

Problème de Mathématiques

Référence pb2104 — Version du 15 octobre 2025

On considère un intervalle I de la forme $[-a, a]$, où a est un réel strictement positif. On note E , l'espace vectoriel complexe des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{C}$; on note $\mathcal{P}$, le sous-espace des applications polynomiales de I dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{D}$, l'ensemble des applications $f \in E$ qui sont développables en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence strictement supérieur à a .

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

1.a. Démontrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, décroissante et de limite nulle. Est-elle strictement décroissante ?

1.b. Établir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n .

1.c. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

1.d. En déduire un équivalent de W_n .

☞ On utilisera la monotonie de la suite.

Partie A. Deux applications linéaires

Pour toute application $f \in E$, on définit les applications

$$u(f) : I \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad v(f) : I \rightarrow \mathbb{C}$$

par

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad u(f)(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t) \, dt \\ \text{et} \quad v(f)(x) &= f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \, dt. \end{aligned}$$

2. Démontrer que u et v sont bien définies sur E .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$X^n = [x \mapsto x^n] \in E.$$

3.a. Calculer $u(X^n)$ et $v(X^n)$.

3.b. En déduire que le sous-espace $\mathcal{P}$ est stable par u et par v .

4.a. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de E .

4.b. Démontrer que $\mathcal{D}$ est stable par u et v .

5. Démontrer que l'espace E est stable par u et par v .

On vérifiera que

$$\forall x \in I, \quad [u(f)]'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \sin t \, dt$$

et on explicitera la dérivée $[v(f)]^{(n)}$.

Partie B. Étude des composées

6. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ au sous-espace $\mathcal{P}$.

7. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ au sous-espace $\mathcal{D}$.

8. On note

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

8.a. Rappeler pourquoi $\|f\|_\infty$ est bien définie pour toute application $f \in E$.

8.b. Soit $g \in E$. Démontrer qu'il existe une suite d'applications $q_n \in \mathcal{P}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g' - q_n\|_\infty = 0,$$

puis qu'il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications polynomiales sur I telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - p_n\|_\infty + \|g' - p'_n\|_\infty = 0.$$

9. a. Démontrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \quad \|u(f)\|_\infty \leq K_1 \|f\|_\infty.$$

9. b. Démontrer que

$$\forall f \in E, \quad \|[u(f)]'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty.$$

9. c. Démontrer qu'il existe une constante $K_2 > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \quad \|v(f)\|_\infty \leq K_2 \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

9. d. En déduire qu'il existe une constante $K_3 > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \quad \|(u \circ v)(f)\|_\infty \leq K_3 \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$$

et une constante $K_4 > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \quad \|(v \circ u)(f)\|_\infty \leq K_4 \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

10. Démontrer que

$$\forall f \in E, \quad (u \circ v)(f) = (v \circ u)(f) = f.$$

11. Application.

11. a. Démontrer que : si $f \in E$ est paire, alors $u(f)$ est paire. Que dire alors de $v(f)$?

11. b. Mêmes questions en supposant que $f \in E$ est impaire.

11. c. On suppose que $u(f)$ est paire. L'application f est-elle paire ?

Partie C. Étude spectrale

12. Démontrer que 0 n'est une valeur propre ni pour u , ni pour v .

13. Démontrer que λ est une valeur propre de v si, et seulement si, $1/\lambda$ est une valeur propre de u . Que dire des vecteurs propres correspondants ?

14. Soient λ , une valeur propre de u et $f \in E$, un vecteur propre de u associé à λ .

14. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$m_n = \|f^{(n)}\|_\infty.$$

Démontrer que

$$\forall x \in I, \quad |\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}$$

et en déduire que f est polynomiale.

14. b. Déterminer les valeurs propres de u et de v .

15. Existe-t-il une base de E constituée de vecteurs propres pour u ?

Solution ✱ Opérateurs linéaires continus

1. a. La fonction $[t \mapsto \sin^n t]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale W_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✱ Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t \leq 1$$

et en intégrant ces encadrements on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq W_{n+1} \leq W_n \leq 1.$$

La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

REMARQUE.— En tant que suite décroissante et minorée, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, mais sans argument supplémentaire, on ne peut pas en déduire qu'elle tend vers 0.

