Problème de Mathématiques

Référence pp1902 — Version du 15 octobre 2025

Pour $0 < x \leqslant 1$, on pose
$$f(x) = x \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x^x.$$

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels qu'en posant $f(0) = a$ et $g(0) = b$, on définisse des prolongements de f et g continus sur le segment $[0, 1]$.

2. On note alors
$$I = \int_0^1 g(t)\,dt$$
et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 f^n(t)\,dt$$
ainsi que
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

2. a. Étudier les variations de f et g sur $[0, 1]$.

2. b. Justifier rapidement l'existence de I et des u_n.

2. c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

2. d. Calculer u_0 et u_1.

2. e. Par intégration par parties successives, démontrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

2. f. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.

2. g. Écrire en langage Python une fonction `somme(n)` d'argument $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur de S_n.

3. a. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall\, \frac{-1}{e} \leqslant x \leqslant 0, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

3. b. En déduire que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

3. c. Conclure.

4. Écrire une fonction `estimation(eps)` ayant pour argument $\varepsilon > 0$ et qui retourne une valeur approchée de l'intégrale I à ε près.

Solution ❀ Somme d'une série

1. Il est clair que f et g sont continues sur $]0,1]$. On *sait* que $x\,\ell n\,x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
En posant $f(0)=0$, on prolonge f en une fonction continue sur $[0,1]$.
Par définition, $g(x)=\exp[f(x)]$ pour $0<x\leqslant 1$. En posant $g(0)=1=\exp(0)$, on a donc $g=\exp\circ f$ sur $[0,1]$, donc on prolonge g en une fonction continue sur $[0,1]$.

2. a. La fonction f est dérivable sur $]0,1]$ et, pour $0<x\leqslant 1$, on a

$$f'(x)=1+\ell n\,x=\ell n(ex).$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est décroissante sur $[0,1/e]$ et croissante sur $[1/e,1]$. Comme $f(0)=0=f(1)$, la fonction f est négative sur $[0,1]$. Enfin, elle atteint son minimum en $x=1/e$ et ce minimum est égal à $f(1/e)=-1/e$.

❧ Comme $g=\exp\circ f$ et que exp est croissante, on déduit des variations de f que g est décroissante sur $[0,1/e]$ et croissante sur $[1/e,1]$ et

$$\forall\,x\in[0,1],\quad e^{-1/e}=g(1/e)\leqslant g(x)\leqslant g(0)=g(1)=1.$$

2. b. Les fonctions g et f^n sont *continues* sur le *segment* $[0,1]$, donc les intégrales I et u_n sont bien définies.

2. c. D'après l'étude des variations de f,

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\ \forall\,t\in[0,1],\quad \left|f^n(t)\right|\leqslant e^{-n}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|u_n|\leqslant\frac{1}{n!}\int_0^1\left|f^n(t)\right|dt\leqslant\frac{e^{-n}}{n!}\leqslant\frac{1}{n!}$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. d. Il est clair que $u_0=1$.
Comme f est continue sur $[0,1]$,

$$u_1=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 t\,\ell n\,t\,dt.$$

En intégrant par parties avant de faire tendre ε vers 0, on trouve que

$$u_1=-\int_0^1\frac{t}{2}\,dt=\frac{-1}{4}$$

(puisque $t^2\,\ell n\,t$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0).

2. e. Question difficile : il faut expliciter l'hypothèse de récurrence (puisque l'indication *intégration par parties successives* suggère une démonstration par récurrence) et mettre ses idées dans l'ordre pour produire une copie lisible et convaincante.

❧ L'égalité attendue est vraie pour $n=0$ et $n=1$ d'après la question précédente.

❧ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on démontre par récurrence (sur k) que, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^{n+1}(\ell n\,t)^{k+1}\,dt=\frac{-(k+1)}{n+2}\int_0^1 t^{n+1}(\ell n\,t)^k\,dt.$$

(L'hérédité se démontre en intégrant par parties sur le segment $[\varepsilon,1]$ et en faisant ensuite tendre ε vers 0 : c'est assez long, il faut être soigneux dans le passage à la limite.)

❧ Cette propriété établie (ou seulement admise si on ne veut pas y passer trop de temps), on en déduit par une nouvelle démonstration par récurrence que

$$\int_0^1[f(t)]^n\,dt=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}\int_0^1 t^n\,dt=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et donc que

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

2. f. Pour tout $n\geqslant 1$,

$$|u_n|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$$

et comme le second membre est le terme général d'une série (géométrique) convergente, la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Comme la convergence absolue implique la convergence, la série $\sum u_n$ est bien convergente.

2. g. Une fois encore, on évite de recourir aux fonctions python disponibles pour mener les calculs à l'aide des opérations élémentaires... (En l'occurrence, ce n'est pas vraiment raisonnable.)

```
def S(n):
  somme, sgn = 1, -1.0
  for k in range(2, n+3):
    prod = sgn
    for i in range(k):
      prod /= k
    somme += prod
    sgn = -sgn
  return somme
```

3. a. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\varphi = \exp$ (*what else ?*) à l'ordre n. Il est clair que, pour tout $x < 0$,

$$\sup_{y\in[x,0]} \left|\varphi^{(n+1)}(y)\right| = \sup_{y\in[x,0]} e^y = e^0 = 1$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| &= \left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k\right| \\ &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times 1 \leqslant \frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

pour tout $-1/e \leqslant x \leqslant 0$.

3. b. D'après l'étude des variations de f,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \frac{-1}{e} \leqslant f(t) \leqslant 0.$$

On peut donc appliquer l'encadrement précédent avec $x = f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Par linéarité de l'intégrale,

$$I - S_n = \int_0^1 e^{f(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{[f(t)]^k}{k!}\,dt.$$

Une fois encore par inégalité de la moyenne, on en déduit que

$$|I - S_n| \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)!}\,dt = \frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)!}.$$

3. c. Comme le majorant tend vers 0, on en déduit que la somme de la série $\sum u_n$ est égale à l'intégrale I.

REMARQUE.— C'est utile, car on ne sait pas calculer cette intégrale autrement...

4. Dans un premier temps, on détermine un entier n tel que

$$\frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)!} \leqslant \varepsilon.$$

On calcule ensuite S_n.

```
def erreur(eps):
  e = 2.7818281828
  err, n = 1/e, 0
  while err>eps:
    n += 1
    err /= e*(n+1)
  return n
```

```
def estimation(eps):
  n = erreur(eps)
  return S(n)
```

REMARQUE.— Les applications numériques montrent qu'on ne gagnerait rien à utiliser le critère spécial des séries alternées pour majorer le reste de la série $\sum u_n$ (elle converge beaucoup trop vite pour exploiter la différence d'ordre de grandeur des deux majorants du reste).