

## Problème de Mathématiques

Référence pp1801 — Version du 3 novembre 2025

---

Pour toute fonction  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , on pose

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

et on définit la fonction

$$\omega_f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$\omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0, 1], |x - y| \leq t\}$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ . La fonction  $\omega_f$  est le **module de continuité** de  $f$ .

1. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ .

1.a. Démontrer que la fonction  $\omega_f$  est bien définie sur  $[0, 1]$ , qu'elle vérifie

$$\omega_f(0) = 0$$

et qu'elle est croissante sur  $[0, 1]$ .

1.b. Soient  $t_1$  et  $t_2$ , deux réels appartenant au segment  $[0, 1]$ , tels que

$$t_1 + t_2 \leq 1.$$

Démontrer que

$$\omega_f(t_1 + t_2) \leq \omega_f(t_1) + \omega_f(t_2).$$

1.c. En déduire que la fonction  $\omega_f$  est continue à droite en chaque point de  $[0, 1[$  si, et seulement si, elle est continue en 0.

1.d.  $(\star)$  En justifiant la continuité uniforme de  $f$ , démontrer que  $\omega_f$  est continue sur  $[0, 1]$ .

2. On considère ici la fonction

$$q = [x \mapsto \sqrt{x}] : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

2.a. Soit  $t \in [0, 1]$ . Étudier les variations de la fonction

$$[x \mapsto \sqrt{x+t} - \sqrt{x}]$$

pour  $x \in [0, 1-t]$ .

2.b. En déduire l'expression de la fonction  $\omega_q$ .

3. On considère dans cette question une fonction continue

$$\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie les propriétés établies en [1.a.] et [1.b.]

3.a. Soient  $0 \leq x < y \leq 1$ . Démontrer que

$$0 \leq \omega(y) - \omega(x) \leq \omega(y-x).$$

3.b. On choisit alors une constante réelle  $K$  et on pose

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(t) = K + \omega(t).$$

Démontrer que  $K = f(0)$  puis que le module de continuité  $\omega_f$  de  $f$  est égal à la fonction  $\omega$ .

4. On considère une fonction  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$  et son module de continuité  $\omega_f$ . On fixe  $0 < t \leq 1$ .

4.a. Démontrer par récurrence que

$$\omega_f(pt) \leq p\omega_f(t)$$

pour tout  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $pt \leq 1$ .

4.b. En déduire que

$$\omega_f(\lambda t) \leq (\lambda + 1)\omega_f(t)$$

pour tout réel  $\lambda$  tel que  $0 \leq \lambda t \leq 1$ .

☞ On pourra considérer la partie entière  $p = \lfloor \lambda \rfloor$  du réel  $\lambda$ .

4. c. Démontrer l'alternative suivante :

- ou bien  $\omega_f(t) > 0$
- ou bien la fonction  $\omega_f$  est identiquement nulle sur  $[0, 1]$ .

5. Soit  $\omega$ , une fonction continue non identiquement nulle sur  $[0, 1]$ , qui vérifie les propriétés [1.a.] et [1.b.]

5. a. On note alors  $C_\omega$ , l'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $[0, 1]$  pour lesquelles il existe une constante  $M$  avec

$$\forall 0 \leq x, y \leq 1, \quad |f(x) - f(y)| \leq M \omega(|x - y|).$$

Montrer que  $C_\omega$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ .

5. b. Pour toute fonction  $f \in C_\omega$ , on pose

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)}.$$

Démontrer que l'application  $[f \mapsto \|f\|]$  est une norme sur l'espace  $C_\omega$ .

## Solution    ❁    Module de continuité

**1. a.** Soit  $t \in [0, 1]$ , fixé.

La fonction  $f$  est *continue* sur le segment  $[0, 1]$ , donc elle est bornée et, par inégalité triangulaire,

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty$$

quels que soient les réels  $x$  et  $y$  de  $[0, 1]$  tels que  $|x - y| \leq t$ . Par conséquent, l'ensemble

$$E_t = \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0, 1], |x - y| \leq t\}$$

est une partie non vide et majorée (par  $2\|f\|_\infty$ ) de  $\mathbb{R}$  : cet ensemble admet donc une borne supérieure, ce qui prouve que  $\omega_f(t)$  est bien défini pour chaque valeur de  $t \in [0, 1]$ . La fonction  $\omega_f$  est donc bien définie sur  $[0, 1]$ .