✱ Pour tout $0 \leq t < \pi/2$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^n t = 0.$$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t < \pi/2, \quad 0 \leq \sin^n t \leq 1$$

et la fonction constante $[t \mapsto 1]$ est évidemment intégrable sur le segment $[0, \pi/2]$.

La convergence est donc dominée et, d'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \int_0^{\pi/2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^n t \, dt = 0.$$

✱ La fonction

$$[t \mapsto \sin^n t - \sin^{n+1} t]$$

est positive et continue sur le segment $[0, \pi/2]$. Comme elle n'est pas identiquement nulle (elle ne s'annule qu'en $t = 0$ et en $t = \pi/2$), son intégrale, égale à $W_n - W_{n+1}$, est strictement positive.

La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.

1. b. On intègre par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= W_n - \int_0^{\pi/2} (\sin^n t \cdot \cos t) \cdot \cos t \, dt \\ &= W_n - \left[\left[\frac{\sin^{n+1} t}{n+1} \cdot \cos t \right]_0^{\pi/2} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n+1} t}{n+1} \cdot \sin t \, dt \right] \\ &= W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1} \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

REMARQUE.— Ceux qui connaissent *vraiment* les intégrales de Wallis calculent $W_n - W_{n+2}$ (on ne vous en demande pas tant).

1. c. Les deux premières intégrales sont très faciles à calculer :

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \quad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = 1$$

donc $(0+1)W_0W_1 = \pi/2$.

D'après la relation précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (n+2)W_{n+1}W_{n+2} &= (n+2)W_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot W_n \\ &= (n+1)W_nW_{n+1} \end{aligned}$$

donc la suite de terme général $(n+1)W_n W_{n+1}$ est constante et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

1. d. Comme la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)W_{n+1}^2 \leq (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2} \leq (n+1)W_n^2$$

donc

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{\pi}{2(n+1)} \leq W_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$

et finalement

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Partie A. Deux applications linéaires

2. Soit $f \in E$.

• Comme $0 \leq \sin t \leq 1$, on a bien

$$\forall x \in [-a, a], \forall t \in [0, \pi/2], \quad x \sin t \in [-a, a] = I$$

donc $f(x \sin t)$ est bien définie.

Comme $\sin$ et f sont continues, la composée

$$[t \mapsto f(x \sin t)]$$

est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc intégrable sur cet intervalle et $u(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in I$.

• Comme $f \in E$, alors f est dérivable et sa dérivée f' appartient aussi à E . Les arguments précédents montrent que $v(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in I$.

REMARQUE.— Donc u et v sont bien des applications définies sur E . Elles prennent *a priori* leurs valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{A}(I, \mathbb{C})$ des applications de I dans $\mathbb{C}$. Les questions suivantes vont préciser cela.

3. a. • Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in I$,

$$u(X^n)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (x \sin t)^n dt = \frac{2W_n}{\pi} \cdot x^n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(X^n) = \frac{2W_n}{\pi} \cdot X^n.$$

• Soit $n \geq 1$. Pour tout $x \in I$,

$$v(X^n)(x) = 0 + x \int_0^{\pi/2} n(x \sin t)^{n-1} dt = nW_{n-1}x^n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v(X^n) = nW_{n-1} \cdot X^n.$$

Enfin, pour $n = 0$:

$$\forall x \in I, \quad v(X^0)(x) = 1 + x \int_0^{\pi/2} 0 dt = 1$$

donc

$$v(X^0) = X^0.$$

3. b. Il est clair que u et v sont des applications linéaires de E dans $\mathcal{A}(I, \mathbb{C})$.

On a démontré à la question précédente que les images par u et par v de la base canonique de $\mathcal{P}$ sont des familles de vecteurs de $\mathcal{P}$, donc le sous-espace $\mathcal{P}$ est stable par u et par v .

REMARQUE.— On peut aussi remarquer que l'image de la base canonique de $\mathcal{P}$ est clairement une base de $\mathcal{P}$, ce qui signifie que les endomorphismes de $\mathcal{P}$ induits par restriction de u et de v sont en fait des automorphismes de $\mathcal{P}$.

4. a. La somme d'une série entière de rayon $R > 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $] -R, R[$. Si $R > a$, alors cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[-a, a]$ et appartient donc à l'espace vectoriel E .

