INTÉGRALES

Index des démonstrations rédigées

Chapitre 8 — Intégrales généralisées

Chapitre 9 — Fonctions définies par une intégrale

Intégrales généralisées

Exercice 1 06-01

1. Si la fonction f est paire ou impaire, alors elle est intégrable au voisinage de $-\infty$ si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de $+\infty$.

2. Si f est paire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3. Si f est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$$

4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{1+t^2+t^4} = 0$$

Exercice 2 06-02

1.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\,dt = 0$$

2.

$$\forall\, a > 0, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\ell n\, t}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ell n\, a}{a}.$$

Exercice 3 06-03

1. Pour $a < b$,

$$\int_{a}^{b} \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi.$$

2. Pour tous $a < b$,

$$\int_{a}^{b} \sqrt{(b-x)(x-a)}\,dx = \frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

Exercice 4 06-04

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Exercice 5 06-05

Pour toute fonction f continue sur $[-1,1]$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{0}^{\pi} f(\cos t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin t)\,dt.$$

Exercice 6 06-06

1. Démontrer la convergence de

$$I = \int_{0}^{1} \frac{t-1}{\ell n\, t}\,dt.$$

2. Vérifier que

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

3. En déduire la valeur de I.

Exercice 7 06-07

Lorsque a tend vers $+\infty$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{\pi}{a}.$$

Exercice 8 06-08

1. Pour tout $n \geqslant 2$, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n-1}}\Big).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} - \frac{n+1}{2}\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt.$$

En particulier, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Exercice 9 06-09

1. L'intégrale

$$f(x) = \int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$$

est définie pour tout $x > 0$.

2. Au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

3. Au voisinage de 0,

$$f(x) = \int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} + \mathcal{O}(1)$$

donc $f(x) \sim -\ell n\, x$.

Exercice 10 06-10

Lorsque x tend vers 0,

$$\int_{x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \sim \frac{1}{x}.$$

Exercice 11 — 06-11

1. Pour tout $x > 0$, on pose
$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$
Alors $F(x) = o(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$ et $F(x) \sim -\ell n\, x$ au voisinage de 0.

2. La fonction F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et
$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 1$$
en intégrant par parties.

3. Au voisinage de $+\infty$,
$$F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x^2}\Big).$$

4. Pour tout $x > 0$, on pose
$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+x}\,dt.$$
Alors $\varphi(x) = e^{x^2}F(x^2)$, donc $\varphi(x) \sim -2e^{x^2}\,\ell n\, x$ au voisinage de 0 et
$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)$$
au voisinage de $+\infty$.

Exercice 12 — 06-12

Lorsque x tend vers $+\infty$,
$$\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,dt \sim \frac{\pi}{2}\,\ell n\, x.$$

Exercice 13 — 06-13

Lorsque x tend vers $+\infty$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Exercice 14 — 06-14

Si f est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors
$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Exercice 15 — 06-15

Lorsque n tend vers $+\infty$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t/n}{t+t^3}\,dt \sim \frac{\pi}{2n}.$$

Exercice 16 — 06-16

Par convexité de la fonction exp,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Exercice 17 — 06-17

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-kt}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 18 — 06-18

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

Exercice 19 — 06-19

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\,dt = \ell n\,\frac{1}{2}$$

Exercice 20 — 06-20

1. La fonction F définie par
$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t}\,dt$$
est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Comme
$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^{x^2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du,$$
la fonction F est une solution de l'équation différentielle
$$\forall\, x > 0, \quad 2xy(x) - y'(x) = \frac{2}{x}.$$

3. De plus $F(x) \sim 1/x^2$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $F(x) \sim -2\,\ell n\, x$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 21 — 06-21

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\,dt.$$

1. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2. Effectuer le changement de variable $u = t^2$.

3. Au moyen d'un changement de variable affine, éliminer l'entier n des bornes de l'intégrale.

4. En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

Exercice 22 — 06-22

Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes.

