}}{p+1}\;\ell n^q\, t\Big]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{p+1}}{p+1}\,\frac{q\,\ell n^{q-1}\, t}{t}\, dt \\ &= \frac{-\varepsilon^{p+1}\,\ell n^q\,\varepsilon}{p+1} - \frac{q}{p+1}\int_\varepsilon^1 t^p\,\ell n^{q-1}\, t\, dt\end{aligned}$$

CQFD.

4. c. Comme $I_{p,q}$ est une intégrale généralisée convergente, alors

$$\forall\, p, q \in \mathbb{N},\quad I_{p,q} = \lim_{\varepsilon \to 0} I_{p,q}^\varepsilon.$$

De plus, comme $p + 1 \geqslant 1$,

$$\varepsilon^{p+1}\,\ell n^q\,\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Les trois termes de l'égalité démontrée au **[4.b.]** admettent donc une limite finie lorsque ε tend vers 0. On peut donc passer à la limite dans cette égalité et on obtient :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, q \in \mathbb{N}^*,\quad I_{p,q} = \frac{-q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

4. d. On peut deviner (au brouillon *exclusivement*) que

$$\forall\, p, q \in \mathbb{N},\quad I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

On *doit* la démontrer par récurrence sur sa copie, en faisant une hypothèse de récurrence convenable comme par exemple : *Il existe un entier* $q \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall p \in \mathbb{N},\quad I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

L'initialisation ($q = 0$) est évidente. L'hérédité découle bien entendu de la relation de récurrence établie au **[4.c.]**

5. a. Fixons x tel que $|x| < 1$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on sait que n^r est un infiniment grand (pour $r \geqslant 1$) et que x^n est un infiniment petit (puisque $|x| < 1$) et, par croissances comparées, $n^r x^n$ tend vers 0. Par conséquent,

$$a_n x^n = (n+1)^r x^n \cdot \frac{a_n}{(n+1)^r} = o\Big(\frac{a_n}{(n+1)^r}\Big).$$

Comme la série $\sum \frac{a_n}{(n+1)^r}$ est *absolument* convergente par hypothèse, on en déduit que la série $\sum a_n x^n$ est aussi absolument convergente.

REMARQUE.— En termes de série entières, cela signifie que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1.

5. b. Nous allons appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

➞ D'après **[4.a.]**, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n définie par

$$\forall\, t \in]0,1[, \quad u_n(t) = a_n t^n \ell n^{r-1}\, t$$

est continue et intégrable sur $]0,1[$.

➞ D'après **[5.a.]**, la fonction Φ définie par

$$\forall\, t \in]0,1[, \quad \Phi(t) = \ell n^{r-1}\, t f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \ell n^{r-1}\, t$$

est continue sur $]0,1[$. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme Φ est continue.

➞ Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big|u_n(t)\big|\,dt &= |a_n| \int_0^1 t^n(-\ell n\, t)^{r-1}\,dt\\ &= |a_n| \frac{(r-1)!}{(n+1)^(r-1)+1}\\ &= (r-1)! \cdot \frac{|a_n|}{(n+1)^r}\end{aligned}$$

ce qui prouve que la série de terme général

$$\int_0^1 \big|u_n(t)\big|\,dt$$

est convergente.

❧ En conséquence, la somme Φ est bien intégrable sur $]0,1[$, la série de terme général

$$\int_0^1 u_n(t)\,dt = (-1)^{r-1}(r-1)! \cdot \frac{a_n}{(n+1)^r}$$

est absolument convergente et

$$\int_0^1 \Phi(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,dt$$

CQFD.