Il est clair que la fonction nulle est développable en série entière au voisinage de 0 (avec un rayon de convergence infini).

Soient enfin $\lambda \in \mathbb{C}$; f et g , deux éléments de D , de rayons de convergence respectifs $R_1 > a$ et $R_2 > a$. D'après le cours, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum (\lambda a_n + b_n) x^n$$

est au moins égal à $\min\{R_1, R_2\} > a$. Par conséquent, la combinaison linéaire $h = \lambda f + g$ appartient à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ est donc un sous-espace vectoriel de E .

REMARQUE.— C'est une question de cours et, comme toujours, il est difficile de savoir jusqu'où il faut entrer dans les détails de la rédaction.

4.b. Notons $R > a$, le rayon de convergence de la série entière.

Par hypothèse, il existe une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall u \in]-R, R[, \quad f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n,$$

où la série $\sum a_n u^n$ est absolument convergente, et on sait par hypothèse que $I = [-a, a] \subset]-R, R[$.

• Pour $|x| \leq a$ et $t \in [0, \pi/2]$, on a $u = x \sin t \in I$ donc la série

$$\sum a_n x^n \sin^n t$$

est absolument convergente.

• La somme de cette série, égale à $f(x \sin t)$, est une fonction de t intégrable sur $[0, \pi/2]$ (elle est continue sur ce segment).

• Enfin, d'après [1.a.],

$$\int_0^{\pi/2} |a_n x^n \sin^n t| dt = W_n |a_n x^n| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_n x^n)$$

et comme $|x| < R$, alors la série

$$\sum \int_0^{\pi/2} |a_n x^n \sin^n t| dt$$

est absolument convergente (Théorème de comparaison).

• On peut donc appliquer le Théorème d'intégration terme à terme (version lebesguienne) :

$$\begin{aligned} u(f)(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sin^n t dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} a_n x^n \sin^n t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a_n W_n}{\pi} \cdot x^n. \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vérifiée pour tout $x \in]-R, R[$, on en déduit que $u(f)$ appartient bien à $\mathcal{D}$.

• Comme f est développable en série entière sur $]-R, R[$, on sait que f' est aussi développable en série entière sur $]-R, R[$.

Un raisonnement analogue au précédent prouverait donc que

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n W_{n-1} x^{n-1}$$

et donc que $v(f)$ appartient aussi à $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R, R[, \quad v(f)(x) &= f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n W_{n-1} x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n W_{n-1} x^n. \end{aligned}$$

5. Pour tout $(x, t) \in I \times [0, \pi/2]$, on pose

$$\varphi(x, t) = f(x \sin t).$$

✱ Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x, t)]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I en tant que composée d'une fonction affine par la fonction f (qui est $\mathcal{C}^\infty$ par hypothèse) :

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x \sin t & \longmapsto & f(x \sin t) \end{array}$$

car $I = [-a, a]$ est stable par les homothéties de rapport $\sin t \in [0, 1]$.

Bien entendu, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall (x, t) \in I \times [0, \pi/2], \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) = f^{(n)}(x \sin t) \cdot \sin^n t.$$

✱ Pour tout $x \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) \right]$$

est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc intégrable sur ce segment.

✱ La fonction f et toutes ses dérivées $f^{(n)}$ sont continues sur le segment $I = [-a, a]$, donc elles sont toutes bornées sur ce segment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in I, \quad |f^{(n)}(u)| \leq \|f^{(n)}\|_\infty.$$

(On ne prétend pas que les fonctions $f^{(n)}$ soient bornées par une même constante, on affirme seulement que chacune d'elles est bornée.)

D'après l'expression des dérivées partielles de φ , on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in I \times [0, \pi/2], \quad \left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \|f^{(n)}\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant de t et intégrable sur I (les fonctions constantes sont intégrables sur tout intervalle borné).

✱ On peut donc appliquer le Théorème de Leibniz : la fonction $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et pour tout $n \geq 1$

$$\forall x \in I, \quad [u(f)]^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f^{(n)}(x \sin t) \cdot \sin^n t \, dt.$$

✱ Passons maintenant à $v(f)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, le raisonnement précédent peut aussi s'appliquer à f' . Par conséquent, la fonction

$$\left[x \mapsto \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \, dt \right]$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^k}{dx^k} \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \, dt = \int_0^{\pi/2} f^{(k+1)}(x \sin t) \cdot \sin^k t \, dt.$$

Pour obtenir $v(f)(x)$, il reste à multiplier par x (fonction polynomiale) et à ajouter $f(0)$ (fonction constante), donc la fonction $v(f)$ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$.