1.
$$\int_0^1 \frac{\ell n\, t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$$

2.
$$\int_0^{+\infty} (t+2) - \sqrt{t^2+4t+1}\,dt$$

Exercice 23 — 06-23

La fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ell n\, t}\,dt\right]$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Exercice 24 — 06-24

Justifier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ell n(1-x^2)}{x^2}\,dx$$

et calculer sa valeur au moyen d'une intégration par parties.

Exercice 25 — 06-25

Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,dt$$

et étudier le comportement de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26 — 06-26

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ en posant :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = \left|\begin{array}{ll} n\sqrt{n}\,t & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1/\sqrt{t} & \text{pour } 1/n \leqslant t \leqslant 1. \end{array}\right.$$

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$, mais ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer de deux manières différentes la limite de

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27 — 06-27

On considère deux suites réelles bornées $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose qu'il existe un segment $[c,d]$ (avec $c < d$) tel que

$$\forall\, t \in [c,d], \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt = 0.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel φ_n tel que

$$\forall\, t \in [c,d], \quad a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nt+\varphi_n).$$

2. Calculer

$$I_n = \int_c^d \big[a_n \cos nt + b_n \sin nt\big]^2\,dt$$

et en déduire que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{2}.$$

3. Démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 28 — 06-28

1. Soit f, de classe $\mathscr{C}^1$. Si f et f' sont intégrables au voisinage de $+\infty$, alors f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
2. Si une fonction est monotone et intégrable au voisinage de $+\infty$, alors elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
3. Une fonction uniformément continue et intégrable sur un voisinage de $+\infty$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Exercice 29 — 06-29

La fonction $w :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

est intégrable sur $]-1,1[$.

Exercice 30 — 06-30

Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

Exercice 31 — 06-31

Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \ell n\Big(\frac{1+t^2}{t^2}\Big)\,dt = \pi.$$

Exercice 32 — 06-32

Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\,dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Exercice 33 — 06kh-01

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Étudier l'intégrabilité de la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{(z+t)\sqrt{1+t}}$$

sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$.

Exercice 34 — 06kh-02

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(t) = \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}}.$$

Étudier l'intégrabilité de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty,+\infty[$.

Exercice 35 **06kh-03**

1. Étudier l'intégrabilité de la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}.$$

sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

2. Calculer

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3\sqrt{t^2-1}}$$

au moyen d'un changement de variable.

Exercice 36 **06kh-04**

Démontrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

et calculer sa valeur au moyen d'un changement de variable.

Exercice 37 **06kh-05**

Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Exercice 38 **06kh-06**

1. Démontrer que la fonction S définie par

$$\forall\, t > 0, \quad S(t) = \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}$$

est intégrable sur $I =]0, >]$.

2. Démontrer que la série

$$\sum \sqrt{t} e^{-(n+1)t}$$

converge pour tout réel $t > 0$ et préciser sa somme.

3. On *admet* que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

À l'aide d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-nt}\,dt.$$

4. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Exercice 39 **06Kh-51**

La fonction f définie par

$$f(x) = \left|\sin x\right|^x$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

On admettra l'équivalent classique des intégrales de Wallis :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 40 **06Kh-52**

Soient f et g, deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 1$$

et on considère l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + f(x)y(x) = g(x). \tag{E}$$

1. On suppose que la fonction g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Démontrer que toutes les solutions de (E) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. On suppose que la fonction g tend vers 0 au voisinage de $-\infty$. Démontrer qu'il existe une, et une seule, solution de (E) qui tende vers 0 au voisinage de $-\infty$.

Exercice 41 **06Kh-53**

Calculer un équivalent de

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t+t^2)^x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 42 **06Kh-54**

1. Calculer l'intégrale

$$u_n = \int_{n-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,dt.$$

2. En déduire les limites de

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,dt$$

et de

$$J_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{n}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 43 **06Kh-55**

Soit f, une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Étudier la limite de

$$F(h) = \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,dx$$

lorsque h tend vers 0.

