

Problème de Mathématiques

Référence pp2009 — Version du 15 octobre 2025

Partie A. Intégrales généralisées

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, différent de 1 et de -1 . Démontrer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x \cos \theta + 1 > 0.$$

2. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes. (On ne demande pas de calculer leurs valeurs.)

2. a.

$$\int_0^\pi \ln(\sin \theta) \, d\theta$$

2. b.

$$\int_0^\pi \ln(1 - \cos \theta) \, d\theta$$

2. c.

$$\int_0^\pi \ln(1 + \cos \theta) \, d\theta$$

3. En déduire que l'intégrale généralisée

$$P(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) \, d\theta$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est une fonction paire.

5. Démontrer que la différence

$$2\pi \ln x - P(x)$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

☞ On pourra vérifier que

$$\forall u \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \quad |\ln(1+u)| \leq \frac{3}{2}|u|$$

à l'aide d'une formule de Taylor.

Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie B. Racines de l'unité

6. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, différent de 1, on pose

$$P_2(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) \, d\theta.$$

6. a. Démontrer que

$$P_2(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right).$$

6. b. Démontrer que

$$(x^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. c. En déduire que

$$P_2(x) = \begin{cases} 4\pi \ln x & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

7. Donner une expression simplifiée de $P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \neq 1$.

8. a. Démontrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8. b. En déduire que

$$\forall n \geq 1, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

8. c. **Pour 5/2 uniquement.** En déduire enfin que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) \, d\theta = \frac{-\pi \ln 2}{2}.$$

9. La fonction P est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Tracer l'allure de son graphe, en mettant en évidence ses principales caractéristiques.

Solution ✱ Intégrale de Poisson

Partie A. Intégrales généralisées

1. On reconnaît un trinôme du second degré en fonction de x . Le coefficient de x^2 étant positif, ce trinôme atteint son minimum en $x = -b/2a = \cos \theta$ et ce minimum est égal à

$$1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \geq 0.$$

Comme $x \neq \pm 1$, on en déduit que $\sin \theta \neq 0$ et donc que le minimum du trinôme est *strictement* positif. Par conséquent, pour $x \neq \pm 1$,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x \cos \theta + 1 > 0.$$

REMARQUE.— On peut aussi mettre le trinôme sous forme canonique :

$$x^2 - 2x \cos \theta + 1 = (x - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$$

ce qui montre qu'il est toujours positif et qu'il est nul si, et seulement si, $x = \cos \theta$ et $\sin \theta = 0$. Le trinôme ne peut donc s'annuler que pour $x = \pm 1$ et $\sin \theta = 0$.

2. a. La fonction $\sin$ est continue et strictement positive sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$, donc la fonction $f_1 = [\theta \mapsto \ln(\sin \theta)]$ est continue sur cet intervalle.

• Lorsque θ tend vers 0, on sait que

$$\sin \theta = \theta + o(\theta^2) = \theta \cdot [1 + o(\theta)].$$

Par suite,

$$\ln(\sin \theta) = \ln \theta + \ln[1 + o(\theta)] \sim \ln \theta.$$

Comme la fonction $\ln$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence), on en déduit que f_1 est intégrable au voisinage de 0.

• Le changement de variable affine $\theta = \pi - \alpha$ transforme $\theta \in [\pi - 1, \pi[$ en $\alpha \in]0, 1]$. D'après le Théorème du changement de variable, la fonction f_1 est intégrable sur $[\pi - 1, \pi[$ si, et seulement si,

$$\ln[\sin(\pi - \alpha)] = \ln \sin \alpha$$

est intégrable sur $]0, 1]$, ce qui est vrai comme on vient de le rappeler. Par conséquent, la fonction f_1 est bien intégrable au voisinage de π .

La fonction f_1 est donc intégrable sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$.

2. b. La fonction $f_2 = [\theta \mapsto \ln(1 - \cos \theta)]$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]0, \pi[$.