❁ Pour  $t = 0$ , la contrainte  $|x - y| \leq t$  impose  $y = x$ , donc

$$E_0 = \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0, 1], |x - y| \leq 0\} = \{0\}$$

et par conséquent  $\omega_f(0) = 0$ .

❁ Soient  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux réels de  $[0, 1]$  tels que  $|x - y| \leq t_1$ , alors il est clair que  $|x - y| \leq t_2$ . Par conséquent,

$$E_{t_1} \subset E_{t_2}$$

et par croissance de l'opérateur sup,

$$\omega_f(t_1) \leq \omega_f(t_2).$$

La fonction  $\omega_f$  est donc croissante sur  $[0, 1]$ .

**1. b.** Soient  $x$  et  $z$  dans  $[0, 1]$  tels que  $|z - x| \leq t_1 + t_2$ . Par symétrie, on peut supposer que

$$x \leq z \leq x + (t_1 + t_2)$$

et deux cas se présentent alors :

$$x \leq z \leq x + t_1 \quad \text{ou} \quad x + t_1 \leq z \leq (x + t_1) + t_2.$$

Dans le premier cas, par définition de  $\omega_f$ ,

$$|f(z) - f(x)| \leq \omega_f(t_1)$$

et dans le second cas,

$$|f(z) - f(x + t_1)| \leq \omega_f(t_2).$$

On déduit alors de l'astuce taupinale que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(x)| &\leq |f(z) - f(x + t_1)| + |f(x + t_1) - f(x)| \\ &\leq \omega_f(t_2) + \omega_f(t_1). \end{aligned}$$

Ainsi, quels que soient  $x$  et  $z$  dans  $[0, 1]$  tels que  $|z - x| \leq t_1 + t_2$ , on a

$$|f(z) - f(x)| \leq \omega_f(t_1) + \omega_f(t_2).$$

Comme le second membre ne dépend ni de  $x$ , ni de  $z$ , on peut passer au sup et en déduire que

$$\omega_f(t_1 + t_2) \leq \omega_f(t_1) + \omega_f(t_2).$$

**1. c.** Si  $\omega_f$  est continue à droite sur  $[0, 1]$ , elle est en particulier continue à droite en  $t = 0$  et comme la fonction  $\omega_f$  n'est pas définie à gauche de 0, elle est donc continue en  $t = 0$ .

❁ Réciproquement, supposons que  $\omega_f$  soit continue en 0.

Soit  $t \in [0, 1]$ . Comme la fonction  $\omega_f$  est croissante sur  $[0, 1]$ , pour chaque réel  $0 \leq \alpha < 1 - t$ ,

$$\omega_f(t) \leq \omega_f(t + \alpha) \leq \omega_f(t) + \omega_f(\alpha)$$

d'après la question précédente. Comme  $\omega_f$  est continue en 0 et que  $\omega_f(0) = 0$ , le terme  $\omega_f(\alpha)$  tend vers 0 lorsque  $\alpha$  tend vers 0 et, par encadrement,  $\omega_f(t + \alpha)$  tend vers  $\omega_f(t)$ .

La fonction  $\omega_f$  est donc continue à droite en chaque  $t \in [0, 1]$ .

**1. d.** Fixons  $\varepsilon > 0$ , une fois pour toutes.

♣ Comme  $f$  est *continue* sur le *segment*  $[0, 1]$ , elle est en fait uniformément continue. Il existe donc un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$$

quels que soient  $u$  et  $v$  dans  $[0, 1]$  tels que  $|u - v| \leq \alpha$ .