Exercice 44 **06Kh-56**

Soit $\lambda > 0$ (fixé). On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, x > 0, \quad xy'(x) + \lambda y(x) = \frac{1}{1+x} \tag{E}$$

Existe-t-il une solution de cette équation qui tend vers une limite finie au voisinage de 0 ?

Exercice 45 rms130-576

On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}}\,dt \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Justifier l'existence de I et de S, puis exprimer I en fonction de S.

Exercice 46 rms130-1388

Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 47 rms132-571

Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$

1. Déterminer la limite de F au voisinage droit de 1.
2. Démontrer que F est injective.

Exercice 48 rms132-610

Soit A, une partie de $\mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!}$$

et on suppose que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}.$$

1. Soit I, une partie finie de A. Calculer

$$\sum_{n\in I} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!}\,dx$$

et en déduire que A est une partie finie.

2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 49 rms132-617

Soit f, une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{\pi f(0)}{2}.$$

Exercice 50 rms132-628

Soit $a > 0$. On considère une fonction g, continue sur $[0, a]$ et telle que $g(0) \neq 0$, et la fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^a g(t)e^{-xt}\,dt.$$

Démontrer que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}.$$

Exercice 51 rms132-1166

Démontrer l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} 1 - t \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}\,dt$$

puis calculer sa valeur.

Exercice 52 rms132-1167

On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx.$$

1. Justifier l'existence des intégrales I et J.
2. Vérifier que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I.

Exercice 53 rms132-1169

On étudie ici

$$F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Démontrer que

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

3. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln x.$$

Exercice 54 rms132-1219

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt, \qquad u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

et $v_n = e^{-\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum v_n$ converge.
   On notera dans la suite :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

2. Démontrer que l'intégrale I_n est bien définie. Calculer

$$\int_0^x ue^{-u}\,du$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}.$$

3. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I_n.$$

En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Démontrer que la série $\sum u_k$ converge. En posant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

démontrer que $T_n \sim {}^{R_n}/_{\sqrt{e}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 55 rms132-1225

On rappelle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt = n!$$

(étude de la fonction Γ) et que

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n.$$

1. Étudier les variations de $S(x) = (1+x)e^{-x}$ pour $x \geqslant 1$. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \geqslant 1,\quad S(x)^n \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(x).$$

2. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \, dt = 0.$$

3. Démontrer que

$$\forall\, x \geqslant -1,\quad \ell n(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \, dx.$$

5. En effectuant le changement de variable

$$u = (t-n)/\sqrt{n}$$

dans l'intégrale I_n, démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u} \, du = \sqrt{2\pi}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \, dx.$$

Exercice 56 rms134-1465

Trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \tan \frac{1}{k+n}.$$

Exercice 57 rms134-1482bis

On pose

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\ell n(1-t)}{t} \, dt.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$. (Préciser l'expression de sa dérivée.)
2. Démontrer que f est continue sur $[0, 1]$.
3. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
4. Calculer le développement limité à l'ordre deux de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$.

Exercice 58 rms134-1483

Calculer

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{du}{3 + \cos^2 u}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On posera $v = \tan u$.

Exercice 59 rms134-1516

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

Justifier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 60 rms134-1520

Démontrer l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2 t^2} \, dt$$

et calculer sa valeur.

Exercice 61 rms134-1659

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que f et f" sont bornées.
1. Justifier l'existence des réels

$$M_0(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left|f(x)\right| \quad \text{et} \quad M_2(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left|f''(x)\right|.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, démontrer que

$$\forall\, h > 0,\quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

3. Justifier alors l'existence de

$$M_1(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f'(x)\right|$$

et démontrer que

$$M_1(f) \leqslant 2\sqrt{M_0(f) M_2(f)}. \qquad (\star)$$

4. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $f_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant 2,\quad f_\varepsilon(x) = 2 - (2-x)^{2+\varepsilon}$$

et

$$\forall\, x > 2,\quad f_\varepsilon(x) = 2.$$

Démontrer que f_ε, f_ε' et f_ε'' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Préciser les valeurs de $M_0(f_\varepsilon)$, de $M_1(f_\varepsilon)$ et de $M_2(f_\varepsilon)$.
5. En déduire que le facteur 2 est la meilleure constante possible dans l'inégalité $(\star)$.