6. a. Posons $a_n = H_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et $a_0 = 0$. Par **[2.]**, si $r \geqslant 2$, alors la propriété **[5.b.]** est vraie. On déduit alors de **[3.]** que

$$S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 \ell n^{r-1}\, t \frac{\ell n(1-t)}{1-t}\,dt.$$

6. b. Sur chaque segment $[x,y] \subset]0,1[$, les fonctions f et g définies par

$$f(t) = \ell n^{r-1}\, t \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{-1}{2} \ell n^2(1-t)$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ et leurs dérivées ont pour expressions :

$$f'(t) = (r-1)\frac{\ell n^{r-2}\, t}{t} \quad \text{et} \quad g'(t) = \frac{\ell n(1-t)}{1-t}.$$

Par **[6.a.]** et **[5.b.]**, le produit fg' est intégrable sur $]0,1[$, donc

$$\int_0^1 \ell n^{r-1}\, t \frac{\ell n(1-t)}{1-t}\,dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \int_x^y f(t)g'(t)\,dt.$$

En intégrant par parties,

$$\int_x^y f(t)g'(t)\,dt = \frac{-1}{2}\Big[\frac{\ell n^{r-1} t\,\ell n^2(1-t)}{t}\Big]_x^y + \frac{r-1}{2}\int_x^y \frac{\ell n^{r-2} t\,\ell n^2(1-t)}{t}\,dt.$$

— Le produit $f'g$ est évidemment continu sur $]0,1[$.
— Au voisinage de 0,

$$f'(t)g(t) = \mathcal{O}\Big(\frac{\ell n^{r-2} t\cdot t^2}{t}\Big) = \mathcal{O}\big(t\,\ell n^{r-2} t\big)$$

donc $f'g$ tend vers 0.
— Au voisinage de 1, en posant $t = 1-h$,

$$f'(t)g(t) = \mathcal{O}\big(\ell n^{r-2}(1-h)\,\ell n^2 h\big) = \mathcal{O}(\ell n^2 h)$$

et $[h \mapsto \ell n^2 h]$ est intégrable au voisinage de 0 par **[4.a.]**
Par conséquent, le produit $f'g$ est intégrable sur $]0,1[$.
Par des arguments analogues,

$$\frac{\ell n^{r-1} x\,\ell n^2(1-x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

et, puisque $r-1 \geqslant 1$,

$$\frac{\ell n^{r-1} y\,\ell n^2(1-y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

On peut donc passer à la limite et obtenir :

$$\int_0^1 \ell n^{r-1} t\frac{\ell n(1-t)}{1-t}\,dt = \frac{r-1}{2}\int_0^1 \frac{\ell n^{r-2} t\,\ell n^2(1-t)}{t}\,dt,$$

ce qui donne alors immédiatement l'égalité voulue.
6. c. D'après **[6.b.]** pour $r = 2$,

$$S_r = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ell n^2(1-t)}{t}\,dt.$$

Avec le changement de variable *affine* $u = 1-t$, on en déduit que

$$S_r = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ell n^2 u}{1-u}\,du.$$

(Ce qui est bien le résultat attendu puisque, faut-il le rappeler ?, la variable d'intégration est *muette*.)
❧ Nous allons appliquer le résultat du **[5.b.]** à la fonction f définie par

$$\forall\, t \in\,]0,1[, \quad f(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1\cdot t^n$$

avec $r-1 = 2$, c'est-à-dire $r = 3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose donc $a_n = 1$. Il est clair que la série de terme général

$$\frac{a_n}{(n+1)^r} = \frac{1}{(n+1)^3} \sim \frac{1}{n^3}$$

est absolument convergente. Par conséquent, d'après **[5.b.]**,

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \ell n^2 u\cdot\frac{1}{1-u}\,du = \frac{(-1)^{3-1}(3-1)!}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(n+1)^3} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^3}$$

c'est-à-dire $S_2 = \zeta(3)$.

Partie B. La fonction β

7. a. Le réel $x > 0$ est *fixé*.

La fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = t^{x-1}e^{-t}$$

est continue sur $]0, 1[$.

Lorsque t tend vers 0, on a $f(t) \sim t^{x-1}$ et comme $x > 0$, la fonction f est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f(t) = t^{x-1}e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2}),$$

donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc bien intégrable sur $]0, +\infty[$.

