Problème de Mathématiques

Référence pp2135 — Version du 15 octobre 2025

L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

On considère pour cela la fonction

$$f\ :\ \mathbb{R} \times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[\,, \quad f(x,t) = \frac{\sin t}{t}\,e^{-xt}.$$

On définit également la fonction

$$u\ :\ [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

en posant

$$u(x,t) = -\frac{x\sin t + \cos t}{1+x^2}\,e^{-xt}.$$

On pourra utiliser sans le démontrer *l'encadrement*

$$\forall\,t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t| \leqslant |t|.$$

Partie A. Préliminaires

1. Démontrer que $U = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ est un ouvert et que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet ouvert. La fonction f atteint-elle un maximum local sur U ?

2. Soit $x > 0$. Démontrer que la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que l'intégrale I est convergente si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

4. Soit $x \geqslant 0$. Démontrer que $[t \mapsto u(x,t)]$ est une primitive de la fonction $[t \mapsto \sin t\, e^{-xt}]$ sur $]0,+\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction

$$F\ :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

par

$$\forall\,x \geqslant 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt.$$

Partie B. Calcul de F sur $]0,+\infty[$

5. Démontrer que

$$\forall\,x > 0, \quad \big|F(x)\big| \leqslant \frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

6. Soit $a > 0$. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et que

$$\forall\,x \geqslant a, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,dt.$$

7. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour $x > 0$. Conclure que

$$\forall\,x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

Partie C.

> *On considère les fonctions* $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ *et* $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définies par*
>
> $$F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt \quad \textit{et par} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\,dt$$
>
> *pour tout* $x \in [0,1]$.

8. Démontrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

9. Soit $x \in [0,1]$. Démontrer que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}\right]$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que

$$F_2(x) = \frac{x\sin 1 + \cos 1}{1+x^2}\,e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,dt.$$

10. Démontrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

11. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

Solution ❀ Intégrale de Dirichlet

Complément à caractère culturel

La fonction sin est concave sur $[0, \pi]$, donc

$$\forall\, t \in [0, \pi], \quad \sin t \leqslant t.$$

De plus,

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad \sin t \leqslant 1 \leqslant t.$$

Donc

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \sin t \leqslant t.$$

Enfin, les deux fonctions étant impaires,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t| \leqslant |t|.$$

Partie A. Préliminaires

1. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Comme $y_0 > 0$, on peut choisir $r = y_0/2 > 0$ et remarquer que la boule de centre M_0 et de rayon $r > 0$ (pour la norme euclidienne ou pour la norme produit par exemple) est contenue dans U. Ainsi, U est un voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Variante 1. L'ensemble U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit cartésien de deux intervalles ouverts.

Variante 2. L'application $[(x, t) \mapsto t]$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (elle est linéaire et $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension finie) et l'ensemble U est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par cette application continue, donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

❧ L'application linéaire $[(x, t) \mapsto t]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\sin t}{t}\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc la composée

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & t & \longmapsto & \frac{\sin t}{t} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

L'application polynomiale $[(x, t) \mapsto -xt]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la composée

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & -xt & \longmapsto & \exp(-xt) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

En tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U.

❧ Si f, fonction de classe $\mathscr{C}^1$, atteint un maximum local en un point M_0 de l'ouvert U, alors le gradient $\nabla f(M_0)$ est nul. Or, en tout point $M = (x, t) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = -\sin t \cdot e^{-xt},$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(M) = \frac{t\cos t - (1 + xt)\sin t}{t^2} \cdot e^{-xt}.$$

Si la première dérivée partielle est nulle, alors il faut que $\sin t = 0$ et, pour que la deuxième dérivée partielle soit nulle elle aussi, alors il faut que

$$\frac{\pm 1}{t} \cdot e^{-xt} = 0,$$

ce qui est impossible.

La fonction f n'a donc pas de point critique sur l'ouvert U et par conséquent, elle n'atteint aucun maximum local sur U.

2. Soit $x > 0$.

Il est clair que la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est continue sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Lorsque t tend vers 0, on a $f(x, t) \sim 1$, donc la fonction est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$, on a $f(x, t) = \mathcal{O}(e^{-xt})$ avec $x > 0$, donc la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est donc intégrable sur I.

3. Soit $0 < a < b$. On intègre par parties sur $[a,b]$:

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

Il est clair que

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1-\cos b}{b} = 0$$

et comme $1-\cos t \sim {}^{t^2}\!/_2$ lorsque t tend vers 0,

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1-\cos a}{a} = 0.$$

Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

converge si, et seulement si, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

converge et, dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

❧ La fonction

$$\varphi = \left[t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}\right]$$

est continue sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$; elle tend vers $1/2$ au voisinage de $t=0$ puisque $1-\cos t \sim {}^{t^2}\!/_2$ et est clairement $\mathcal{O}(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur I et par conséquent l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$

converge. Donc l'intégrale I converge.