Exercice 62 rms134-1663

Soient $a < b$, deux nombres réels, et f, une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles, telle que
$$f(a) = f(b) = 0$$
et on considère le polynôme
$$P_0 = \frac{(X-a)(X-b)}{2}.$$

1. Trouver une relation simple entre les deux intégrales suivantes.
$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad \int_a^b f''(t)P_0(t)\,dt$$

2. En déduire que
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty.$$

Intégrales fonctions d'un paramètre

Exercice 63 07-01

Démonstration du théorème de continuité.

Exercice 64 07-02

1. La fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,dt$$
est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0.

3. Plus précisément,
$$F(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$
lorsque x tend vers $+\infty$ et
$$F(x) = -\ell n\, x + \mathcal{O}(1)$$
lorsque x tend vers 0.

Exercice 65 07-03

La fonction F définie par
$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix)^2}\,dt$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle.

Exercice 66 07-04

Démontrer que la fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(x)$ et en déduire $F(x)$.

Exercice 67 07-05

La fonction définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En calculant sa dérivée, on montre que
$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2}\,\ell n(1+x).$$

Exercice 68 07-06

1. La fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ell n(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,dt$$
est continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et
$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$

3. En déduire l'expression de $F(x)$.

Exercice 69 07-07

La fonction F définie par
$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 - x\cos t}\,dt$$
est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 70 07-08

La fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$$
est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 71 07-09

1. Démontrer l'existence de l'intégrale généralisée
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

2. On pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}\,dt.$$

2. a. Démontrer que l'intégrale généralisée $F(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2. b. Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. c. Démontrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par F.

2. d. Calculer $F(0)$ et déterminer la limite de F au voisinage de $+\infty$.

3. En déduire la valeur de I.

Exercice 72 **07-10**

Soit $0 < \alpha \leqslant 1/2$.

1. La fonction F_α définie par

$$F_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x\,dt}{t^\alpha(1+tx^2)}$$

est continue sur $\Omega =]0, +\infty[$.

2. Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F_\alpha(x) \sim \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}}.$$

3. Étudier la limite en 0 en distinguant le cas $\alpha = 1/2$.

Exercice 73 **07-11**

On pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ell n\, t}\, t^x\,dt.$$

1. L'ensemble de définition de F est l'intervalle ouvert $\Omega =]-1, +\infty[$.

2. La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

3. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

4. Pour tout $x > -1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1)u} - e^{-(x+2)u}}{u}\,du = \ell n\,\frac{2+x}{1+x}.$$

Exercice 74 **07-12**

On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \quad \text{et} \quad \forall\, x > 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+t^2}.$$

1. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer I_n en fonction de $F^{(n)}(1)$.

2. Expliciter $F(x)$ et en déduire les valeurs de I_n pour $n \geqslant 1$.

Exercice 75 **07-13**

1. Soit $A > 0$.

1. a.

$$\lim_{x\to 0} \int_0^A \frac{\sin t}{t} \cdot (e^{-xt} - 1)\,dt = 0$$

1. b. À l'aide d'une intégration par parties,

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \left|\int_A^{+\infty} \frac{e^{(-x+i)t}}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{2}{A}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2.

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot e^{-xt}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Exercice 76 **07kh-01**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\,dt.$$

1. Étudier l'ensemble de définition et la continuité.

2. Étudier la dérivabilité de F. Simplifier l'expression de $F'(x)$.

3. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ell n\, t}{1-t^2}\,dt = \frac{-\pi^2}{8}.$$

Exercice 77 **07kh-02**

On pose

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}\,dx.$$

1. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}$. En déduire la limite de $F(a)$ lorsque a tend vers 0.

3. Étudier la limite de $F(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

4. Trouver un équivalent de $F(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 78 **07kh-03**

Démontrer que la fonction F définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+ixt)}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 79 **07Kh-51**

On pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x\sin t)}{\sin t}\,dt.$$

1. Démontrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

2. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

3. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 80 **07Kh-52**

Soit $\alpha > 0$, fixé. On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt}\,dt.$$

1. Démontrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F'(x)$ en fonction de $F(x)$.

3. En déduire l'expression de $F(x)$.

Exercice 81 07Kh-53

On pose

$$F(x, y) = \int_0^{\pi/2} \ell n(x^2 \cos^2 t + y^2 \sin^2 t)\, dt.$$

1. Démontrer que la fonction F est définie sur $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Préciser la valeur de $F(y_0, y_0)$ pour $y_0 > 0$.
2. **(Uniquement pour les 5/2)** Démontrer que F est continue sur Ω.
3. On fixe $y = y_0 > 0$. Démontrer que la fonction $[x \mapsto F(x, y_0)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire l'expression de $F(x, y)$ pour $(x, y) \in \Omega$.

Exercice 82 07Kh-54

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue.
Étudier la limite de

$$I(h) = \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)\, dx$$

lorsque h tend vers 0.

Exercice 83 rms130-1375

On pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt.$$

1. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $F(x)$ est-elle bien définie ?
2. Calculer une primitive de

$$\left[t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}\right]$$

en posant $t = u^2$.
3. En déduire la valeur de $F(1/2)$.

Exercice 84 rms130-1399

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\frac{1}{x+i}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + \frac{1}{2(x+i)} y(x) = 0. \tag{E}$$

3. Démontrer que l'intégrale

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.
5. En déduire que f est une solution de l'équation (E).
6. Démontrer que l'application

$$J = \left[\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin t}{\sqrt{t}}\, dt\right]$$

est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer J en fonction de f et en déduire le signe de J.

Exercice 85 rms130-1402

1. Démontrer que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t} = 0.$$

En déduire l'existence de l'application h définie par

$$\forall\, x > 0, \quad h(x) = \int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t}\, dt.$$

2. Démontrer que $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad x^2 y'(x) + y(x) = x \tag{E}$$

si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall\, x > 0, \quad y(x) = e^{1/x} h(x) + \lambda e^{1/x}.$$

3. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{1+xu}$, démontrer que

$$\forall\, x > 0, \quad e^{1/x} h(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\, du.$$

4. Démontrer que l'application g définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\, du$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 86 rms132-628

Soit $a > 0$. On considère une fonction g, continue sur $[0, a]$ et telle que $g(0) \neq 0$, et la fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^a g(t) e^{-xt}\, dt.$$

Démontrer que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}.$$

Exercice 87 rms132-1228

On étudie

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt.$$

1. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que F est positive et décroissante. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F(x) - F'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Démontrer que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

En déduire un équivalent de F au voisinage de 0.

Exercice 88 rms134-1513

On pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt.$$

1. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

2. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x)$$

et calculer $(n+1)F(n)F(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution 1 06-01

On considère le changement de variable *affine* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = -t.$$

❧ Soient f, une fonction continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ et I, un intervalle contenu dans $\mathbb{R}$. Par définition, la fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction $|f|$ est intégrable sur I.

— Si f est *paire*, alors
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big|f(-t)\big| = \big|f(t)\big|.$$

— Si f est *impaire*, alors
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big|f(-t)\big| = \big|-f(t)\big| = \big|f(t)\big|.$$

Dans les deux cas, la fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction $(f \circ \varphi)$ est intégrable sur I.

