Problème de Mathématiques

Référence pp1911 — Version du 15 octobre 2025

Les trois parties de ce problème sont complèment indépendantes.

Partie A. Coefficients de Fourier

1. a. Donner un exemple de série divergente $\sum u_n$ telle que la série $\sum u_n^2$ soit convergente.

1. b. On considère cette fois une série absolument convergente $\sum u_n$. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n|^2 \leqslant |u_n|$$

et en déduire que la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente.

1. c. Donner un exemple de série convergente $\sum u_n$ telle que la série $\sum u_n^2$ soit divergente.

2. Dans cette question, on considère une fonction

$$f \,:\, [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f(0) = f(2\pi)$ et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$
$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt.$$

2. a. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad c_n = \frac{-id_n}{n}.$$

2. b. En déduire que la série $\sum c_n^2$ est convergente.

2. c. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad |c_n| \leqslant \frac{1}{2n^2} + \frac{|d_n|^2}{2}.$$

2. d. *En admettant que* la série $\sum d_n^2$ soit absolument convergente (Théorème de Bessel), démontrer que la série $\sum c_n$ est absolument convergente.

3. On conserve les notations de la question précédente et on considère maintenant la fonction

$$f = [t \mapsto t(2\pi - t)]\,.$$

3. a. Tracer le graphe de f.

3. b. Vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} te^{-int}\,dt = \frac{2i\pi}{n}.$$

3. c. En déduire que la série $\sum c_n$ est absolument convergente.

Partie B. Transformée de Fourier

Soit f, une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-it/n}\,dt.$$

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

6. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. (On précisera sa limite.)

Partie C. Transformée de Laplace

Soit f, une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt.$$

7. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

8. Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

9. Démontrer que la suite de terme général $w_n = nv_n$ converge vers $f(0)$.

Solution ❀ Calcul intégral

Partie A. Coefficients de Fourier

1. a. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, tandis que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (cours).

1. b. Comme la série $\sum u_n$ est absolument convergente, son terme général u_n tend vers 0, donc (en prenant $\varepsilon = 1 > 0$ dans la définition) il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n - 0| \leqslant 1$$

et donc tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n^2| \leqslant |u_n|.$$

Par hypothèse, la série $\sum |u_n|$ est convergente. Par comparaison, la série de terme général *positif* $\sum |u_n^2|$ est elle aussi convergente, ce qui signifie que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

1. c. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (Critère spécial des séries alternées), tandis que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

REMARQUE.— D'après **[1.b.]**, pour trouver un contre-exemple, il faut choisir une série *semi-convergente* : c'est pour cette raison qu'on a choisi une série alternée.

2. a. Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut intégrer par parties (on intègre ici sur un segment). Comme $f(0) = f(2\pi)$,

$$\left[\frac{f(t)e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt$$

et donc que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad c_n = \frac{-id_n}{n}.$$

2. b. La fonction f' est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc elle est bornée :

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad \left|f'(t)e^{-int}\right| = \left|f'(t)\right| \leqslant \|f'\|_\infty.$$

On en déduit (Inégalité de la moyenne) que

$$|d_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f'(t)e^{-int}\right|\,dt \leqslant \|f'\|_\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $c_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$ d'après **[2.a.]** Par conséquent,

$$c_n^2 = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$ et, par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum c_n^2$ est absolument convergente.

Comme la convergence absolue implique la convergence (pour les séries complexes au moins), on en déduit que la série $\sum c_n^2$ est convergente.

2. c. D'après **[2.a.]**,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 2|c_n| = \frac{2|d_n|}{n}.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$,

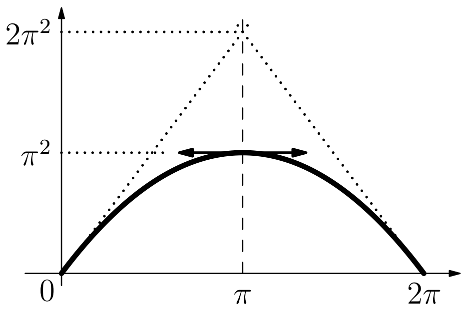
$$0 \leqslant \Big(|d_n| - \frac{1}{n}\Big)^2 = |d_n|^2 + \frac{1}{n^2} - 2|c_n|$$

donc on a bien :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad |c_n| \leqslant \frac{1}{2n^2} + \frac{|d_n|^2}{2}.$$

2. d. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ et, d'après l'énoncé, la série $\sum |d_n|^2$ convergent. On peut donc appliquer le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif à l'inégalité établie ci-dessus. Cela prouve que la série $\sum |c_n|$ est convergente, c'est-à-dire que la série $\sum c_n$ est absolument convergente.