Lorsque θ tend vers 0,

$$\begin{aligned} \ln(1 - \cos \theta) &= \ln\left(\frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)\right) \\ &= \ln(\theta^2) + \ln\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \sim 2 \ln \theta \end{aligned}$$

et comme la fonction $\ln$ est intégrable au voisinage de 0 (*ter repetita placent?*), la fonction f_2 est intégrable sur $]0, \pi[$.

2. c. La fonction $f_3 = [\theta \mapsto \ln(1 + \cos \theta)]$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[0, \pi[$. On sait que

$$\forall \theta \in [0, \pi[, \quad \ln(1 + \cos \theta) = \ln[1 - \cos(\pi - \theta)].$$

En posant $\alpha = \pi - \theta$, on définit un changement de variable affine qui transforme $\theta \in [0, \pi[$ en $\alpha \in]0, \pi]$. D'après le Théorème de changement de variable, comme la fonction f_2 est intégrable sur $]0, \pi]$, la fonction f_3 est intégrable sur $[0, \pi[$.

3. Notons

$$f(\theta) = \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquels cela a bien un sens.

• Supposons pour commencer que $x \neq \pm 1$. D'après [1.], la fonction f est continue sur le segment $[0, \pi]$ et par conséquent, l'intégrale $P(x)$ existe.

• Pour $x = 1$, on remarque que

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad f(\theta) = \ln 2 + \ln(1 - \cos \theta).$$

Sur l'intervalle borné $]0, \pi]$, la constante $\ln 2$ est intégrable et la fonction f_2 est aussi intégrable par [2.b.], donc la fonction f est bien intégrable sur $]0, \pi]$. L'intégrale généralisée $P(x)$ est bien convergente dans ce cas.

• Pour $x = -1$ enfin, on remarque de même que

$$\forall \theta \in [0, \pi[, \quad f(\theta) = \ln 2 + \ln(1 + \cos \theta)$$

et on déduit de [2.c.] que la fonction f est intégrable sur $]0, \pi]$. L'intégrale généralisée $P(x)$ est donc convergente dans ce cas aussi.

• La fonction P est ainsi définie sur $\mathbb{R}$.

4. Comme on vient de le remarquer, la fonction P est bien définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(-x) &= \int_0^\pi \ln(x^2 + 2x \cos \theta + 1) d\theta \\ &= \int_\pi^0 \ln[x^2 + 2x \cos(\pi - \alpha) + 1](-d\alpha) \\ &= \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \alpha + 1) d\alpha = P(x) \end{aligned}$$

avec le changement de variable affine $\theta = \pi - \alpha$. La fonction P est donc paire.

5. Commençons par le commencement : on ne compare bien que ce qui est comparable !

$$\begin{aligned} 2\pi \ln x - P(x) &= \int_0^\pi \ln x^2 - \ln(x^2 + 2x \cos \theta + 1) d\theta \\ &= - \int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{2}{x} \cos \theta + \frac{1}{x^2}\right) d\theta \end{aligned}$$

• Pour tout $x \geq 10$,

$$\left| \frac{2 \cos \theta}{x} + \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \leq \frac{3}{x} \leq \frac{1}{3}.$$

• La fonction $[t \mapsto \ln(1+t)]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $S = [-1/3, 1/3]$. D'après la formule de Taylor-Lagrange,

$$\begin{aligned} \forall u \in S, \quad |\ln(1+u)| &= |\ln(1+u) - \ln(1+0)| \\ &\leq |u| \cdot \max_{s \in S} \left| \frac{1}{1+s} \right| \\ &\leq |u| \cdot \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2} \cdot |u|. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \geq 10$,

$$\begin{aligned} \left| \ln\left(1 + \frac{2}{x} \cos \theta + \frac{1}{x^2}\right) \right| &\leq \frac{3}{2} \cdot \left| \frac{2}{x} \cos \theta + \frac{1}{x^2} \right| \\ &\leq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{x} = \frac{9}{2x}. \end{aligned}$$

• Enfin, d'après l'Inégalité de la moyenne,

$$\begin{aligned} |2\pi \ln x - P(x)| &\leq \int_0^\pi \left| \ln\left(1 + \frac{2}{x} \cos \theta + \frac{1}{x^2}\right) \right| d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{9}{2x} d\theta = \frac{9\pi}{2x} \end{aligned}$$

pour tout $x \geq 10$.

