Problème de Mathématiques

Référence pp2007 — Version du 15 octobre 2025

Partie A.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}\, x^n.$$

1. a. Démontrer que la série

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n}\, x^n$$

converge absolument pour $|x| < 1$.

1. b. Quelle est la nature de cette série pour $|x| > 1$?

2. On cherche maintenant une expression explicite de la fonction g.

2. a. **Pour 5/2 uniquement.** Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et que

$$\forall\, x \in]-1,1[, \qquad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} x^{n-1}.$$

2. b. En déduire que

$$\forall\, x \in]-1,1[, \qquad g'(x) = \frac{e^{i\theta} - x}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}.$$

2. c. Démontrer enfin que

$$\forall\, x \in]-1,1[, \qquad g(x) = \frac{-1}{2}\,\ell n(x^2 - 2x\cos\theta + 1) + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x\sin\theta}{1 - x\cos\theta}.$$

Partie B.

Dans cette partie, on suppose que

$$\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

3. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta}\, \frac{1 - (e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t}\, dt.$$

4. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t}\, dt.$$

5. Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \frac{-1}{2}\,\ell n(2 - 2\cos\theta) + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}.$$

6. Démontrer enfin que

$$\forall\, 0 < \theta < \pi, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k\theta}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Que vaut cette somme pour $-\pi < \theta < 0$?

Solution ❀ Séries trigonométriques

Partie A.

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \frac{e^{in\theta}}{n}\, x^n.$$
On a alors
$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant |u_n| = \frac{|x|^n}{n} \leqslant |x|^n.$$
Or $|x| < 1$, donc la série géométrique $\sum |x|^n$ converge et, par comparaison, la série $\sum |u_n|$ converge. La série $\sum u_n$ est donc convergente (en tant que série complexe absolument convergente).

1. b. Pour $|x| > 1$, on sait que $|x|^n/n$ tend vers $+\infty$ (par croissances comparées) et la série $\sum u_n$ est alors grossièrement divergente.

2. a. D'après la question précédente, le rayon de convergence de la série entière est égal à 1. Par conséquent, sa somme g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ et de plus
$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\Big(\frac{e^{in\theta}}{n} x^n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} x^{n-1}.$$

2. b. D'après la question précédente et la formule de la somme géométrique,
$$\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad g'(x) = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\theta} x)^n = \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x} = \frac{1}{e^{-i\theta} - x}.$$
Au moyen de la quantité conjuguée, on en déduit que
$$\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad g'(x) = \frac{e^{i\theta} - x}{(\cos\theta - x)^2 + \sin^2\theta} = \frac{e^{i\theta} - x}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}.$$

2. c. La partie réelle de $g'(u)$ est facile à intégrer.
$$\int \frac{\cos\theta - u}{u^2 - 2u\cos\theta + 1}\, du = \int \frac{-1}{2} \frac{2(u - \cos\theta)}{(u - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, du = \frac{-1}{2} \ell n\big[(u - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta\big]$$
C'est un peu plus compliqué pour la partie imaginaire.
$$\int \frac{\sin\theta}{(u - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, du = \operatorname{Arctan} \frac{u - \cos\theta}{\sin\theta}$$
D'après le Théorème fondamental,
$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(u)\, du = \frac{-1}{2} \ell n(x^2 - 2x\cos\theta + 1) + i\Big(\operatorname{Arctan} \frac{x - \cos\theta}{\sin\theta} + \operatorname{Arctan} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)$$
puisque g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ et que $g(0) = 0$ (tous les termes de la série sont nuls pour $x = 0$).

On *doit* savoir que : si $uv < 1$, alors
$$\operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan} v = \operatorname{Arctan} \frac{u + v}{1 - uv}.$$
Ici,
$$uv = \frac{x - \cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x\cos\theta - \cos^2\theta}{1 - \cos^2\theta}.$$
Comme $|x| < 1$, alors $x\cos\theta - \cos^2\theta < 1 - \cos^2\theta$ et comme le dénominateur est strictement positif, on en déduit que $uv < 1$ et donc que
$$\operatorname{Arctan} \frac{x - \cos\theta}{\sin\theta} + \operatorname{Arctan} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{Arctan} \frac{\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1 - \frac{x-\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \operatorname{Arctan} \frac{x\sin\theta}{1 - x\cos\theta}.$$
On a bien démontré la formule de l'énoncé.