7. b. Comme $\alpha > 0$, on peut effectuer le changement de variable *affine* $u = \varphi(t) = \alpha t$. La fonction φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Comme

$$f(u) = u^{x-1}e^{-u}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors

$$(f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) = \alpha^{x-1}t^{x-1}e^{-\alpha t} \cdot \alpha = \alpha^x \cdot t^{x-1}e^{-\alpha t}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \alpha^x \cdot t^{x-1}e^{-\alpha t}\, dt = \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\, du,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\, dt = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}.$$

8. a. Soient $x > 0$ et $y > 0$, *fixés*. La fonction f définie par

$$\forall\, t \in\,]0, 1[, \quad f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

est continue sur $]0, 1[$. Au voisinage de $t = 0^+$, on a

$$f(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

et au voisinage de $t = 1^-$, on a

$$f(t) \sim (1-t)^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-y}}.$$

Comme x et y sont *strictement* positifs, la fonction f est donc intégrable au voisinage de 0 et au voisinage de 1, donc intégrable sur $]0, 1[$, ce qui prouve que $\beta(x, y)$ est bien définie pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$.

8. b. Le changement de variable *affine* $u = 1 - t$ donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt &= \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-1)\, du \\ &= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\, du\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

8. c. Comme $x > 0$ et $y > 0$, alors $x + 1 > 0$ et $y + 1 > 0$. Par **[8.a.]**,

$$\beta(x+1, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\, dt = \lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^{1-\alpha} t^x(1-t)^{y-1}\, dt$$

et de même

$$\beta(x, y+1) = \lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^{1-\alpha} t^{x-1}(1-t)^y\, dt.$$

Les fonctions $[t \mapsto t^x]$ et $[t \mapsto (1-t)^y]$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ (mais pas sur le segment $[0,1]$ si $x<1$ ou $y<1$...), on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{1-\alpha} t^x(1-t)^{y-1}\,dt = \Big[\frac{t^x(1-t)^y}{-}y\Big]_\alpha^{1-\alpha}\\ + \frac{x}{y}\int_\alpha^{1-\alpha} t^{x-1}(1-t)^y\,dt.\end{aligned}$$

L'expression $t^x(1-t)^y$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 (car $x>0$) et lorsque t tend vers 1 (car $y>0$), donc

$$y\beta(x+1,y) = x\beta(x,y+1). \tag{3}$$

De plus,

$$\begin{aligned}t^{x-1}(1-t)^y &= t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\\ &= t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}\end{aligned}$$

et comme ces trois fonctions de t sont intégrables sur $]0,1[$ (**[8.a.]**), on en déduit par linéarité de l'intégrale que

$$\beta(x,y+1) = \beta(x,y) - \beta(x+1,y) \tag{4}$$

et finalement, en combinant (3) et (4) que

$$\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\,\beta(x,y).$$

8. d. On déduit de ce qui précède que :

$$\begin{aligned}\beta(x+1,y+1) &= \frac{x}{x+(y+1)}\,\beta(x,y+1) && \text{par } \textbf{[8.c.]}\\ &= \frac{x}{x+y+1}\,\beta(y+1,x) && \text{par } \textbf{[8.b.]}\\ &= \frac{x}{x+y+1}\cdot\frac{y}{y+x}\,\beta(y,x) && \text{par } \textbf{[8.c.]}\\ &= \frac{xy}{(x+y+1)(x+y)}\,\beta(x,y) && \text{par } \textbf{[8.b.]}\end{aligned}$$