D'après la formule de Leibniz (dérivation d'un produit), pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} [v(f)]^{(n)}(x) &= x \int_0^{\pi/2} f^{(n+1)}(x \sin t) \cdot \sin^n t \, dt \\ &\quad + n \int_0^{\pi/2} f^{(n)}(x \sin t) \cdot \sin^{n-1} t \, dt. \end{aligned}$$

Partie B. Étude des composées

6. Comme u et v sont linéaires, il suffit d'étudier $u \circ v$ et $v \circ u$ sur la base canonique de $\mathcal{P}$.

D'après [3.a.] et [1.c.], pour tout $n \geq 1$,

$$(u \circ v)(X^n) = u(nW_{n-1}X^n) = nW_{n-1} \cdot \frac{2W_n}{\pi} X^n = X^n$$

et de même

$$(v \circ u)(X^n) = v\left(\frac{2W_n}{\pi} X^n\right) = \frac{2W_n}{\pi} \cdot nW_{n-1}X^n = X^n.$$

Enfin,

$$(u \circ v)(X^0) = u(X^0) = \frac{2W_0}{\pi} X^0 = X^0$$

et de même

$$(v \circ u)(X^0) = v\left(\frac{2W_0}{\pi} X^0\right) = v(X^0) = X^0.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u \circ v)(X^n) = (v \circ u)(X^n) = X^n$$

et donc que

$$\forall f \in \mathcal{P}, \quad (u \circ v)(f) = (v \circ u)(f) = f$$

puisque deux applications linéaires qui coïncident sur une famille de vecteurs coïncident aussi sur le sous-espace engendré par cette famille.

7. Soit $f \in \mathcal{D}$, la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > a$.

✱ D'après les expressions calculées au [4.b.], si

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

alors

$$\forall x \in]-R, R[, \quad u(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a_n W_n}{\pi} \cdot x^n$$

et donc

$$\begin{aligned} v(u(f))(x) &= \frac{2a_0 W_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{2a_n W_n}{\pi} \cdot W_{n-1} x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = f(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

✱ Un calcul en tous points analogue montrerait de même que

$$\forall x \in]-R, R[, \quad u(v(f))(x) = f(x).$$

On a donc démontré que

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad (u \circ v)(f) = (v \circ u)(f) = f.$$

Cette propriété généralise le résultat de la question précédente.

8. a. Comme $f \in E$, en particulier f est continue sur le segment $I = [-a, a]$. L'application $|f|$ est donc bornée et atteint ses bornes sur I , ce qui justifie l'existence de $\|f\|_\infty$.

8. b. Comme $g \in E$, sa dérivée g' est continue sur le segment I . D'après le Théorème de Weierstrass, toute fonction continue sur un segment est la limite pour la convergence uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Par conséquent, il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathcal{P}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g' - q_n\|_\infty = 0.$$

✱ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in I, \quad p_n(x) = g(0) + \int_0^x q_n(t) dt.$$

D'après le Théorème fondamental, p_n est une primitive de l'application polynomiale q_n , donc c'est aussi une application polynomiale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \in \mathcal{P}.$$

De plus, pour tout $x \in I$,

$$|p_n(x) - g(x)| = \left| \int_0^x q_n(t) - g'(t) dt \right|.$$

Or

$$\forall t \in [-a, a], \quad |q_n(t) - g'(t)| \leq \|g' - q_n\|_\infty$$

donc (positivité de l'intégration)

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad |p_n(x) - g(x)| &\leq |x - 0| \|g' - q_n\|_\infty \\ &\leq a \|g' - q_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Le majorant étant indépendant de $x \in I$, on peut passer au sup :

$$\|p_n - g\|_\infty \leq a \|g' - q_n\|_\infty.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|p_n - g\|_\infty + \|p'_n - g'\|_\infty \leq (1 + a) \|g' - q_n\|_\infty$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - p_n\|_\infty + \|g' - p'_n\|_\infty = 0.$$

9.a. Soit $x \in I$. On a

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad |f(x \sin t)| \leq \|f\|_\infty$$

et donc, en intégrant,

$$|u(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(x \sin t)| dt \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \|f\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant de x , on peut donc passer au sup :

$$\forall f \in E, \quad \|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

La constante $K_1 = 1$ convient donc.

