Problème de Mathématiques

Référence pp1814 — Version du 15 octobre 2025

On cherche les fonctions x et y de classe $\mathscr{C}^1$ qui vérifient le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases} \tag{S}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie A. Réduction d'une matrice

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - 2I_2.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. On le présentera sous forme factorisée.
2. Calculer le rang, l'image et le noyau de la matrice B. En déduire la matrice B^2.
3. On considère une matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

3. a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice P soit inversible.
3. b. Démontrer qu'il existe un, et un seul, couple (a, b) tel que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les valeurs de a et b.
3. c. Que vaut alors $P^{-1}AP$?
4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n comme une combinaison linéaire de I_2 et de A.

Partie B. Application

Quelles que soient les applications x et y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la matrice colonne définie par

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

est considérée comme une fonction de t de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée a pour expression

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la colonne $Y(t)$ par

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$$

où P est la matrice étudiée dans la première partie.
5. a. Démontrer que les fonctions u et v ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. b. En déduire que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = (P^{-1}AP)Y(t).$$

5. c. En déduire qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = (K_1 + K_2 t)e^{2t} \\ v(t) = K_2 e^{2t} \end{cases}.$$

6. Quelle est l'expression générale des solutions du système (S) ?

Solution ❀ Résolution d'un système différentiel

Partie A. Réduction d'une matrice

1. Le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = \det(A - tI_2)$$

(puisque la taille de la matrice est *paire*) et égal à

$$X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$

2. Comme

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il est clair que le rang de B est égal à 1 ; que l'image de B, engendrée par les colonnes de B, est la droite vectorielle dirigée par la matrice colonne

$$U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de B est aussi une droite vectorielle (théorème du rang) et comme les colonnes de B vérifient $C_1 - C_2 = 0$, on en déduit que la colonne U_0 appartient au noyau de B et dirige donc le noyau de B.

❧ Comme $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} B$, on en déduit que $B^2 = 0_2$.

3. a. Comme $\det(P) = b - a$, la matrice P est inversible si, et seulement si, $a \neq b$.

3. b. Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice B.

Analyse. S'il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors le vecteur ε_1 appartient au noyau de f (première colonne) et $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2)$ (deuxième colonne).

On connaît le noyau de f : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \alpha \cdot U_0$$

et la condition sur P impose de choisir

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors ε_2 parmi les solutions de

$$BX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière de cette équation est bien entendu

$$X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et d'après le principe de superposition, la solution générale de cette équation est

$$X = X_0 + \alpha \cdot U_0 = \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(puisque U_0 dirige le noyau de B). La condition sur la deuxième colonne de P impose de choisir $\alpha = -2$ et donc

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Synthèse. Par **[3.a.]**, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible. D'après les formules de Cramer,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct ou d'après l'analyse précédente,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. c. Comme $A = B + 2I_2$, alors

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}BP + 2P^{-1}I_2P = P^{-1}BP + 2I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Comme les matrices B et $2I_2$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme.

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n &= (2I_2 + B)^n \\ &= 2^n I_2 + 2^{n-1} nB \qquad \text{(car B est nilpotente d'indice 2)} \\ &= 2^n I_2 + 2^{n-1} n(A - 2I_2) \\ &= 2^n (n+1) I_2 + 2^{n-1} nA \end{aligned}$$

On remarque que le résultat est vrai aussi pour $n = 0$.

Partie B. Application

5. a. Par hypothèse, les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D'après **[3.b.]** (calcul de P^{-1}), $u = 2x + y$ et $v = -x - y$. Ainsi, les fonctions u et v, en tant que combinaisons linéaires de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, sont de classe $\mathscr{C}^1$.

5. b. D'après la question précédente,

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x'(t) + y'(t) \\ -x'(t) - y'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t).$$

Or $X'(t) = AX(t)$, donc

$$Y'(t) = P^{-1}AX(t) = (P^{-1}AP)[P^{-1}X(t)] = (P^{-1}AP)Y(t).$$

5. c. L'équation différentielle précédente se traduit par un système différentiel triangulaire.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) + v(t) \\ v'(t) = 2v(t) \end{cases}$$

D'après la deuxième équation, il existe une constante K_2 telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = K_2 e^{2t}.$$

La première équation devient alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) - 2u(t) = K_2 e^{2t}.$$

On applique la méthode usuelle pour résoudre cette équation différentielle linéaire du premier ordre : il existe une constante K_1 telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = K_1 e^{2t} + K_2 t e^{2t}.$$

6. Comme $X(t) = PY(t)$, on déduit de la question précédente que l'expression générale des solutions de (S) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (K_1 + K_2 t)e^{2t} \\ K_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

d'où on déduit enfin que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = K_1 e^{2t} + K_2(1+t)e^{2t} \\ y(t) = -K_1 e^{2t} - K_2(2+t)e^{2t} \end{cases}.$$

REMARQUE.— Il y a deux constantes d'intégration (puisqu'il s'agit d'un système différentiel du premier ordre en dimension deux) et ces deux constantes d'intégration relient les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ entre elles.