9. a. Supposons que (2) soit vraie pour $x>1$ et $y>1$.
Choisissons $u>0$ et $v>0$ et posons $x=u+1>1$ et $y=v+1>1$. Alors, d'après (2),

$$\begin{aligned}\beta(u+1,v+1) &= \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(v+1)}{\Gamma\big((u+1)+(v+1)\big)}\\ &= \frac{u\Gamma(u)\cdot v\Gamma(v)}{(u+v+1)\Gamma(u+v+1)} && \text{par (1)}\\ &= \frac{uv}{(u+v+1)(u+v)}\cdot\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} && \text{par (1)}\end{aligned}$$

et comme, par **[8.d.]**,

$$\frac{\beta(u,v)}{\beta(u+1,v+1)} = \frac{(u+v)(u+v+1)}{uv},$$

alors

$$\beta(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Cela prouve que (2) est aussi vraie pour $x>0$ et $y>0$.

9. b. Considérons la fonction φ définie par

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad \varphi(u) = \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}.$$

Il est clair que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Elle tend vers 0 au voisinage de 0 et vers 1 au voisinage de $+\infty$ donc, d'après le théorème d'inversion, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.

Par ailleurs, d'après **[1.a.]**, la fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

est intégrable sur $]0,1[$.

D'après le théorème de changement de variable, l'expression

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)(u)\cdot\varphi'(u) &= \Big(\frac{u}{1+u}\Big)^{x-1}\Big(\frac{1}{1+u}\Big)^{y-1}\frac{1}{(1+u)^2}\\ &= u^{x-1}\Big(\frac{1}{1+u}\Big)^{x+y}\end{aligned}$$

est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^{+\infty}(f\circ\varphi)(u)\cdot\varphi'(u)\,du\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du.\end{aligned}$$

9. c. Comme $x > 1$ et $y > 1$, la fonction

$$f = \big[u \mapsto e^{-u}u^{x+y-1}\big]$$

est continue sur l'intervalle *fermé* $[0,+\infty[$. D'après le Théorème fondamental, elle admet donc une, et une seule, primitive sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0 et cette primitive a pour expression :

$$\forall\, t \in [0,+\infty[, \quad F_{x,y}(t) = \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}\,du. \tag{5}$$

REMARQUE.— Si on avait seulement supposé $x > 0$ et $y > 0$, la fonction $F_{x,y}$ serait une primitive de f (et donc de classe $\mathscr{C}^1$) sur l'intervalle *ouvert* $]0,+\infty[$ mais serait seulement continue sur l'intervalle *fermé* $[0,+\infty[$. Ce serait donc *la primitive de* f *qui tend vers* 0 *au voisinage de* 0.

❧ Comme la fonction f est positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ (d'après **[7.a.]**), alors

$$F_{x,y}(0) = 0 \leqslant \int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}\,du \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x+y-1}\,du$$

par positivité de l'intégrale, c'est-à-dire

$$\forall\, t \in [0,+\infty[, \quad 0 \leqslant F_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y).$$

9. d. Les réels $x > 1$ et $y > 1$ étant fixés, on considère la fonction φ définie par

$$\varphi(a,u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}\big((1+u)a\big)$$

pour $a \in \Omega = \mathbb{R}_+$ et $u \in I = \mathbb{R}_+$.

➞ Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Comme $K_1 = 1+u > 0$, la fonction affine $[a \mapsto K_1 a]$ va de $\Omega = \mathbb{R}_+$ dans Ω et comme $F_{x,y}$ est continue (et même $\mathscr{C}^1$) sur Ω, alors la fonction

$$[a \mapsto \varphi(a,u) = K_2F_{x,y}(K_1 a)]$$

est continue sur Ω.

➞ Soit $a \in \Omega$. La fonction $[u \mapsto F_{x,y}(a+au)]$ est continue sur I, donc la fonction $[u \mapsto \varphi(a,u)]$ est continue sur I (continue en 0 *aussi* puisque $x > 1$).

➞ D'après **[9.c.]**, pour tout $(a,u) \in \Omega \times I$,

$$0 \leqslant \varphi(a,u) \leqslant \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y). \tag{6}$$

Le majorant de (6), considéré comme une fonction de u, est intégrable sur I d'après **[9.b.]**, ce qui prouve que la fonction $[u \mapsto \varphi(a,u)]$ est intégrable sur I.

