

Problème de Mathématiques

Référence pp2105 — Version du 15 octobre 2025

Dans cet exercice, on se propose de démontrer par l'absurde que π est irrationnel. On suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que

$$\pi = \frac{a}{b}.$$

1. Soient n , un entier naturel non nul, et P , un polynôme réel de degré $2n$.
 Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$, la dérivée k -ième de P . (On rappelle que $P^{(0)} = P$.)
 On considère les applications F et G définies par

$$F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(2k)}(x)$$

$$G(x) = F'(x) \sin x - F(x) \cos x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer G' et en déduire que

$$\int_0^\pi P(x) \sin x \, dx = F(0) + F(\pi).$$

2. On suppose maintenant que le polynôme P est défini par

$$P = \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$$

où n est un entier naturel non nul.

- 2.a. Calculer $P^{(j)}(0)$ pour tout entier $0 \leq j \leq 2n$. En déduire que $F(0)$ et $F(\pi)$ sont des entiers relatifs.
 2.b. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} \sin x \, dx$$

est un entier naturel non nul.

- 2.c. Démontrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
 2.d. Conclure.

Solution ✻ Irrationalité de π

1. On obtient facilement :

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= (F''(x) + F(x)) \sin x \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(2k+2)}(x) + \sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(2k)}(x) \right) \sin x \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} P^{(2k)}(x) + \sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(2k)}(x) \right) \sin x \\
 &= \left((-1)^n \underbrace{P^{(2n+2)}(x)}_{=0} + P(x) \right) \sin x = P(x) \sin x.
 \end{aligned}$$

car $\deg P = 2n$

On en déduit que

$$\int_0^\pi P(x) \sin x \, dx = G(\pi) - G(0) = F(0) + F(\pi).$$

2. a. En développant par la formule du binôme et en posant $j = k + n$:

$$P = \frac{1}{n!} X^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k X^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{a^{n-k} b^k}{k!(n-k)!} X^{k+n} = \sum_{j=n}^{2n} (-1)^{j-n} \frac{a^{2n-j} b^{j-n}}{(j-n)!(2n-j)!} X^j$$

et donc (selon la Formule de Taylor pour les polynômes) :

— si $0 \leq j \leq n-1$, alors

$$P^{(j)}(0) = 0$$

— et si $n \leq j \leq 2n$, alors

$$P^{(j)}(0) = (-1)^{j-n} \frac{j!}{(j-n)!(2n-j)!} a^{2n-j} b^{j-n} = (-1)^{j-n} \underbrace{\binom{n}{j-n}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{j!}{n!}}_{\in \mathbb{Z}} a^{2n-j} b^{j-n}.$$

On en déduit que les $P^{(j)}(0)$ sont des entiers relatifs, puis que

$$F(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(2k)}(0)$$

est également un entier relatif.

✻ Comme

$$P\left(\frac{a}{b} - X\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{b} - X\right)^n (bX)^n = P(X),$$

on en déduit que

$$P^{(j)}(\pi) = P^{(j)}(a/b) = (-1)^j P^{(j)}(0)$$

est également entier relatif pour tout $j \in \{0, \dots, 2n\}$, puis que $F(\pi)$ est élément de $\mathbb{Z}$.

2. b. Pour tout $n \geq 1$, I_n est donc un entier relatif (car $I_n = F(0) + F(\pi)$) strictement positif (car la fonction $[x \mapsto P(x) \sin x]$ est strictement positive sur $]0, \pi[$).

2. c. Pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$0 \leq \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} \sin x \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

(cette majoration, très grossière, suffit pour conclure) donc

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. d. Comme les I_n sont des entiers strictement positifs, on a $1 \leq I_n$ pour tout n , ce qui contredit la convergence de $(I_n)_{n \geq 1}$ vers 0 établie à la question précédente.

L'hypothèse $\pi \in \mathbb{Q}$ est absurde et π est donc irrationnel.