4. Soit $x \geqslant 0$, fixé. La fonction $[t \mapsto u(x,t)]$ est clairement $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \left[-\frac{x\cos t - \sin t}{1+x^2} + x\frac{x\sin t + \cos t}{1+x^2}\right]e^{-xt}\\ &= \sin t\, e^{-xt}.\end{aligned}$$

REMARQUE.— On a trouvé cette primitive au moyen d'une double intégration par parties ou en prenant la partie imaginaire d'une primitive de $e^{(-x+i)t}$.

Partie B. Calcul de F sur $]0,+\infty[$

5. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|F(x)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(x,t)\right|\,dt.$$

Or, d'après l'encadrement rappelé par l'énoncé,

$$\forall\, t > 0, \quad \left|f(x,t)\right| = \frac{|\sin t|}{|t|}\,e^{-xt} \leqslant e^{-xt}.$$

Donc, par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty} \left|f(x,t)\right|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\left|F(x)\right| \leqslant \frac{1}{x}.$$

❧ Comme $1/x$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

en appliquant le Théorème d'encadrement.

6. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sous $\int$.

❧ Pour tout $t > 0$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega = [0, +\infty[$, avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin t\, e^{-xt}.$$

❧ Pour tout $x > 0$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

est intégrable sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par **[2.]** et la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I d'après la propriété de domination suivante.

❧ Pour tout $x \geqslant a$ et tout $t > 0$, il est clair que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [a, +\infty[$ et intégrable sur I en tant que fonction de t, donc la fonction F est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall\, x \geqslant a, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,dt.$$

7. D'après la question précédente, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$$

et pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,dt.$$

On déduit de **[4.]** que

$$\forall\, A > 0, \quad -\int_0^A \sin t\, e^{-xt}\,dt = \big[-u(x,t)\big]_{t=0}^{t=A}$$

et comme $u(x, A)$ tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$F'(x) = -\big(-u(x,0)\big) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

❧ Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, il existe une constante K telle que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = K - \operatorname{Arctan} x.$$

D'après **[5.]**, la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc $K - \pi/2 = 0$. Par conséquent,

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

Partie C.

8. Nous allons appliquer le Théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale.

❧ Pour tout $t \in I =]0, 1]$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est clairement continue sur $\Omega = [0, 1]$.

❧ Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur I car elle est continue sur I et tend vers une limite finie, égale à 1, lorsque t tend vers 0.

❧ Enfin, quels que soient $t \in I$ et $x \in \Omega$,

$$\left|f(x, t)\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant 1.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \Omega$ et intégrable sur I (en tant que fonction constante sur un intervalle borné).

La fonction F_1 est donc continue sur $[0, 1]$.

9. Soit $x \in \Omega = [0, 1]$. Il est clair que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}\right]$$

est continue sur $I = [1, +\infty[$ et comme

$$\frac{u(x, t)}{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2),$$

elle est intégrable au voisinage de $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur I.

❧ On intègre alors par parties grâce à **[4.]** : pour tout $A > 1$,

$$\int_1^A f(x, t)\, dt = \left[\frac{u(x, t)}{t}\right]_{t=1}^{t=A} + \int_1^A \frac{u(x, t)}{t^2}\, dt.$$

Il est clair que

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{u(x, A)}{A} = 0$$

et d'après ce qui précède,

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{u(x, t)}{t^2}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2}\, dt.$$

Enfin, d'après **[2.]** (pour $x > 0$) et **[3.]** (pour $x = 0$),

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(x, t)\, dt = \int_1^{+\infty} f(x, t)\, dt.$$

On en déduit que

$$F_2(x) = -u(x, 1) + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2}\, dt$$

pour tout $x \in [0, 1]$.

10. Comme il est clair que

$$[x \mapsto -u(x, 1)]$$

est continue sur $[0, 1]$, il reste à appliquer le Théorème de continuité.

❧ Pour tout $t \in I = [1, +\infty[$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}\right]$$

est clairement continue sur $\Omega = [0, 1]$.

❧ Pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}\right]$$

est intégrable sur I d'après **[9.]**

❧ Pour tout $x \in \Omega$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\left|\frac{u(x, t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1 + x}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{2}{t^2}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \Omega$ et évidemment intégrable sur $I = [1, +\infty[$.

La fonction F_1 est donc bien continue sur $[0, 1]$.

11. D'après la relation de Chasles, $F = F_1 + F_2$. D'après les questions précédentes, la fonction F est donc continue sur $[0, 1]$ et en particulier continue en 0.

Par définition et **[3.]**, $I = F(0)$. Comme F est continue en 0, on en déduit que

$$I = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} F(x)$$

et on déduit enfin de **[7.]** que

$$I = \frac{\pi}{2}.$$