

Problème de Mathématiques

Référence pp2005 — Version du 15 octobre 2025

Partie A.

Dans cette partie, l'espace $E = \mathbb{R}^d$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ (quelconque).

On **rappelle** qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur $\ell \in E$ si, et seulement si,

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On suppose donnée une application

$$T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

où α est une constante telle que $0 < \alpha < 1$.

On choisit un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = T(x_n).$$

On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$.

1. a. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|.$$

1. b. En déduire que la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ est convergente.

2. On **admet** que cette dernière propriété prouve que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^d$.

2. a. Démontrer que la suite $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $T(\ell)$.

2. b. Démontrer que $T(\ell) = \ell$.

3. Combien de solutions l'équation

$$T(x) = x$$

a-t-elle ?

Partie B.

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|.$$

On ne demande pas de vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

On considère une matrice

$$C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$$

et un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$. En identifiant la matrice C à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ qui lui est canoniquement associé, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad T(x) = Cx + b.$$

4. L'application T est-elle linéaire ?

5. Justifier l'existence du réel α défini par

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |c_{i,j}|.$$

Ce réel peut-il être nul ?

6. Démontrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \|T(x) - T(y)\|_\infty \leq \alpha \|x - y\|_\infty.$$

7. Soient $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ et $b_0 \in \mathbb{R}^d$. On cherche à résoudre l'équation $Ax = b_0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^d$.

On pose $C = I_d - \lambda A$, où λ est un réel strictement positif. Comment choisir $b \in \mathbb{R}^d$ pour que

$$Ax = b_0 \iff T(x) = x?$$

8. On choisit de résoudre l'équation $Ax = b_0$ directement en appliquant l'algorithme du pivot. Indiquer (sans démonstration) la complexité de cette méthode en fonction de d .
9. On choisit de résoudre l'équation $Ax = b_0$ par approximations successives en résolvant $T(x) = x$ avec la méthode décrite dans la **partie A**.
- 9.a. Comment choisir λ pour que cette méthode puisse s'appliquer ?
Dans la suite de cette question, on supposera que cette condition sur λ est satisfaite.
- 9.b. Estimer la complexité de cette méthode en fonction de d et du nombre n d'itérations effectuées.
- 9.c. Dans quelle mesure cette méthode est-elle plus intéressante que l'algorithme du pivot ?

Partie C.

Dans cette dernière partie, on se place dans $\mathbb{R}^3$ et on étudie l'équation $Ax = b_0$ définie par

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Suivant l'étude de la **partie B**, on pose $C = I_3 - \lambda A$.

10. Comment choisir λ pour que $\alpha < 1$?
11. Le choix $\lambda = 1/4$ assure bien que $\alpha < 1$. À l'aide d'un raisonnement graphique, proposer un meilleur choix de λ .
12. Résoudre $Ax = b_0$ (par l'algorithme du pivot).

Solution ✱ Résolution itérative d'un système linéaire

Partie A.

1. a. Supposons [HR] que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$

soit établi.

Alors, comme T est α -lipschitzienne,

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &= \|T(x_{n+1}) - T(x_n)\| \\ &\leq \alpha \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \alpha^{n+1} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant de l'hypothèse de récurrence. On a ainsi démontré que la propriété [HR] était héréditaire.

Comme par ailleurs la propriété [HR] est évidemment vérifiée pour $n = 0$, elle est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. b. Comme $0 < \alpha < 1$, la série géométrique $\sum \alpha^n$ est convergente.

D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|x_{n+1} - x_n\| \leq \underbrace{\|x_1 - x_0\|}_{C^{te}} \alpha^n.$$

Le critère de comparaison pour les séries de terme général positif montre alors que la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ est convergente.

REMARQUE.— On a ainsi démontré la convergence absolue de la série télescopique $\sum (x_{n+1} - x_n)$. Comme E est un espace de dimension finie, cela prouve que cette série converge dans E et donc que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E .

