Problème de Mathématiques

Référence pp1221 — Version du 15 octobre 2025

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 en décroissant. On suppose de plus que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

La série alternée $\sum (-1)^n u_n$ est donc convergente et on étudie ici son reste :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k.$$

1. Vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| + |R_{n+1}| = u_n.$$

2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+p+1}).$$

En déduire la monotonie de la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2}.$$

4. En déduire que

$$R_n \sim (-1)^n \frac{u_n}{2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Application : déterminer un équivalent de

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution ❀ Reste d'une série alternée

1. Comme la série $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées, on sait que le reste R_n est du signe du premier terme négligé. Comme les u_k sont tous strictement positifs, le réel R_n est du signe de $(-1)^n$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| = (-1)^n R_n. \tag{1}$$

❧ Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |R_n| + |R_{n+1}| &= (-1)^n (R_n - R_{n+1}) \\ &= (-1)^n \big[(-1)^n u_n\big] = u_n. \end{aligned}$$

2. D'après (1), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n (R_n + R_{n+1}) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{n+k} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{n+k} u_k \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_{n+p} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} u_{n+p+1} \end{aligned}$$

en effectuant les changements d'indice $k = n+p$ (première somme) et $k = n+p+1$ (deuxième somme). Par linéarité de Σ, on en déduit enfin que

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+p+1}) \tag{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la suite de terme général

$$u_{n+p} - u_{n+p+1}$$

tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$ et cette suite est décroissante puisque

$$0 \leqslant u_{q+1} - u_{q+2} \leqslant u_q - u_{q+1}$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$ et en particulier pour $q = n + p$.

On peut alors déduire de (2) que $|R_n| - |R_{n+1}|$ est la somme d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère spécial et donc qu'elle est du signe du premier terme. Or

$$(-1)^0 (u_{n+0} - u_{n+1+0}) = u_n - u_{n+1} \geqslant 0,$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| - |R_{n+1}| \geqslant 0.$$

La suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante.

REMARQUE.— En tant que suite des restes d'une série convergente, la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. D'après (1), la série $\sum R_n$ vérifie donc les hypothèses du critère spécial des séries alternées.

3. D'après **[1.]** et **[2.]**,

$$\begin{aligned} \forall\, n \geqslant 1, \quad u_{n-1} &= |R_{n-1}| + |R_n| \geqslant 2|R_n| \\ \text{et} \quad u_n &= |R_n| + |R_{n+1}| \leqslant 2|R_n| \end{aligned}$$

donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2}.$$

4. Par hypothèse, u_{n-1}/u_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ et $R_n = (-1)^n |R_n|$ d'après (1). On peut alors déduire de l'encadrement précédent que

$$R_n \sim (-1)^n \frac{u_n}{2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose
$$u_n = \frac{\ln n}{n}.$$

❧ La suite de terme général u_n tend évidemment vers 0 et le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1 car
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

❧ L'étude de la fonction $f = \left[x \mapsto \frac{\ln x}{x}\right]$ montre qu'elle est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Par conséquent, seule la suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ tend vers 0 en décroissant.

❧ Remarquons enfin que l'inégalité
$$u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$$
équivaut à
$$u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$$
ou encore (avec les notations ci-dessus) à
$$f\Big(\frac{n+(n+2)}{2}\Big) \leqslant \frac{f(n)+f(n+2)}{2}.$$
Il suffit donc que la fonction f soit convexe pour que cette inégalité soit vérifiée. Le calcul de la dérivée seconde montre que la fonction f est concave sur $\left]0, e^{3/2}\right]$ et convexe sur $\left[e^{3/2}, +\infty\right[$.

❧ Comme $e^{3/2} \approx 4,5$, la suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 5}$ vérifie toutes les hypothèses faites au début du sujet, mais pas la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$: cela n'a aucune importance puisqu'on ne s'intéresse qu'au comportement asymptotique de la suite !

On peut donc en conclure que
$$a_n \sim (-1)^n \frac{\ln n}{2n}$$
lorsque n tend vers $+\infty$.