De plus, le majorant de (6) est indépendant de a : l'hypothèse de domination est donc vérifiée sur Ω.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction G est continue sur Ω.

9. e. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite positive qui tend vers $+\infty$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie par

$$\forall\, u \in I = \mathbb{R}_+, \quad f_n(u) = \varphi(a_n, u)$$

(la fonction φ a été définie au **[9.d.]**).

➙ On a démontré au **[9.d.]** que les fonctions f_n sont intégrables sur I.

➙ Par (5) et la définition de $\Gamma(x+y)$ comme intégrale généralisée, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I :

$$\forall\, u \in I, \quad f_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$$

et par (6), la convergence est dominée.

D'après le théorème de convergence dominée et **[9.b.]**,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} &\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)\,du \\ &= \beta(x,y)\Gamma(x+y).\end{aligned}$$

Comme la *suite* de terme général $G(a_n)$ converge vers $\beta(x,y)\Gamma(x+y)$ pour *toute* suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, alors la *fonction* G tend vers $\beta(x,y)\Gamma(x+y)$ au voisinage de $+\infty$.

9. f. On reprend la fonction φ du **[9.d.]** avec les intervalles $\Omega = [c,d]$ et $I = [0,+\infty[$.

➙ Comme l'image de l'intervalle Ω par la fonction affine $[a \mapsto (1+u)a]$ est contenue dans $[0,+\infty[$ et que $F_{x,y}$ est (par définition) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, alors pour tout $u \in I$, la fonction $[a \mapsto \varphi(a,u)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,u) &= \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}(1+u)F'_{x,y}\big((1+u)a\big) \\ &= \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y-1}}e^{-(1+u)a}[(1+u)a]^{x+y-1} \\ &= u^{x-1}e^{-(1+u)a}a^{x+y-1}.\end{aligned}$$

➙ Par **[9.d.]**, pour tout $a \in \Omega$, la fonction $[u \mapsto \varphi(a,u)]$ est intégrable sur I.

➙ Pour tout $a \in \Omega$, la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,u)\right]$$

est continue sur I (y compris en 0, puisque $x > 1$).

➙ Comme $x + y - 1 > 1$, l'expression

$$a^{x+y-1} = e^{(x+y-1)\,\ell n\, a}$$

est une fonction croissante de a, donc

$$\forall\, a \in [c,d], \quad 0 \leqslant a^{x+y-1} \leqslant d^{x+y-1}.$$

Comme $1 + u \geqslant 1 > 0$, l'expression $e^{-(1+u)a}$ est une fonction décroissante de a, donc

$$\forall\, a \in [c,d], \quad 0 \leqslant e^{-(1+u)a} \leqslant e^{-(1+u)c}.$$

On en déduit par produit que

$$\forall\, a \in [c,d], \quad 0 \leqslant \left|\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,u)\right| \leqslant u^{x-1}e^{-(1+u)c}d^{x+y-1}.$$

Le majorant est indépendant de a et, d'après **[7.b.]** (avec $\alpha = c$), il est intégrable sur I en tant que fonction de u. On a ainsi prouvé l'intégrabilité sur I de la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,u)\right]$$

et l'hypothèse de domination.

❧ D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[c, d]$ et pour tout $a \in [c, d]$,

$$G'(a) = a^{x+y-1}e^{-a}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-au}\,du. \tag{7}$$

❧ Pour tout $a \in]0, +\infty[$, il existe deux réels $0 < c < d$ tels que $a \in]c, d[$, donc la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$: elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et l'expression (7) est vraie pour tout $a > 0$.

9. g. D'après **[7.b.]** et (7),

$$G'(a) = a^{x+y-1}e^{-a}\frac{\Gamma(x)}{a^x} = a^{y-1}e^{-a}\Gamma(x)$$

pour tout $a > 0$.