REMARQUE.— On pouvait aussi vérifier que g et l'expression fournie par l'énoncé avaient la même dérivée et prenaient la même valeur en $x = 0$.

Quelle que soit la méthode suivie, il convient de détailler les calculs avec assez de précision pour convaincre le lecteur qu'on sait exactement ce qu'on fait.

Partie B.

3. L'entier $n \geqslant 1$ est fixé.
Comme $e^{i\theta} \neq 1$, alors $e^{i\theta}t \neq 1$ pour tout $t \in [0,1]$:
— si $0 \leqslant t < 1$, alors $|e^{i\theta}t| = t < 1$;
— si $t = 1$, alors $e^{i\theta}t = e^{i\theta} \neq 1$.

Par conséquent, la fonction intégrande

$$\left[t \mapsto e^{i\theta}\frac{1-(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\right]$$

est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale est donc bien définie.

Et comme $e^{i\theta}t \neq 1$, on déduit de la somme géométrique que

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad e^{i\theta} \cdot \frac{1-(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t} = e^{i\theta}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\theta}t)^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta}\, t^k.$$

Il s'agit d'une fonction polynomiale en t, on peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[0,1]$.

$$\int_0^1 e^{i\theta} \cdot \frac{1-(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta}\int_0^1 t^k\, dt = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\theta}}{k}$$

4. D'après l'Inégalité de la moyenne,

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{i\theta}(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\, dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{e^{i\theta}(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\right| dt = \int_0^1 \frac{t^n}{|1-e^{i\theta}t|}\, dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$,

$$|1-e^{i\theta}t| = |(1-t\cos\theta) + it\sin\theta| \geqslant |1-t\cos\theta| = 1-t\cos\theta \geqslant 1-\cos\theta > 0$$

puisque $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a donc

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad \frac{t^n}{|1-e^{i\theta}t|} \leqslant \frac{t^n}{1-\cos\theta}$$

et, par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \left|\int_0^1 \frac{e^{i\theta}(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-\cos\theta)}.$$

Par encadrement, l'intégrale tend vers 0 et par conséquent

$$\int_0^1 e^{i\theta}\frac{1-(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\, dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}\, dt - \int_0^1 \frac{e^{i\theta}(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}\, dt.$$

D'après la question précédente, cette convergence prouve la convergence de la série $\sum e^{ik\theta}/k$ et donne la somme de cette série (= la limite de la suite des sommes partielles) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}\, dt.$$

5. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{1}{e^{-i\theta}-t}\, dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}-t}{(\cos\theta-t)^2+\sin^2\theta}\, dt.$$

Les calculs de primitives du **2.c.** supposaient $|u| < 1$ parce que θ était quelconque. Maintenant que $e^{i\theta} \neq 1$, on a $(\cos\theta, \sin\theta) \neq (1,0)$ et les calculs de primitives valent pour $u \in [0,1]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{i\theta}-u}{(\cos\theta-u)^2+\sin^2\theta}\, du &= \left[\frac{-1}{2}\,\ell n\big[(u-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\big] + i\operatorname{Arctan}\frac{u\sin\theta}{1-u\cos\theta}\right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{2}\,\ell n(2-2\cos\theta) + i\operatorname{Arctan}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

6. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'égalité précédente, on obtient d'une part

$$\forall\, 0 < x < 2\pi, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\theta}{k} = \frac{-1}{2}\,\ell n(2 - 2\cos\theta) = \frac{-1}{2}\,\ell n\Big(4\sin^2\frac{\theta}{2}\Big) = -\,\ell n\Big(2\sin\frac{\theta}{2}\Big)$$

(puisque $\sin {}^{\theta}\!/_{2} > 0$ pour $0 < \theta < 2\pi$) et d'autre part

$$\forall\, 0 < x < \pi, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k\theta}{k} = \mathrm{Arctan}\,\frac{\cos {}^{\theta}\!/_{2}}{\sin {}^{\theta}\!/_{2}} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\tan {}^{\theta}\!/_{2} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

(puisque $0 < {}^{\theta}\!/_{2} < {}^{\pi}\!/_{2}$ et $\tan {}^{\theta}\!/_{2} > 0$ pour $0 < \theta < \pi$).

❧ Si $-\pi < \theta < 0$, alors $0 < -\theta < \pi$ et par imparité de sin,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k\theta}{k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k(-\theta)}{k} = -\frac{\pi - (-\theta)}{2} = \frac{-\pi - \theta}{2}.$$