Soient  $s$  et  $t$  dans  $[0, 1]$  avec  $|s - t| \leq \alpha$ . Par symétrie, on peut supposer que  $s \leq t \leq s + \alpha$ . Par croissance de  $\omega_f$ , on sait déjà que

$$\omega_f(s) \leq \omega_f(t).$$

♣ Considérons maintenant  $x$  et  $y$  dans  $[0, 1]$  tels que  $|x - y| \leq t$ . Par symétrie, on peut supposer que

$$x \leq y \leq x + t.$$

Deux cas se présentent :

— Ou bien  $x \leq y \leq x + s$  et dans ce cas

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(s).$$

— Ou bien  $x + s \leq y \leq x + t$  et dans ce cas

$$0 \leq y - (x + s) \leq t - s \leq \alpha.$$

D'après l'astuce taupinale et la continuité uniforme de la fonction  $f$ ,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f(x + s)| + |f(x + s) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon + \omega_f(s). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a donc

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega_f(s) + \varepsilon$$

quels que soient  $x$  et  $y$  tels que  $|y - x| \leq t$ . Comme le second membre est indépendant de  $x$  et de  $y$ , on peut passer au sup et en déduire que

$$\omega_f(t) \leq \omega_f(s) + \varepsilon.$$

♣ On a ainsi démontré que

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq s + \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \omega_f(t) - \omega_f(s) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que la fonction  $\omega_f$  est (uniformément) continue sur  $[0, 1]$ .

**2. a.** Le plus simple est de faire apparaître la quantité conjuguée. Comme

$$\sqrt{x+t} - \sqrt{x} = \frac{t}{\sqrt{x} + \sqrt{x+t}},$$

il s'agit clairement d'une quantité positive qui décroît en fonction de  $x \in [0, 1-t]$  (le paramètre  $t$  est fixé) et cette quantité est donc maximale pour  $x = 0$ .

REMARQUE.— On peut aussi remarquer que la dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x+t} - \sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x+t}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

est négative (puisque le premier dénominateur est plus grand que le second).

**2. b.** Si  $x \leq y$ , alors

$$|x - y| \leq t \iff x \leq y \leq x + t$$

et comme  $q$  est croissante, pour  $x \leq y \leq x + t$ ,

$$|q(y) - q(x)| = q(y) - q(x) \leq q(x+t) - q(x).$$

Comme on impose en outre  $y \leq 1$ , on a  $x + t \leq 1$ , soit  $x \leq 1 - t$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \omega_q(t) &= \sup\{|\sqrt{y} - \sqrt{x}| : x, y \in [0, 1], |x - y| \leq t\} \\ &= \sup_{x \in [0, 1-t]} \sqrt{x+t} - \sqrt{x} = \sqrt{0+t} - \sqrt{0} = \sqrt{t} \end{aligned}$$

d'après l'étude précédente. On en déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \omega_q(t) = q(t).$$

**3. a.** Soient  $0 \leq x < y \leq 1$ . Par [1.a.], la fonction  $\omega$  est croissante, donc  $0 \leq \omega(y) - \omega(x)$ . Posons maintenant  $t_1 = x$  et  $t_2 = y - x$  de telle sorte que  $t_1$  et  $t_2$  appartiennent à  $[0, 1]$  et que  $t_1 + t_2 = y \leq 1$ . D'après [1.b.],

$$\omega(y) = \omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2) = \omega(x) + \omega(y - x)$$

c'est-à-dire

$$\omega(y) - \omega(x) \leq \omega(y - x).$$

**3. b.** D'après [1.a.], on a  $\omega(0) = 0$ , donc

$$K = K + \omega(0) = f(0).$$

• Soit  $t \in [0, 1]$ .

Avec  $x = 0$  et  $y = t$ , on a  $0 \leq x, y \leq 1$  et  $|x - y| \leq t$ . On a alors

$$|f(y) - f(x)| = f(t) - f(0) = [K + \omega(t)] - [K + \omega(0)] = \omega(t)$$

donc  $\omega_f(t) \geq \omega(t)$  (par définition de  $\omega_f$ ).