9. h. Comme la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par **[9.f.]**, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, 0 < a_0 < a_1, \quad G(a_1) = G(a_0) + \int_{a_0}^{a_1} G'(u)\,du. \tag{8}$$

➞ On sait que $F_{x,y}(0) = 0$ par définition (**[9.c.]**), donc $G(0) = 0$ par définition également (**[9.d.]**). Par **[9.d.]**, la fonction G est continue en 0, donc

$$G(a_0) \xrightarrow[a_0 \to 0]{} 0.$$

➞ Par **[9.e.]**, on sait que

$$G(a_1) \xrightarrow[a_1 \to +\infty]{} \Gamma(x+y)\beta(x,y).$$

➞ Enfin, d'après (7),

$$\int_{a_0}^{a_1} G'(u)\,du = \Gamma(x)\int_{a_0}^{a_1} u^{y-1}e^{-u}\,du$$

et par **[7.a.]** et la définition des intégrales généralisées,

$$\int_{a_0}^{a_1} G'(u)\,du \xrightarrow[[a_0 \to 0\ a_1 \to +\infty]{} \Gamma(x)\Gamma(y).$$

On en déduit que $\Gamma(x+y)\beta(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$ en passant à la limite dans (8) et comme $\Gamma(x+y) > 0$ (propriété rappelée par l'énoncé), on en déduit la propriété (2), établie ici pour $x > 1$ et $y > 1$, et donc pour $x > 0$ et $y > 0$ d'après **[9.a.]**

Partie C. La fonction F

10. L'énoncé rappelle que Γ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. En dérivant la relation (1), on obtient

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x).$$

On en déduit que, pour tout $x > 0$,

$$F(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + F(x).$$

11. a. D'après l'énoncé, la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Comme $x > 0$, alors la fonction $[y \mapsto x + y]$ prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$.
D'après (2), la fonction partielle $[y \mapsto \beta(x, y)]$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) &= \Gamma(x)\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)} - \Gamma(x)\frac{\Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{[\Gamma(x+y)]^2}\\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\cdot\frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\\ &= \beta(x,y)F(y) - \beta(x,y)F(x+y).\end{aligned}$$

11. b. Soient $0 < y_1 < y_2$. Si $t \in]0, 1[$, alors $0 < 1 - t < 1$, donc

$$0 < (1-t)^{y_2} < (1-t)^{y_1}$$

et donc, puisque $t^{x-1} > 0$,

$$\forall\, 0 < t < 1, \quad 0 < t^{x-1}(1-t)^{y_2} < t^{x-1}(1-t)^{y_1}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$0 < \beta(x, y_2) < \beta(x, y_1)$$

ce qui prouve que la fonction $[y \mapsto \beta(x,y)]$ est (strictement) décroissante.

11. c. La dérivée d'une fonction décroissante est négative, donc

$$\forall\, x, y > 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) \leqslant 0.$$

Or $\beta(x,y) > 0$ d'après (2), donc

$$\forall\, x, y > 0, \quad F(y) - F(x+y) \leqslant 0$$

d'après **[11.a.]** On a ainsi démontré que la fonction F est croissante sur $]0, +\infty[$.

12. a. Soient $x > -1$ et $n \geqslant 1$. Alors $k + x + 1 > k + x > 0$ pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, donc tous les termes de la somme télescopique suivante sont bien définis :

$$\begin{aligned} F(n+x+1) - F(x+1) &= \sum_{k=1}^{n} F(x+k+1) - F(x+k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} \end{aligned}$$

d'après **[10.]** On applique cette égalité pour $x = 0$:

$$F(n+1) - F(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} F(1+x) - F(1) = F(n+x+1) &- F(n+1) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \Big) \end{aligned}$$

par soustraction.