2. a. Comme T est α -lipschitzienne,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|T(x_n) - T(\ell)\| \leq \alpha \|x_n - \ell\|.$$

Or la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ℓ , donc la suite de terme général $\|x_n - \ell\|$ converge vers 0 et, par encadrement, la suite de terme général $\|T(x_n) - T(\ell)\|$ tend vers 0.

Par définition, cela signifie que la suite $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $T(\ell) \in E$.

2. b. En tant que suite extraite d'une suite convergente de limite ℓ , la suite $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = T(x_n)$$

donc $T(\ell) = \ell$ par unicité de la limite.

3. On vient de démontrer que l'équation $T(x) = x$ admet au moins une solution $\ell \in E$.

Si cette équation admet deux solutions ℓ_1 et ℓ_2 , alors

$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \|T(\ell_1) - T(\ell_2)\| \leq \alpha \|\ell_1 - \ell_2\|$$

(puisque T est α -lipschitzienne). On en déduit que

$$\underbrace{(\alpha - 1)}_{<0} \underbrace{\|\ell_1 - \ell_2\|}_{\geq 0} \geq 0,$$

donc que $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$ et enfin que $\ell_1 = \ell_2$.

L'équation $T(x) = x$ admet donc exactement une solution dans E .

Partie B.

4. Il est clair que $T(0_E) = b$. Par conséquent, si $b \neq 0_E$, alors T n'est pas linéaire.

Réciproquement, si $b = 0_E$, alors $T = C$ est bien une application linéaire.

L'application T est donc linéaire si, et seulement si, $b = 0_E$.

5. Toute famille *finie* de nombres réels admet un plus grand élément, ce qui justifie l'existence de α .

✱ Le plus grand élément est un majorant. Par conséquent, si $\alpha = 0$, alors

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad 0 \leq \sum_{j=1}^d |c_{i,j}| \leq \alpha = 0.$$

Si une somme de termes positifs est nulle, alors chaque terme est nul. On en déduit que

$$\forall 1 \leq i \leq d, \forall 1 \leq j \leq d, \quad c_{i,j} = 0$$

et donc que $C = 0$.

La réciproque étant évidente, on en déduit que $\alpha = 0$ si, et seulement si, la matrice C est la matrice nulle.

6. Par définition de T et linéarité de C ,

$$T(x) - T(y) = C(x - y).$$

D'après la règle du calcul matriciel, la i -ième coordonnée du vecteur $C(x - y)$ est égale à

$$\sum_{j=1}^d c_{i,j} (x_j - y_j).$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad \left| \sum_{j=1}^d c_{i,j} (x_j - y_j) \right| \leq \sum_{j=1}^d |c_{i,j}| |x_j - y_j|.$$

Comme le max est un majorant,

$$\forall 1 \leq j \leq d, \quad |x_j - y_j| \leq \|x - y\|_{\infty}$$

et comme tous les $|c_{i,j}|$ sont positifs,

$$\sum_{j=1}^d |c_{i,j}| |x_j - y_j| \leq \sum_{j=1}^d |c_{i,j}| \|x - y\|_{\infty}.$$

Comme le max est un majorant et que $\|x - y\|_{\infty} \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^d |c_{i,j}| \|x - y\|_{\infty} \leq \alpha \|x - y\|_{\infty}.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad \left| \sum_{j=1}^d c_{i,j} (x_j - y_j) \right| \leq \alpha \|x - y\|_{\infty}.$$

On a un majorant indépendant du paramètre i , on peut donc passer au sup :

$$\|T(x) - T(y)\|_{\infty} = \|C(x - y)\|_{\infty} \leq \alpha \|x - y\|_{\infty}$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. Pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} Ax = b_0 &\iff \lambda Ax = \lambda b_0 \\ &\iff x = (x - \lambda Ax) + \lambda b_0 \\ &\iff x = (I_d - \lambda A)(x) + \lambda b_0. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $b = \lambda b_0$ pour que la résolution de $Ax = b_0$ se ramène à la résolution de $T(x) = x$.

8. On sait que la complexité de l'algorithme du pivot est $\mathcal{O}(d^3)$.

9. a. Pour que la méthode de la **partie A** puisse s'appliquer, il suffit de choisir $\lambda > 0$ de telle sorte que $\alpha < 1$.

