

Problème de Mathématiques

Référence pp1516 — Version du 15 octobre 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, on pose

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x).$$

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos t) = \cos nt.$$

2. Expliciter T_0 , T_1 et T_2 .

3. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], \quad T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0.$$

4. En déduire que les T_n sont des applications polynomiales à coefficients entiers. Préciser leur parité, leur degré et leur coefficient dominant.

Le polynôme T_n est appelé n -ième **polynôme de Tchebychev** (de première espèce).

5. Déduire de [1.] que T_n est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre.

6. Pour toute fonction f continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|.$$

6.a. Calculer $\|T_n\|_\infty$.

6.b. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \quad |\sin nu| \leq n|\sin u|.$$

6.c. En déduire que $\|T'_n\|_\infty = n^2$.

7. Soit $x > 1$.

7.a. Démontrer que

$$\forall r > 0, \quad T_n\left(\frac{r + r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

On pourra poser $r = e^t$.

7.b. Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$x = \frac{r + r^{-1}}{2}.$$

7.c. En déduire que

$$1 \leq T_n(x) \leq (x + \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

8. On note $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$, la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la subdivision $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $[-1, 1]$ définie par

$$\forall 0 \leq j \leq n, \quad a_j = \cos\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi.$$

8.a. Résoudre l'équation $|T_n(x)| = 1$ sur $\mathbb{R}$.

8.b. Calculer $T'_n(a_j)$ pour $0 \leq j \leq n$.

8.c. Démontrer que

$$T_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} L_j.$$

8.d. En déduire que

$$\forall x \geq 1, \quad T_n(x) = \sum_{j=0}^n |L_j(x)|.$$

8.e. Démontrer que

$$\forall x \geq 1, \quad |P(x)| \leq \|P\|_\infty (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

Solution ✱ Polynômes de Tchebychev

1. Par définition d'Arccos,

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos t) = t$$

donc

$$\forall t \in [0, \pi], \quad T_n(\cos t) = \cos[n \text{Arccos}(\cos t)] = \cos(nt).$$

Les deux membres de cette égalité sont des fonctions paires et 2π -périodiques de t : comme elles coïncident sur $[0, \pi]$, elles coïncident en fait sur $\mathbb{R}$.

2. Il est clair que $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Pour $x \in [-1, 1]$,

$$T_2(x) = \cos(2 \text{Arccos } x) = 2 \cos^2(\text{Arccos } x) - 1 = 2x^2 - 1$$

donc $T_2 = 2X^2 - 1$.

3. Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$ (le réel $t = \text{Arccos } x$ convient) et

$$\begin{aligned} 2xT_{n+1}(x) &= 2 \cos t \cos(n+1)t \\ &= \cos[(n+1)t + t] + \cos[(n+1)t - t] \\ &= T_{n+2}(x) + T_n(x) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Par [2.], il est clair que T_0 et T_1 sont des polynômes à coefficients entiers, que $\deg T_0 = 0$ et $\deg T_1 = 1$, que le coefficient dominant de T_0 est égal à 2^0 et celui de T_1 est égal à 2^1 .

Il existe donc un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que T_n et T_{n+1} soient des polynômes à coefficients entiers, que $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n+1} = n+1$, que le coefficient dominant de T_n est égal à 2^n et celui de T_{n+1} est égal à 2^{n+1} .

Par [3.],

$$T_{n+2} = \underbrace{2XT_{n+1}}_{\text{degré } n+2} - \underbrace{T_n}_{\text{degré } n},$$

ce qui prouve que T_{n+2} est à coefficients entiers, que son degré est égal à $(n+2)$ et que son coefficient dominant est égal à $2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$. L'hypothèse de récurrence est ainsi vérifiée au rang $(n+1)$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✱ Il est clair que T_0 est un polynôme pair et que T_1 est impair.

Il existe donc un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que T_{2p} soit pair et que T_{2p+1} soit impair.