12. b. Comme la fonction F est croissante et que $x > -1$, alors

$$F(n+x+1) - F(n+1) \geqslant F(n) - F(n+1) = \frac{-1}{n}$$

d'après **[10.]** Par définition de la partie entière,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 = p$$

et, toujours par croissance de F,

$$F(n+x+1) - F(n+1) \leqslant F(n+p+1) - F(n+1).$$

Par **[10.]**,

$$\begin{aligned} F(n+p+1) - F(n+1) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} F(k+1) - F(k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = H_{n+p} - H_n \\ &\leqslant \frac{p}{n} \end{aligned}$$

puisqu'on reconnaît une somme de p termes, tous majorés par $^1/_n$.

12. c. Par **[12.a.]** et **[12.b.]**,

$$\frac{-1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k(k+x)} \leqslant F(x+1) - F(x) \leqslant \frac{p}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k(k+x)}.$$

Comme le réel x est fixé, alors l'entier p est fixé lui aussi. D'autre part, lorsque k tend vers $+\infty$,

$$\frac{x}{k(k+x)} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$$

donc la série $\sum \frac{x}{k(k+x)}$ est absolument convergente et la suite de ses sommes partielles est donc convergente. En passant à la limite ($n \to +\infty$) dans l'encadrement précédent,

$$\forall\, x > -1, \quad F(x+1) - F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\Big).$$

13. a. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction u_n définie par

$$\forall\, x \geqslant -1, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

On a déjà justifié que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[-1, +\infty[$: sa somme est la fonction g.

❧ Il est clair que u_n est, pour tout $n \geqslant 2$, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1, +\infty[$ et on vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{(n+x)^{k+1}}.$$

On en déduit que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, x \geqslant -1, \quad \big|u_n^{(k)}(x)\big| \leqslant \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}.$$

Ce majorant est indépendant de x et comme, pour tout entier $k \geqslant 1$ *fixé*,

$$\frac{k!}{(n-1)^{k+1}} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^{k+1}}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

quand $n \to +\infty$, alors les séries de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ convergent normalement sur $[-1, +\infty[$ pour tout $k \geqslant 1$.

Par conséquent, la somme g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}\forall\, x \geqslant -1,\ \forall\, k \geqslant 1, \quad g^{(k)}(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} k!}{(n+x)^{k+1}}.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! \big[\zeta(k+1) - 1\big]$$

(en remarquant bien que la somme commence à $n = 2$ et non pas $n = 1$).

13. b. Soit $x \in\,]-1, 1[$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[-x, x]$. On peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $(n+1)$ sur ce segment :

$$\Big|g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\Big| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|t| \leqslant |x|} \big|g^{(n+1)}(t)\big|.$$

D'après **[13.a.]**, pour $|t| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\big|g^{(n+1)}(t)\big|}{(n+1)!} &= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+t)^{n+2}} \\ &\leqslant \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p-1)^{n+2}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{n+2}} \leqslant \zeta(2)\end{aligned}$$

puisque

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, p \geqslant 1, \quad \frac{1}{p^{n+2}} \leqslant \frac{1}{p^2}.$$

On en déduit donc que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,, \quad \left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leqslant \zeta(2)\, |x|^{n+1}$$

et comme $|x| < 1$, le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\forall\, |x| < 1, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

ce qui signifie que la fonction g est **développable en série entière**.
13. c. On a démontré en **[12.c.]** que

$$F(1+x) = F(1) + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + g(x).$$

Il est clair que $g(0) = 0$. On déduit alors de **[13.b.]** que

$$F(1+x) = F(1) + \frac{x}{1+x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k.$$

Or (série géométrique de raison $-x \in\,]-1,1[$)

$$\frac{x}{1+x} = -\sum_{k=1}^{+\infty} (-x)^k$$

et d'après **[13.a.]**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \big[\zeta(k+1) - 1\big] x^k$$

donc (somme de deux séries convergentes)

$$F(1+x) = F(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k$$

pour tout $x \in\,]-1,1[$.