

Problème de Mathématiques

Référence pp1806 — Version du 15 octobre 2025

On note $I =]-1, +\infty[$ et $I^* = I \setminus \{0\}$. On étudie ici la fonction f définie par $f(0) = 1$ et par

$$\forall x \in I^*, \quad f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x(1+x)}.$$

On rappelle que la série de Poisson $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ converge absolument pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda.$$

1. Dans cette question, on étudie la fonction φ définie par

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) - (1 + 2x).$$

- 1.a. Calculer la dérivée φ' . Préciser la valeur de $\varphi'(0)$ et la limite de φ' au voisinage de $+\infty$.
- 1.b. Calculer la dérivée seconde φ'' . Préciser la valeur de $\varphi''(0)$.
- 1.c. En déduire le tableau des variations de φ . Que dire du signe de φ ?
- 1.d. Tracer l'allure du graphe de φ .
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^* .
- 3.a. Calculer le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de f .
- 3.b. La fonction f est-elle continue en 0? dérivable en 0?
- 3.c. En étudiant $f'(x)$ au voisinage de $x = 0$, démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- 4.a. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1 - e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

4.b. Expliciter une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- 4.c. Démontrer que la suite $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle.
- 4.d. En déduire que la série $\sum a_n x^n$ est convergente si, et seulement si, $|x| < 1$.

Solution ✿ Étude de fonctions

1. a. La fonction φ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = e^{-x}(-x^2 - x + 2) - 2.$$

En particulier, $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi'(x)$ tend vers -2 au voisinage de $+\infty$ (par croissances comparées de e^{-x} et des polynômes en x).

1. b. Pour tout $x \in I$,

$$\varphi''(x) = e^{-x}(x^2 - x - 3)$$

et en particulier $\varphi''(0) = -3$.

1. c. La dérivée seconde $\varphi''(x)$ est du signe du trinôme $x^2 - x - 3$. Comme le coefficient dominant de ce trinôme est positif, il est négatif entre ses racines. Le discriminant étant égal à 13, ces racines sont

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \in I.$$

Ainsi $\varphi''(x) < 0$ pour $-1 < x < \alpha$ et $\varphi''(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

• La dérivée φ' est donc strictement décroissante sur $]-1, \alpha]$. Comme $\varphi'(0) = 0$, on en déduit que $\varphi'(x) > 0$ pour $-1 < x < 0$ et $\varphi'(x) < 0$ pour $0 < x \leq \alpha$.

D'autre part, la dérivée φ' est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Mais comme elle tend vers -2 au voisinage de $+\infty$, on en déduit qu'elle reste strictement négative sur $[\alpha, +\infty[$ et donc en fait sur $]0, +\infty[$.

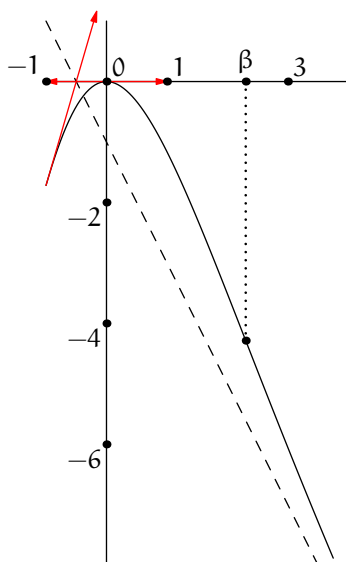
• La fonction φ est donc strictement croissante sur $]-1, 0]$, atteint son maximum en $x = 0$ (et ce maximum est nul : $\varphi(0) = 0$) et est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

• Finalement, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in I^*$.

1. d. On connaît maintenant les variations de φ sur I et en particulier on sait que son graphe possède une tangente horizontale à l'origine. Par ailleurs,

$$\varphi(x) + (1 + 2x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$$

tend vers 0 par valeurs *positives* lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote au graphe de φ et que ce graphe est situé *au-dessus* de son asymptote au voisinage de $+\infty$.



2. Comme la fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le numérateur

$$[x \mapsto 1 - e^{-x}]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^* .

Le dénominateur est une expression polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur I . Cette expression s'annule seulement pour $x = -1$ et pour $x = 0$, donc le quotient est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I privé de -1 (qui n'appartient pas à I) et de 0 , c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^* .

REMARQUE.— Surveillez votre langage! L'ensemble I^* est réunion de deux intervalles, mais n'est pas un intervalle.

3. a. Pour x voisin de 0,

$$1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc pour x voisin de 0 *mais non nul* (pour ne pas diviser par zéro) :

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Comme

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$

on en déduit que

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{5x^2}{3} + o(x^2).$$

3. b. On juge de la continuité de f en comparant la valeur $f(0)$ avec la limite de f au voisinage de 0. Or $f(0) = 1$ par définition et $f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 d'après le développement limité précédent. La fonction f est donc bien continue en 0.

Le développement limité de f calculé en **[3.a.]** est donc vrai au voisinage de 0, *y compris en* $x = 0$. Comme l'ordre de ce développement limité est supérieur à 1, on en déduit que la fonction f est dérivable en $x = 0$ et que la valeur de $f'(0)$ est égale au coefficient de x dans le développement limité. Autrement dit, $f'(0) = -3/2$.

3. c. Comme f est continue sur I^* d'après **[2.]** et continue en 0 d'après **[3.b.]**, elle est continue sur l'intervalle I tout entier.

Toujours d'après **[2.]**, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^* et d'après **[3.b.]**, elle est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = -3/2$.

Or, pour tout $x \in I^*$,

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2(1+x)^2}$$

et au voisinage de 0,

$$\varphi(x) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc

$$f'(x) = \frac{-3}{2} + o(1)$$

ce qui signifie que $f'(x)$ tend vers $f'(0)$ lorsque x tend vers 0.

D'après le théorème du prolongement de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

REMARQUE.— L'expression de la dérivée $f'(x)$ en fonction de φ montre que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur l'intervalle I , elle réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$J =]\lim_{+\infty} f, \lim_{-1} f[=]-\infty, \frac{e-1}{2}[$$

et comme f' ne s'annule pas, la bijection réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ (sur J).

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} &= 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k!} \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2} x^n}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (n = k-1)$$

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (pour ne pas diviser par zéro),

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

4. b. Pour tout $x \in I^*$, le réel $f(x)$ est le produit de

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

par

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

La première série converge absolument pour tout $x \in I^*$ (règle de D'Alembert), tandis que la seconde converge absolument seulement pour $|x| < 1$ (série géométrique de raison $(-x)$). On peut donc appliquer le théorème sur le produit de Cauchy pour $0 < |x| < 1$: la série de terme général

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{(k+1)!} \cdot (-1)^{n-k} x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \right) x^n$$

est absolument convergente et sa somme est égale à $f(x)$.

En choisissant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!},$$

on a donc

$$\forall 0 < |x| < 1, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Il reste à remarquer que $a_0 = 1 = f(0)$, ce qui prouve que l'égalité est encore vraie pour $x = 0$. On a donc :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} \right] x^n.$$

4. c. D'après la question précédente, $|a_n|$ converge vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 > 0.$$

4. d. On sait depuis [4.b.] que la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout réel x tel que $|x| < 1$.

Réciproquement, si $|x| \geq 1$, alors

$$|a_n x^n| \geq \frac{e-1}{2} \cdot 1^n$$

pour tout entier n assez grand, donc la série $\sum a_n x^n$ est grossièrement divergente.

Par conséquent, la série $\sum a_n x^n$ est convergente si, et seulement si, $|x| < 1$.