

Problème de Mathématiques

Référence pp1209 — Version du 15 octobre 2025

Soit E , un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, de dimension finie, au moins égale à 2. Pour tout $x \in E$, on pose

$$\omega(x) = 0_E \quad \text{et} \quad I(x) = x,$$

de telle sorte que ω est l'endomorphisme nul et I , l'identité de E . Si A est une partie de E et si $u \in L(E)$, on note $u_*(A)$, l'image de A par u . On rappelle que la partie A est **stable par** u lorsque $u_*(A) \subset A$.

Partie A.

1. Soit A , un sous-espace de E . Démontrer que l'ensemble des endomorphismes par lesquels A est stable est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.
2. On suppose que $A \neq \{0_E\}$ et que $A \neq E$. Démontrer qu'il existe un endomorphisme de E par lequel A n'est pas stable.
3. Soient u et v , deux endomorphismes de E qui commutent et A , une partie de E qui est stable par u . Démontrer que $v_*(A)$ est stable par u .

Partie B.

On fait les deux hypothèses suivantes.

(H₁) Il existe une partie S de $L(E)$, non vide, telle que les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par tous les éléments de S sont $\{0_E\}$ et E .

(H₂) Il existe un endomorphisme f de E qui commute à tous les éléments de S .

4. Démontrer que : ou bien $f = \omega$, ou bien $f \in GL(E)$.

☞ On pourra considérer $f_*(E)$.

5. Démontrer que tout endomorphisme $\varphi \in \mathbb{K}[f]$ commute à tous les éléments de S .

6. Démontrer que le polynôme minimal de f est irréductible.

☞ En notant P , le polynôme minimal de f , on supposera l'existence d'une factorisation $P = P_1 P_2$ avec $\deg P_1 < \deg P$ et $\deg P_2 < P$ pour arriver à une contradiction.

Partie C.

7. Dédurre de ce qui précède que les endomorphismes de E qui commutent à tous les éléments de $L(E)$ sont les homothéties de E .

Solution ✿ Centre de $L(E)$

Partie A.

1. Notons V , l'ensemble des endomorphismes $u \in L(E)$ tels que $u_*(A) \subset A$.

L'ensemble V est, par définition, contenu dans l'espace vectoriel $L(E)$.

Comme A est un sous-espace de E , le vecteur nul 0_E appartient à A , donc A est stable par l'application nulle ω :

$$\forall x \in A, \quad \omega(x) = 0_E \in A.$$

Enfin, si A est stable par u et par v , alors, quel que soit le scalaire λ ,

$$\forall x \in A, \quad (\lambda \cdot u + v)(x) = \lambda \cdot \underbrace{u(x)}_{\in A} + \underbrace{v(x)}_{\in A} \in A$$

puisque A est stable par combinaison linéaire. Ainsi, V est stable par combinaison linéaire.

Cela prouve que V est un sous-espace de $L(E)$.

2. Comme $A \neq \{0_E\}$, il existe un vecteur x_1 non nul dans A . Comme $A \neq E$, il existe un vecteur y_1 de E qui n'appartient pas à A . D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base de E de la forme $(x_1, \dots, x_n)$ et, d'après le théorème de caractérisation des applications linéaires, il existe un, et un seul, endomorphisme u de E tel que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad u(x_k) = y_1.$$

En particulier, $x_1 \in A$ et $u(x_1) = y_1 \notin A$, donc A n'est pas stable par u .

Réciproquement, il est clair que $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E . Donc les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par tous les endomorphismes de E sont $\{0_E\}$ et E .

3. Soit $y \in v_*(A)$: il existe $x \in A$ tel que $y = v(x)$ et

$$u(y) = (u \circ v)(x) = v(u(x))$$

puisque u et v commutent. Mais $u(x) \in A$ (puisque A est stable par u), donc $u(y) \in v_*(A)$. Ainsi, $v_*(A)$ est stable par u .

Partie B.

4. Pour tout $u \in S$, l'espace E est stable par u , donc le sous-espace $f_*(E)$ est stable par u d'après [3.] D'après l'hypothèse (H_1) , le sous-espace $f_*(E)$ est donc égal à $\{0_E\}$ ou à E .

Si $f_*(E) = \{0_E\}$, il est clair que $f = \omega$.

Si $f_*(E) = E$, alors f est surjective. Comme f est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie, alors f est inversible (théorème du rang).

5. Soit $u \in S$. D'après l'hypothèse (H_2) , les endomorphismes u et f commutent. On en déduit par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k \circ u = u \circ f^k.$$

Par combinaison linéaire et par linéarité de u , on en déduit que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(f) \circ u = u \circ P(f).$$

Autrement dit,

$$\forall \varphi \in \mathbb{K}[f], \quad \varphi \circ u = u \circ \varphi.$$

6. Comme f est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie, le polynôme minimal de f existe bien.

On considère une factorisation $P = P_1 P_2$ du polynôme minimal de f . On peut en déduire que

$$P(f) = \omega = P_1(f) \circ P_2(f) \quad (\ddagger)$$

(morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $L(E)$).

D'après [5.], l'endomorphisme $P_1(f)$ vérifie l'hypothèse (H_2) . On peut donc appliquer [4.] à $P_1(f)$.

PREMIER CAS.— Si $P_1(f) = \omega$, alors P_1 est un polynôme annulateur de f et donc un multiple du polynôme minimal P . Mais, par construction, P_1 est un diviseur de P , donc P et P_1 sont associés et par conséquent, P_2 est un polynôme constant (non nul).

DEUXIÈME CAS.— Si $P_1(f)$ est inversible, alors $P_2(f) = \omega$ (en appliquant l'inverse de $P_1(f)$ à l'égalité $(\ddagger)$). Le raisonnement qui précède montre cette fois que P_2 est associé à P et que P_1 est un polynôme constant (non nul).

CONCLUSION.— Les seules factorisations possibles du polynôme P sont les produits d'un polynôme associé à P et d'un polynôme inversible (dans $\mathbb{K}[X]$), donc le polynôme P est irréductible.

Partie C.

7. Il est clair que les homothéties commutent à tous les endomorphismes de E .

RÉCIPROQUE.— D'après [2.], avec $S = L(E)$, l'hypothèse (H_1) est vérifiée. Si $f \in L(E)$ commute à tous les endomorphismes de E , alors l'hypothèse (H_2) est également vérifiée et d'après [6.], le polynôme minimal de f est irréductible.

Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1. Comme le degré du polynôme minimal de f est égal à 1, alors f est une homothétie.

CONCLUSION.— Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, les endomorphismes de E qui commutent à tous les éléments de $L(E)$ sont les homothéties.