Réciproquement, d'après [3.a.], si  $0 \leq x \leq y \leq 1$  sont deux réels tels que  $|x - y| \leq t$ , alors

$$|f(x) - f(y)| = \omega(y) - \omega(x) \leq \omega(y - x) \leq \omega(t)$$

puisque  $\omega$  est croissante ([1.a.]) et que  $y - x \leq t$ . Le second membre ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$  : en passant au sup, on en déduit que  $\omega_f(t) \leq \omega(t)$ .

Par double inégalité, on en déduit que  $\omega_f = \omega$ .

REMARQUE.— Comme la définition du module de continuité  $\omega_f$  ne fait intervenir que les *variations* de la fonction  $f$ , il est naturel que la valeur de la constante additive  $K$  n'apparaisse pas dans l'expression de  $\omega_f$ .

**4. a.** L'inégalité est vraie pour  $p = 0$  puisque  $\omega_f(0) = 0$  ([1.a.]) et évidente pour  $p = 1$ .

Supposons que  $\omega_f(pt) \leq p\omega_f(t)$  pour un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $(p + 1)t \leq 1$ . En posant  $x = pt$  et  $y = (p + 1)t$ , on a bien  $0 \leq x < y \leq 1$  et on déduit alors de [3.a.] et de l'hypothèse de récurrence que

$$\omega_f(y) \leq \omega_f(x) + \omega_f(y - x) \leq p\omega_f(t) + \omega_f(t) = (p + 1)\omega_f(t).$$

On en déduit que  $\omega_f(pt) \leq p\omega_f(t)$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $pt \leq 1$ .

REMARQUE.— Comme on effectue une démonstration par récurrence *finie*, il faut bien distinguer l'hypothèse de récurrence de la conclusion : on fait l'hypothèse de récurrence pour  $(p + 1)t \leq 1$  et on conclut pour  $pt \leq 1$ .

**4. b.** On pose  $p = [\lambda] \in \mathbb{N}$  : par définition,

$$p \leq \lambda < (p + 1)$$

et par hypothèse sur  $\lambda$ , on a  $pt \leq 1$ .

On choisit alors  $x = pt$  et  $y = \lambda t$  de telle sorte que  $0 \leq x \leq y \leq 1$ .

Si  $x = y$ , alors  $\lambda = p$  et dans ce cas très particulier,

$$\omega_f(\lambda t) = \omega_f(pt) \leq p\omega_f(t) \leq (\lambda + 1)\omega_f(t).$$

Dans le cas général, on a  $0 \leq x < y \leq 1$  et on déduit alors de [3.a.] que

$$0 \leq \omega_f(\lambda t) - \omega_f(pt) \leq \omega_f([\lambda - p]t) \leq \omega_f(t)$$

puisque  $0 \leq (\lambda - p)t \leq t$  et que  $\omega_f$  est croissante. Comme  $\omega_f(t) \geq 0$ , on en déduit que

$$\omega_f(\lambda t) \leq (p + 1)\omega_f(t) \leq (\lambda + 1)\omega_f(t).$$

**4. c.** Par [1.a.], la fonction  $\omega_f$  est positive sur  $[0, 1]$ . Supposons que  $\omega_f(t) = 0$  et, pour  $x \in [0, 1]$ , posons  $\lambda = x/t$  (ce qui est possible car  $t > 0$ ). On a alors  $\lambda t \leq 1$  et donc

$$0 \leq \omega_f(x) = \omega_f(\lambda t) \leq (\lambda + 1)\omega_f(t) = 0$$

ce qui prouve que la fonction  $\omega_f$  est nulle sur  $[0, 1]$ .

**5. a.** On applique le critère habituel.

• Soit  $f \in C_\omega$ . Pour tout  $x_0 \in [0, 1]$  et pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $y = x_0 + h \in [0, 1]$ ,

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq M \omega(|h|).$$

Comme  $\omega$  est continue en 0 et que  $\omega(0) = 0$  par [1.a.], on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} M \omega(|h|) = 0$$

et par comparaison  $f(x_0 + h)$  tend vers  $f(x_0)$  lorsque  $h$  tend vers 0. Cela prouve que  $f$  est continue en chaque point  $x_0$  de  $[0, 1]$  et donc que l'ensemble  $C_\omega$  est contenu dans l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ .

• La fonction nulle appartient à  $C_\omega$  (pour cette fonction, le membre de gauche est toujours nul, donc la constante  $M = 0$  convient).

• Si les fonctions  $f$  et  $g$  appartiennent toutes les deux à  $C_\omega$ , alors il existe deux constantes  $M_1$  et  $M_2$  telles que

$$|f(x) - f(y)| \leq M_1 \omega(|x - y|)$$

et que

$$|g(x) - g(y)| \leq M_2 \omega(|x - y|)$$

pour tout  $x$  et tout  $y$  de  $[0, 1]$ . Pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} |(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(y)| &= |\lambda[f(x) - f(y)] + [g(x) - g(y)]| \\ &\leq |\lambda| |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq (|\lambda| M_1 + M_2) \omega(|x - y|) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la combinaison linéaire  $\lambda f + g$  appartient à l'ensemble  $C_\omega$  (avec la constante  $M = |\lambda| M_1 + M_2$  par exemple).

Ce qui précède prouve que  $C_\omega$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ .

**5.b.** D'après la question précédente,  $C_\omega$  est bien un *espace vectoriel*.

• Toute fonction  $f \in C_\omega$  est en particulier une fonction continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc une fonction bornée. Par conséquent,  $\|f\|_\infty$  existe bien et c'est un réel positif.

Par ailleurs, la fonction  $\omega$  n'est pas identiquement nulle, donc

$$\forall t > 0, \quad \omega(t) > 0$$

d'après [4.c.] et par conséquent, le quotient

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)}$$

est bien défini quels que soient  $x \neq y$ . Par définition de  $C_\omega$ , ce quotient, positif, est majoré par une constante réelle  $M$ , donc sa borne supérieure est également bien définie et positive.

Comme la somme de deux réels positifs est un réel positif, on vient donc de démontrer que  $\|\cdot\|$  est une application de l'espace vectoriel  $C_\omega$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

• Quel que soit le scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{\omega(|x - y|)} = \underbrace{|\lambda|}_{\geq 0} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)}$$

et en passant au sup par rapport à  $x$  et  $y$ , on en déduit que

$$\sup_{x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{\omega(|x - y|)} = \underbrace{|\lambda|}_{\geq 0} \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)}.$$

Par ailleurs, comme  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme,  $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$  et par somme, on en déduit que  $\|\cdot\|$  est positivement homogène :

$$\forall f \in C_\omega, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|.$$

• Il est clair que  $0 \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|$ . Donc : si  $\|f\| = 0$ , alors  $\|f\|_\infty = 0$  et comme  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme, on en déduit que  $f$  est l'application identiquement nulle, c'est-à-dire le vecteur nul de l'espace vectoriel  $C_\omega$ .

• Quelles que soient les fonctions  $f$  et  $g$  dans  $C_\omega$ , quels que soient  $x \neq y$ ,

$$\frac{|(f + g)(x) - (f + g)(y)|}{\omega(|x - y|)} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)} + \frac{|g(x) - g(y)|}{\omega(|x - y|)}.$$

Comme le sup est un majorant, on en déduit que

$$\frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{\omega(|x-y|)} \leq [\|f\| - \|f\|_\infty] + [\|g\| - \|g\|_\infty].$$

Le second membre étant indépendant de  $x$  et  $y$ , on peut passer au sup et en déduire que

$$\sup_{x \neq y} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{\omega(|x-y|)} \leq \|f\| - \|f\|_\infty + \|g\| - \|g\|_\infty$$

et donc que

$$\begin{aligned} \|f+g\| &\leq \|f\| + \|g\| + \|f+g\|_\infty - \|f\|_\infty - \|g\|_\infty \\ &\leq \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

(inégalité triangulaire pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ).

Finalement,  $\|\cdot\|$  est bien une norme sur  $C_\omega$ .