Par encadrement, on en déduit que $2\pi \ln x - P(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Autrement dit,

$$P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2\pi \ln x + o(1).$$

Interprétation géométrique : le graphe de P possède une branche parabolique d'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$.

Partie B. Racines de l'unité

6. a. On sait (Théorème de Riemann) que : si la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Ici, $x \geq 0$ et $x \neq 1$, donc $[[1.]]$ la fonction

$$[\theta \mapsto \ln(x^2 + 2x \cos \theta + 1)]$$

est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ et on peut appliquer le Théorème de Riemann avec $a = 0$ et $b = 2\pi$.

6. b. Pour tout $n \geq 1$, on connaît les racines n -ièmes de l'unité :

$$(x^n - 1) = \prod_{k=1}^n (x - e^{2ik\pi/n}).$$

En conjuguant cette égalité, on obtient :

$$(x^n - 1) = \prod_{k=1}^n (x - e^{-2ik\pi/n})$$

et en multipliant ces deux égalités, on arrive à :

$$(x^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right).$$

6. c. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right) = \ln[(x^n - 1)^2]$$

pour $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

• Pour $0 \leq x < 1$,

$$\begin{aligned} \ln[(x^n - 1)^2] &= 2 \ln(1 - x^n) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et $P_2(x) = 0$ d'après **[6.a.]**

• Pour $x > 1$,

$$\begin{aligned} \ln[(x^n - 1)^2] &= 2 \ln(x^n - 1) \\ &= 2 \ln(x^n) + 2 \ln\left(1 - \frac{1}{x^n}\right) \\ &= 2n \ln x + 2 \ln\left(1 - \frac{1}{x^n}\right). \end{aligned}$$

D'après **[6.a.]** et **[6.b.]**,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \cdot \ln[(x^n - 1)^2] \\ &= 4\pi \ln x + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4\pi}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{x^n}\right) \\ &= 4\pi \ln x. \end{aligned}$$

7. Pour $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P(x) + \int_{\pi}^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta && \text{(Chasles)} \\ &= P(x) + \int_{\pi}^0 \ln(x^2 - 2x \cos \alpha + 1)(-d\alpha) \\ &= 2P(x) \end{aligned}$$

avec le changement de variable affine $\alpha = 2\pi - \theta$.

• On déduit alors de la question précédente que

$$P(x) = \begin{cases} 2\pi \ln x & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Comme la fonction P est paire [[4.]], on en déduit que

$$P(x) = \begin{cases} 2\pi \ln|x| & \text{si } |x| > 1, \\ 0 & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

REMARQUE.— L'expression de $P(x)$ pour $x > 1$ coïncide avec l'équivalent calculé au [5.]!

8. a. Pour $k = n$,

$$x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 = (x - 1)^2$$

donc, d'après [6.b.],

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) = \frac{(x^n - 1)^2}{(x - 1)^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ différent de 1. Et d'après la formule de la somme géométrique,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2$$

puisque $x \neq 1$.

On a donc deux polynômes P et Q tels que $P(x) = Q(x)$ pour tout x dans une partie infinie de $\mathbb{R}$. Par conséquent, $P = Q$ et en particulier $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2.$$

8. b. Appliquons le résultat précédent pour $x = 1$:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} \right) = n^2.$$

Comme

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

on en déduit que

$$\left(2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \underbrace{\sin \frac{k\pi}{n}}_{\geq 0} \right)^2 = n^2$$

(car $0 < k\pi/n < \pi$) et donc que

$$2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = n.$$

On sait aussi que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

et donc que

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n} \right) = \left(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \right)^2.$$