Par [3.],

$$T_{2p+2} = 2XT_{2p+1} - T_{2p}$$

est donc pair (le produit de deux polynômes impairs est pair) et

$$T_{2p+3} = 2XT_{2p+2} - T_{2p+1}$$

est donc impair (le produit d'un polynôme pair et d'un polynôme impair est impair). L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $(p+1)$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions T_n sont polynomiales donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Dérivons la relation [1.] :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -\sin t T'_n(\cos t) = -n \sin nt$$

et dérivons à nouveau :

$$\sin^2 t T''_n(\cos t) - \cos t T'_n(\cos t) = -n^2 \cos nt$$

c'est-à-dire, d'après [1.],

$$(1 - \cos^2 t) T''_n(\cos t) - \cos t T'_n(\cos t) + n^2 T_n(\cos t) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad (1 - x^2) T''_n(x) - x T'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Comme il s'agit d'une identité polynomiale, le fait qu'elle soit vérifiée sur un ensemble infini (le segment $[-1, 1]$) suffit pour qu'elle soit vraie partout :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 - x^2) T''_n(x) - x T'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

6.a. Par définition, il est clair que $|T_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et par [1.], il existe des réels de $[-1, 1]$ (qui seront précisés au [8.a.]) tels que $|T_n(x)| = 1$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n\|_\infty = 1.$$

6.b. L'encadrement est évident pour $n = 0$ et pour $n = 1$. En supposant qu'il soit vérifié pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)u| &= |\sin nu \cos u + \sin u \cos nu| \\ &\leq |\sin nu| |\cos u| + |\sin u| |\cos nu| \\ &\leq n |\sin u| + |\sin u| = (n+1) |\sin u|. \end{aligned}$$

6.c. On dérive l'égalité [1.] : pour tout $0 < t < \pi$,

$$T'_n(\cos t) = \frac{-n \sin nt}{\sin t}$$

et d'après la majoration précédente,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |T'_n(x)| \leq n^2$$

donc $\|T'_n\|_\infty \leq n^2$.

En outre, la fonction (*polynomiale*) T'_n est continue en $t = 1$ et $T = -1$ donc, par composition de limites,

$$T'_n(1) = \lim_{t \rightarrow 0} T'_n(\cos t) = -n^2$$

et

$$T'_n(-1) = \lim_{t \rightarrow \pi} T'_n(\cos t) = (-1)^n n^2$$

puisque, lorsque h tend vers 0,

$$\frac{-n \sin n(\pi + h)}{\sin(\pi + h)} = \frac{(-1)^{n+1} n \sin nh}{-\sin h} \sim (-1)^n n^2.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T'_n\|_\infty = n^2.$$

7.a. D'une part, $T_0(\operatorname{ch} t) = 1 = \operatorname{ch} 0t$ et $T_1(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} 1t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'autre part,

$$2 \operatorname{ch} t \operatorname{ch}(n+1)t = \operatorname{ch}(n+2)t + \operatorname{ch} nt$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ puisque

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$

On déduit alors de [3.] que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} nt.$$

Soit $r > 0$. Il existe donc $t = \ln r \in \mathbb{R}$ tel que $r = e^t$ et

$$\frac{r + r^{-1}}{2} = \operatorname{ch} t$$

et par conséquent,

$$T_n\left(\frac{r + r^{-1}}{2}\right) = \operatorname{ch} nt = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

7.b. Pour $r > 0$, les équations

$$x = \frac{r + r^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad r^2 - 2xr + 1 = 0$$

ont mêmes solutions :

$$r = x \pm \sqrt{x^2 - 1} > 0$$

et le produit de ces solutions est égal à 1 (relations entre coefficients et racines d'une équation polynomiale) : elles sont donc inverses l'une de l'autre.

En particulier, $r = 1$ si, et seulement si, $x = 1$.

7. c. Par [7.a.] et [7.b.], comme $x > 1$, il existe $r > 0$ tel que

$$T_n(x) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} T_n(x) > 1 &\iff r^{2n} - 2r^n + 1 > 0 \\ &\iff (r^n - 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

et par conséquent que $T_n(x) > 1$ pour tout $x > 1$.

• On conserve les mêmes notations. D'après la remarque finale de [7.b.],

$$\begin{aligned} \frac{r^n + r^{-n}}{2} &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} \\ &\leq (x + \sqrt{x^2 - 1})^n \end{aligned}$$

donc $T_n(x) \leq (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ pour tout $x > 1$.