9.b. On reprend l'expression de $[u(f)]'$ donnée en [5.]. Comme $f \in E$, alors f' appartient aussi à E et est donc bornée sur le segment $[-a, a]$ et

$$\forall x \in I, \forall t \in [0, \pi/2], \quad |f'(x \sin t) \cdot \sin t| \leq \|f'\|_\infty \cdot 1$$

et de même qu'à la question précédente

$$\forall f \in E, \quad \|[u(f)]'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty.$$

9.c. On effectue toujours le même raisonnement qui nous donne

$$\forall x \in I, \quad \left| \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \|f'\|_\infty$$

et donc

$$\forall x \in I, \quad \left| x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt \right| \leq \frac{\pi a}{2} \|f'\|_\infty.$$

Comme par ailleurs $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$, on déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\forall x \in I, \quad |v(f)(x)| \leq \|f\|_\infty + \frac{\pi a}{2} \|f'\|_\infty$$

et donc, en majorant grossièrement le second membre,

$$\forall f \in E, \quad \|v(f)\|_\infty \leq \left(1 + \frac{\pi a}{2}\right) \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

9.d. Comme $(u \circ v)(f) = u(v(f))$,

$$\|(u \circ v)(f)\|_\infty \leq K_1 \cdot \|v(f)\|_\infty \quad \text{[[9.a.]}$$

$$\leq K_1 K_2 \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) \quad \text{[[9.c.]}$$

donc $K_3 = K_1 K_2$ convient.

• De même, $(v \circ u)(f) = v(u(f))$ et donc

$$\|(v \circ u)(f)\|_\infty \leq K_2 \cdot (\|u(f)\|_\infty + \|u(f)'\|_\infty) \quad \text{[[9.c.]}$$

$$\leq K_2 \cdot (K_1 \cdot \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) \quad \text{[[9.b.]}$$

$$\leq K_2(K_1 + 1) \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$$

donc $K_4 = K_2(K_1 + 1)$ convient.

10. Soit $f \in E$. Par [8.b.], il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathcal{P}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n\|_\infty + \|f' - p'_n\|_\infty = 0.$$

Par linéarité de $u \circ v$,

$$\begin{aligned} (u \circ v)(f) - f &= (u \circ v)(f - p_n) + (u \circ v)(p_n) - f \\ &= (u \circ v)(f - p_n) - (f - p_n) \end{aligned} \quad \text{[[6.]]}$$

et par inégalité triangulaire

$$\|(u \circ v)(f) - f\|_\infty \leq \|(u \circ v)(f - p_n)\|_\infty + \|f - p_n\|_\infty.$$

Par [8.b.], on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$$

et avec [9.d.], on a aussi

$$0 \leq \|(u \circ v)(f - p_n)\|_\infty \leq K_3 \cdot (\|f - p_n\|_\infty + \|f' - p'_n\|_\infty).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$0 \leq \|(u \circ v)(f) - f\|_\infty \leq 0$$

et donc que

$$\forall f \in E, \quad (u \circ v)(f) = f.$$

• De même, on démontre que

$$\forall f \in E, \quad (v \circ u)(f) = f.$$

(La seule différence est qu'on utilise cette fois le second encadrement de [9.d.] et non plus le premier encadrement.)

11. a. Comme f est paire,

$$\forall u \in I, \quad f(u) = f(-u)$$

et donc, en dérivant cette identité,

$$\forall u \in I, \quad f'(u) = -f'(-u).$$

• On en déduit dans un premier temps que

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad u(f)(-x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(-x \sin t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t) dt \\ &= u(f)(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la fonction $u(f)$ est elle aussi paire.

♣ De même, puisque f' est impaire,

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \quad v(f)(-x) &= f(0) - x \int_0^{\pi/2} f'(-x \sin t) dt \\ &= f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt = v(f)(x)\end{aligned}$$

donc la fonction $v(f)$ est paire.

11. b. Si f est impaire, alors $f(0) = 0$ et f' est paire. En suivant la même démarche qu'à la question précédente, on obtient que les fonctions $u(f)$ et $v(f)$ sont impaires.