Changeons d'indice dans le second produit avec $j = n - k$. Comme l'indice k varie de 1 à $(n - 1)$, l'indice j varie de $(n - 1)$ à 1 et

$$\cos \frac{k\pi}{2n} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{2n} \right) = \sin \frac{j\pi}{2n}$$

donc

$$\left(\underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}}_{\geq 0} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \right)^2$$

(car $0 < k\pi/2n < \pi/2$) et finalement

$$\forall n \geq 1, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

8.c. La fonction $f_1(\theta) = \ln(\sin \theta)$ n'est pas continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc on ne peut pas appliquer le Théorème de Riemann comme on l'a fait au **[6.a.]**

En revanche, la fonction f_1 est continue, croissante et négative sur $I =]0, \pi/2]$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction φ_n définie par

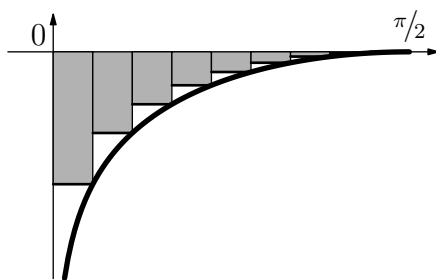
$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall \frac{(k-1)\pi}{2n} \leq \theta < \frac{k\pi}{2n}, \quad \varphi_n(\theta) = f_1\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

est une fonction continue par morceaux sur $[0, \pi/2]$ (fonction en escalier), telle que

$$\forall 0 < \theta \leq \pi/2, \quad f_1(\theta) \leq \varphi_n(\theta) \leq 0$$

et telle que

$$\forall \theta \in]0, \pi/2], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(\theta) = f_1(\theta).$$



On a donc

$$\forall n \geq 1, \forall 0 < \theta \leq \pi/2, \quad |\varphi_n(\theta)| \leq -f_1(\theta).$$

Comme la fonction $-f_1$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ (d'après **[2.a.]**), la convergence des fonctions φ_n vers la fonction f_1 est dominée, ce qui prouve que

$$\int_0^{\pi/2} f_1(\theta) d\theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi_n(\theta) d\theta.$$

Comme φ_n est une fonction en escalier, cela prouve que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n} \cdot \ln \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \sin \frac{k\pi}{2n} &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln \sin \frac{k\pi}{2n} \\ &= \ln \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = -(n-1) \ln 2 + \frac{1}{2} \ln n \end{aligned}$$

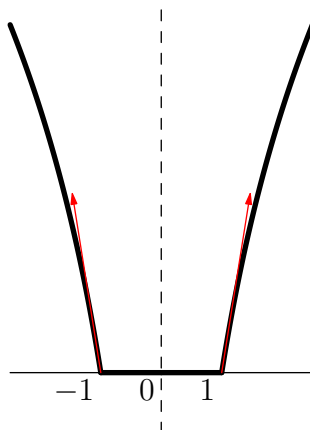
donc

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \ln \sin \frac{k\pi}{2n} &= \frac{-(n-1)\pi}{2n} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \frac{\ln n}{n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi \ln 2}{2}. \end{aligned}$$

9. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \int_0^\pi \ln(2 - 2 \cos \theta) \, d\theta = \int_0^\pi \ln(4 \sin^2 \theta/2) \, d\theta \\
 &= 2\pi \ln 2 + 4 \int_0^\pi \ln \sin \frac{\theta}{2} \, d\frac{\theta}{2} \\
 &= 2\pi \ln 2 + 4 \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du = 0
 \end{aligned}$$

D'après [7.] et [8.c.], la fonction P tend vers 0 au voisinage de 1 (aussi bien à gauche qu'à droite) et $P(1) = 0$. Par conséquent, la fonction P est continue en 1 (et en -1 par parité).



Par [4.], le graphe de P admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Sur $[0, 1[$, la fonction P est constante. Sur $]1, +\infty[$, elle est strictement croissante et concave.

En $x = 1$, la pente de la demi-tangente à droite est égale à 2π : cette tangente est donc assez proche de la verticale (*mais elle n'est pas verticale !*).