Mais rien ne prouve qu'un tel choix soit toujours possible !

9. b. À chaque itération, on passe de x_k à x_{k+1} en appliquant T , c'est-à-dire en multipliant la colonne x_k par la matrice C et en ajoutant la colonne b . Les multiplications entre réels étant des opérations sensiblement plus coûteuses que les additions, c'est le nombre de multiplications qui va indiquer la complexité de l'opération.

Il faut calculer d coordonnées pour x_{k+1} et, pour chaque coordonnée, il faut effectuer d multiplications. Par conséquent, la complexité de chaque itération est en $\mathcal{O}(d^2)$ et la complexité de l'algorithme en $\mathcal{O}(nd^2)$ (puisqu'on effectue n itérations).

9. c. Cette méthode est plus intéressante que l'algorithme du pivot si :

- on peut effectivement choisir λ pour que $\alpha < 1$;
- on effectue sensiblement moins d'opérations que pour l'algorithme du pivot, soit pour $n \ll d$;
- d'après [[2.a.]], on sait dominer l'erreur résiduelle après la n -ième itération :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - \ell\| \leq \alpha^n \|x_0 - \ell\|$$

il faut donc choisir x_0 assez proche de ℓ (mais comment???) et α assez proche de 0 (est-ce possible???) pour que le nombre n d'itérations soit petit devant la dimension d .

Ça commence à faire beaucoup de *si* !

Partie C.

10. On a

$$C = \begin{pmatrix} 1-4\lambda & \lambda & \lambda \\ -\lambda & 1-4\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1-5\lambda \end{pmatrix}$$

donc

$$\alpha = \max\{|1-4\lambda| + 2|\lambda|; |1-5\lambda| + 2|\lambda|\}$$

(les contributions des deux premières lignes de C sont identiques) et $\alpha < 1$ si, et seulement si,

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| < 1 \quad \text{et} \quad |1-5\lambda| + 2|\lambda| < 1.$$

11. Pour $\lambda = 1/4$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |1-5\lambda| + 2|\lambda| = \frac{3}{4}$$

donc $\alpha = 3/4 < 1$.

• Pour $0 < \lambda \leq 1/4$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = 1 - 4\lambda + 2\lambda = 1 - 2\lambda$$

tandis que pour $1/4 \leq \lambda$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = 4\lambda - 1 + 2\lambda = 6\lambda - 1.$$

D'autre part, pour $0 < \lambda \leq 1/5$, on a

$$|1-5\lambda| + 2|\lambda| = 1 - 5\lambda + 2\lambda = 1 - 3\lambda$$

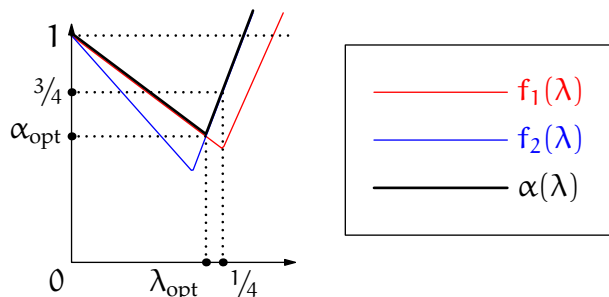
tandis que pour $1/5 \leq \lambda$, on a

$$|1-5\lambda| + 2|\lambda| = 5\lambda - 1 + 2\lambda = 7\lambda - 1.$$

On peut ainsi facilement tracer les graphes des fonctions

$$f_1 = [\lambda \mapsto |1-4\lambda| + 2|\lambda|] \quad \text{et} \quad f_2 = [\lambda \mapsto |1-5\lambda| + 2|\lambda|]$$

et en déduire le graphe de leur maximum, c'est-à-dire le graphe de $[\lambda \mapsto \alpha]$.



On voit ainsi qu'en prenant λ un peu inférieur à $1/4$, on obtient un α sensiblement plus petit (proche de $1/2$).

12. La résolution détaillée doit figurer sur la copie. En particulier, chaque étape de l'algorithme doit être codée selon les notations usuelles.

La solution du système est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$