3. a. Étude sans difficulté. Il est intéressant de mettre en évidence l'axe de symétrie et les tangentes aux deux extrémités du graphe.



REMARQUE.— On rappelle qu'un graphe doit être lisible et légendé...

3. b. Il suffit d'intégrer par parties en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt = 0.$$

3. c. On reprend les notations utilisées plus haut :

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad f'(t) = 2\pi - 2t.$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad d_n = \frac{-2i}{n}$$

et d'après **[2.a.]** (puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $f(0) = f(2\pi)$),

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad c_n = \frac{-2}{n^2}.$$

Comme $c_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$, la série $\sum c_n$ est bien absolument convergente.

Partie B. Transformée de Fourier

4. L'intégrande

$$\left[t \mapsto f(t)e^{-it/n}\right]$$

est le produit de la fonction f, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, et d'une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

5. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|f(t)e^{-it/n}\right| = \left|f(t)\right|$$

et comme la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par hypothèse), on déduit de l'Inégalité de la moyenne que

$$|u_n| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-it/n}\right| dt = \int_0^{+\infty} \left|f(t)\right| dt.$$

Comme le majorant est indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$, cela prouve que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

6. D'après **[4.]**, les fonctions

$$\varphi_n = \left[t \mapsto f(t)e^{-it/n}\right]$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (y compris pour $t = 0$),

$$\lim_{n\to+\infty} e^{it/n} = e^0 = 1$$

donc la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f. Enfin, comme on vient de le voir en **[5.]**, la convergence est dominée :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\varphi_n(t)\right| \leqslant \left|f(t)\right|.$$

D'après le Théorème de convergence dominée, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-it/n}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Partie C. Transformée de Laplace

7. Pour $n = 0$, la fonction f est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc il n'y a aucune raison d'imaginer qu'elle soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Mais, pour $n \geqslant 1$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|f(t)e^{-nt}\right| \leqslant \|f\|_\infty\, e^{-t}$$

et comme $[t \mapsto e^{-t}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence), on conclut que

$$\left[t \mapsto f(t)e^{-nt}\right]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi l'intégrale v_n est bien définie pour $n \geqslant 1$ (et seulement pour $n \geqslant 1$ en général).

8. En intégrant la majoration établie au **[7.]**, on obtient

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 1, \quad |v_n| &\leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-nt}\right| dt \\ &\leqslant \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \|f\|_\infty .\end{aligned}$$

Le majorant étant indépendant de n, cela prouve que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

9. Soit $n \geqslant 1$. D'après **[7.]**, la fonction

$$\left[t \mapsto f(t)ne^{-nt}\right]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le changement de variable affine

$$u = nt$$

prouve alors que la fonction

$$\varphi_n = \left[u \mapsto f\Big(\frac{u}{n}\Big)e^{-u}\right]$$

est elle aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(u)\, du = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt} n\, dt = w_n .$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, le quotient u/n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Comme f est continue en 0, le Théorème de composition des limites montre que

$$\varphi_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)e^{-u}.$$

Enfin, comme f est bornée, il est clair que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\varphi_n(u)\right| \leqslant \|f\|_\infty\, e^{-u}.$$

Le majorant est indépendant de l'indice n et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction de u (fonction intégrable de référence). On vient ainsi d'établir que la convergence est dominée et par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(u)\, du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\, du$$

ce qui revient à

$$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0).$$

Remarque.— En particulier, cela prouve que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 (ce qui est plus précis que le résultat du **[8.]**).