11. c. Si $u(f)$ est paire, alors $v(u(f))$ est paire par [11.a.] et donc f est paire par [10.]

Partie C. Étude spectrale

12. Toujours par [10.], si $u(f)$ est la fonction nulle, alors

$$f = v(u(f)) = 0$$

et de même, si $v(f)$ est la fonction nulle, alors

$$f = u(v(f)) = 0.$$

On en déduit que les endomorphismes u et v sont injectifs et que 0 n'est une valeur propre ni pour u , ni pour v .

13. Le scalaire λ est une valeur propre de v si, et seulement si, il existe une application $f \in E$, non identiquement nulle, telle que

$$v(f) = \lambda \cdot f.$$

Comme u est injective, cette propriété équivaut au fait que

$$u(v(f)) = \lambda \cdot u(f),$$

égalité qui, d'après [10.], équivaut à

$$f = \lambda \cdot u(f)$$

ou encore à

$$u(f) = \frac{1}{\lambda} \cdot f$$

puisque $\lambda \neq 0$ par [12.]

Cela prouve que λ est une valeur propre de v si, et seulement si, $1/\lambda$ est une valeur propre de u et aussi que les vecteurs propres de v associés à λ sont exactement les vecteurs propres de u associés à $1/\lambda$.

14. a. ♣ Comme $f \in E$, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toutes les dérivées $f^{(n)}$ sont continues sur le segment $I = [-a, a]$, ce qui justifie l'existence des m_n .

♣ Par hypothèse, $u(f) = \lambda \cdot f$. En dérivant cette identité n fois, on obtient

$$\lambda \cdot f^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f^{(n)}(x \sin t) \sin^n t dt$$

d'après [5.], puis

$$|\lambda \cdot f^{(n)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f^{(n)}(x \sin t) \sin^n t| dt$$

par inégalité triangulaire et enfin

$$\forall x \in [-a, a], \quad |\lambda \cdot f^{(n)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} \|f^{(n)}\|_\infty \cdot W_n$$

par [9.a.] Le majorant qu'on vient de trouver est indépendant de x , on peut donc passer à la borne supérieure :

$$|\lambda| \cdot m_n \leq \frac{2m_n}{\pi} \cdot W_n.$$

Si $m_n > 0$, alors on peut simplifier :

$$|\lambda| \leq \frac{2W_n}{\pi}$$

alors $|\lambda| > 0$ par [12.] Comme $2^{W_n}/\pi$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (d'après [1.a.]), ces inégalités sont contradictoires. Par conséquent, $m_n = 0$ à partir d'un certain rang, donc $f^{(n)}$ est identiquement nulle à partir d'un certain rang et par conséquent f est polynomiale.

14. b. Par [3.a.], la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de vecteurs propres pour u et pour v , le vecteur X^n étant associé à la valeur propre $\lambda_n = \frac{2^{W_n}}{\pi}$ pour u et à la valeur propre $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ pour v (cette dernière propriété se déduisant de [3.a.] par un calcul direct ou de [13.], sans calcul).

En particulier, les valeurs propres λ_n sont deux à deux distinctes.

• Si $f \in E$ est un vecteur propre pour u associé à une valeur propre

$$\lambda \notin \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\},$$

alors la famille

$$(f, (X^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

est une famille libre (car une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est toujours une famille libre).

• Or $f \in \mathcal{P}$ et $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{P}$, donc la famille

$$(f, (X^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

ne peut pas être une famille libre!

• On vient donc de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'autre valeur propre pour u que les valeurs propres λ_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$$

et, d'après [12.],

$$\text{Sp}(v) = \left\{ \frac{1}{\lambda_n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

15. Par [14.a.], tout vecteur propre pour u appartient à $\mathcal{P}$, qui est un sous-espace strict de E . Il n'existe donc pas de base de E constituée de vecteurs propres pour u .

REMARQUE.— On dispose cependant d'une base de $\mathcal{P}$ constituée de vecteurs propres pour u (et pour v !), le sous-espace $\mathcal{P}$ étant dense dans E pour la convergence uniforme sur $[-a, a]$ (Théorème de Weierstrass) et aussi pour la convergence simultanée ([8.b.]).

On n'en demande pas plus...