8. Comme $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, les a_j sont deux à deux distincts et

$$-1 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1.$$

Les polynômes $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$ sont donc bien définis.

8. a. D'après [7.c.], on sait que $|T_n(x)| = 1$ n'a pas de solution sur $]1, +\infty[$. Cette équation n'a pas non plus de solution sur $]-\infty, -1[$ (par parité/imparité de T_n). On se restreint donc au segment $[-1, 1]$.

• Soit $x \in [-1, 1]$. Par définition de T_n ,

$$T_n(x) = 1 \iff \cos(n \operatorname{Arccos} x) = 1$$

et comme $0 \leq \operatorname{Arccos} x \leq \pi$, on en déduit que

$$T_n(x) = 1 \iff \exists 0 \leq 2k \leq n, \quad \operatorname{Arccos} x = \frac{2k\pi}{n}.$$

De même, $T_n(x) = -1 \iff \cos(n \operatorname{Arccos} x) = -1$ donc $T_n(x) = -1$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $0 \leq 2k + 1 \leq n$ et $\operatorname{Arccos} x = \frac{(2k+1)\pi}{n}$.

Finalement,

$$|T_n(x)| = 1 \iff \exists 0 \leq p \leq n, \quad x = \cos \frac{p\pi}{n}.$$

Les solutions de $|T_n(x)| = 1$ sont donc les $a_0, \dots, a_n$ et, comme on l'a vu,

- si $n - j$ est pair, alors $T_n(a_j) = 1$;
 - si $n - j$ est impair, alors $T_n(a_j) = -1$
- donc

$$\forall 0 \leq j \leq n, \quad T_n(a_j) = (-1)^{n-j}.$$

8. b. On a vu au [6.c.] que

$$T'_n(a_0) = (-1)^n n^2 \quad \text{et que} \quad T'_n(a_n) = -n^2.$$

Pour $1 \leq j < n$, on reprend [1.] avec $0 < t = (1 - j/n)\pi < \pi$:

$$\underbrace{-\sin t}_{>0} T'_n(\cos t) = -n \underbrace{\sin nt}_{=0}$$

donc

$$\forall 1 \leq j < n, \quad T'_n(a_j) = 0.$$

8. c. Comme $\deg T_n = n$ par [4.], le polynôme T_n est une combinaison linéaire des polynômes interpolateurs $L_0, \dots, L_n$:

$$T_n = \sum_{j=0}^n \alpha_j L_j$$

où les coefficients α_j sont des valeurs particulières de T_n :

$$\forall 0 \leq j \leq n, \quad T_n(a_j) = \alpha_j = (-1)^{n-j}$$

comme on l'a vu au [8.a.]

8.d. On sait que

$$L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \frac{x - a_i}{a_j - a_i}.$$

Pour $x \geq 1$, on a $x \geq 1 \geq a_i$, donc tous les numérateurs sont positifs. Comme la famille $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est décroissante, on en déduit que le facteur $(a_j - a_i)$ est négatif si, et seulement si, $j < i$: il y a donc autant de facteurs négatifs au dénominateur qu'il y a d'entiers i tels que $j < i \leq n$, donc

$$\forall x \geq 1, \quad |L_j(x)| = (-1)^{n-j} L_j(x).$$

On déduit de la décomposition précédente que

$$\forall x \geq 1, \quad T_n(x) = \sum_{j=0}^n |L_j(x)|.$$

8.e. Comme $\deg P \leq n$, le polynôme P est une combinaison linéaire des polynômes interpolateurs $L_0, \dots, L_n$:

$$P = \sum_{j=0}^n \beta_j L_j$$

et les coefficients β_j sont des valeurs particulières de T_n :

$$P = \sum_{j=0}^n P(a_j) L_j.$$

Comme les a_j appartiennent tous au segment $[-1, 1]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |P(x)| &\leq \sum_{j=0}^n |P(a_j)| |L_j(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^n \|P\|_{\infty} \sum_{j=0}^n |L_j(x)|. \end{aligned}$$

D'après la question précédente et [7.c.],

$$|P(x)| \leq \|P\|_{\infty} T_n(x) \leq \|P\|_{\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$$

pour tout $x \geq 1$.