

Problème de Mathématiques

Référence pp1410 — Version du 15 octobre 2025

Partie A. Premier exemple

1. Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

1. a. Démontrer que la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0, 1]$.
 1. b. Pour quelles valeurs de $x \in [0, 1]$ la série $\sum f_n(x)$ est-elle absolument convergente ?
 1. c. Expliciter une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq r_n.$$

Partie B. Deuxième exemple

Dans cette partie, on considère les fonctions f_n définies sur $[0, 1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$$

où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs.

2. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, la série $\sum f_n(x)$ est convergente et que la somme de cette série est une fonction bornée de x :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq M.$$

3. a. Calculer la valeur de

$$s_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)|$$

pour tout entier $n \geq 1$.

3. b. Démontrer que la série $\sum s_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \alpha_n/n$ converge.
 4. Dans cette question, on étudie le comportement du reste :

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)$$

en fonction de $x \in [0, 1]$.

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de

$$\rho_n = \sup_{x \in [0, 1]} |r_n(x)|$$

et démontrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k \leq \rho_n \leq \alpha_n.$$

4. b. En déduire que la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 si, et seulement si, la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0.
 5. a. On suppose que la série $\sum \alpha_n/n$ converge. Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0.
 ☞ On rappelle que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
 5. b. Donner un exemple de suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de limite nulle telle que la série $\sum \alpha_n/n$ diverge.

Solution ✱ Deux séries de fonctions

Partie A. Premier exemple

1. a. Pour tout $x \in [0, 1]$, la suite de terme général

$$|f_n(x)| = \frac{x^2 + n}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$$

est décroissante et tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0, 1]$.

1. b. Pour tout $x \in [0, 1]$, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$|f_n(x)| \sim \frac{1}{n}.$$

Comme la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, on en déduit que la série (de terme général positif) $\sum |f_n(x)|$ est divergente.

Par conséquent, la série $\sum f_n(x)$ n'est absolument convergente pour *aucune* valeur de $x \in [0, 1]$.

1. c. Puisque les hypothèses du critère spécial des séries alternées sont vérifiées d'après 1.a., le reste de $\sum f_n(x)$ est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé. Ainsi

$$\forall n \geq 1, \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_n(x)| = \frac{x^2 + n}{n^2} \leq \frac{n+1}{n^2}.$$

Le majorant ainsi obtenu est indépendant de $x \in [0, 1]$: on peut donc passer au sup pour obtenir

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \frac{n+1}{n^2}$$

et il est clair que la suite de terme général $r_n = (n+1)/n^2$ tend vers 0.

Partie B. Deuxième exemple

2. Comme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, c'est une suite bornée qui tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall 1 \leq n \leq k, \quad 0 \leq \ell \leq \alpha_k \leq \alpha_n \leq \alpha_1 \tag{1}$$

donc

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq f_n(x) \leq \alpha_1(1-x)x^n. \tag{2}$$

Pour tout $x \in [0, 1[$, la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente, donc la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

Par ailleurs, pour $x = 1$, le terme général $f_n(x)$ est identiquement nul, donc $\sum f_n(1)$ est (absolument) convergente et sa somme est nulle.

On peut donc sommer les encadrements (2) et passer à la limite pour obtenir

$$\forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leq \alpha_1(1-x) \frac{x}{1-x} \leq \alpha_1,$$

en remarquant que cet encadrement, de façon évidente, est encore vrai pour $x = 1$.

3. a. La fonction f_n est clairement positive et dérivable sur $[0, 1]$. Comme

$$f'_n(x) = \alpha_n [n - (n+1)x] x^{n-1},$$

il est clair que f_n atteint son maximum pour $x = n/(n+1)$ et que

$$s_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\alpha_n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

3. b. D'après l'expression de s_n , lorsque n tend vers $+\infty$,

$$s_n \sim \frac{1}{e} \frac{\alpha_n}{n}.$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries de termes généraux *positifs*, la série $\sum s_n$ converge si, et seulement si, la série de terme général α_n/n converge, donc la série $\sum s_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \alpha_n/n$ converge.

4. a. Précisons les encadrements (2) en tenant compte des encadrements (1) :

$$\forall k \geq n, \forall x \in [0, 1], \quad \ell x^k(1-x) \leq f_k(x) \leq \alpha_n x^k(1-x).$$

En sommant à partir de $k = n$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq \ell x^n \leq r_n(x) \leq \alpha_n x^n. \quad (3)$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|r_n|$ est bornée sur $[0, 1[$. Comme elle est nulle en $x = 1$, on en déduit qu'elle admet une borne supérieure ρ_n sur $[0, 1]$ et l'encadrement précédent prouve que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \rho_n \leq \alpha_n. \quad (4)$$

Comme la borne supérieure est un majorant, on déduit de (3) que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \ell x^n \leq \rho_n.$$

Ayant trouvé un majorant indépendant de $x \in [0, 1[$, on peut passer au sup pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell \leq \rho_n. \quad (5)$$

4. b. Si la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0, alors $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 par l'encadrement (4).

Réciproquement, si $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $\ell = 0$ par (5), ce qui signifie que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0.

5. a. Notons toujours ℓ , la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$. Si $\ell \neq 0$, alors $\ell > 0$ (puisque la suite α est positive) et par conséquent, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{\alpha_n}{n} \sim \frac{\ell}{n}.$$

Comme $\ell > 0$, la série de terme général *positif* $\sum \ell/n$ est divergente et, par comparaison, la série de terme général *positif* $\sum \alpha_n/n$ est aussi divergente.

Par contraposée, si la série $\sum \alpha_n/n$ est convergente, alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0.

5. b. Prenons α_1 quelconque et posons

$$\forall n \geq 2, \quad \alpha_n = \frac{1}{\ln n}.$$

Il est clair que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ tend vers 0. Cependant, la série $\sum \alpha_n/n$ est divergente puisque, par comparaison avec une intégrale,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{k} \sim \ln \ln n$$

lorsque n tend vers $+\infty$ (série de Bertrand, qui n'est pas au programme — la comparaison avec les intégrales doit donc être détaillée).