❧ D'après le théorème de changement de variable affine, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $I =]a, b[$ si, et seulement si, la fonction
$$g = f \circ \varphi$$
est intégrable sur l'intervalle $J =]-b, -a[$.

1. Supposons que f soit intégrable au voisinage de $+\infty$: par définition, il existe un réel A tel que f soit intégrable sur $J =]A, +\infty[$.

Que la fonction f soit paire ou impaire, la fonction $f \circ \varphi$ est alors intégrable sur $J =]A, +\infty[$, donc la fonction f est intégrable sur $J =]-\infty, -A[$ et donc intégrable au voisinage de $-\infty$.

❧ Réciproquement, si f est intégrable au voisinage de $-\infty$, alors il existe un réel B tel que f soit intégrable sur $J =]-\infty, B[$.

Que f soit paire ou impaire, la fonction $f \circ \varphi$ est alors intégrable sur $J =]-\infty, B[$, donc la fonction f est intégrable sur $I =]-B, +\infty[$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$.

✍ *Comme les deux parties de cette démonstration sont très similaires, on peut se dispenser de rédiger complètement la deuxième partie (cependant, dans ce cas, il faut mentionner l'analogie).*

✍ *Comme d'habitude, pour démontrer qu'une fonction est intégrable, on ne manipule* ***aucune*** *intégrale,* seulement des fonctions positives ! *(De manière analogue, pour prouver qu'une série est absolument convergente, on n'étudie que son terme général, on ne calcule aucune somme partielle et encore moins de somme.)*

2. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors elle est intégrable sur les sous-intervalles $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Le changement de variable affine φ réalise une bijection de $J =]-\infty, 0]$ sur $I = [0, +\infty[$ et, si f est paire, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{0} f(-t)\,dt && \text{(parité de f)}\\
&= -\int_{-\infty}^{0} (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt && (\varphi'(t) \equiv -1)\\
&= -\int_{+\infty}^{0} f(u)\,du && (u = \varphi(t))\\
&= \int_{0}^{+\infty} f(u)\,du.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3. De même, si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et impaire, alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{0} f(-t)\,dt && \text{(imparité de f)}\\ &= \int_{-\infty}^{0} (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt && (\varphi'(t)\equiv -1)\\ &= \int_{+\infty}^{0} f(u)\,du && (u=\varphi(t))\\ &= -\int_{0}^{+\infty} f(u)\,du.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$$

4. La fonction définie par

$$f(t) = \frac{t}{1+t^2+t^4}$$

est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est définie et *continue* sur $]-\infty,+\infty[$.

Le numérateur est impair, le dénominateur est pair, donc le quotient f est une fonction *impaire*.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f(t) \sim \frac{t}{t^4} = \frac{1}{t^3}$$

donc la fonction f est intégrable au voisinage de $+\infty$. D'après **[1]**, la fonction f est aussi intégrable au voisinage de $-\infty$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après **[3]**,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$$

Solution 2 06-02

1. La fonction f définie sur $I =]0,+\infty[$ par

$$f(u) = \frac{\ell n\, u}{1+u^2}$$

est une fonction continue sur I. Elle est intégrable au voisinage de 0, puisque $f(u) \sim \ell n\, u$. Elle est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque

$$f(u) = \underbrace{\frac{\ell n\, u}{\sqrt{u}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}}_{\sim 1/u\sqrt{u}} = o\Big(\frac{1}{u\sqrt{u}}\Big).$$

Le changement de variable φ défini par

$$\forall\, t\in I, \quad u = \varphi(t) = \frac{1}{t}$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur I.

Comme f est intégrable sur I, alors

$$(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t) = \frac{\ell n(1/t)}{1+(1/t)^2}\cdot\frac{-1}{t^2} = \frac{\ell n\, t}{1+t^2} = f(t)$$

est intégrable sur I (ce qui ne nous apprend rien !) et

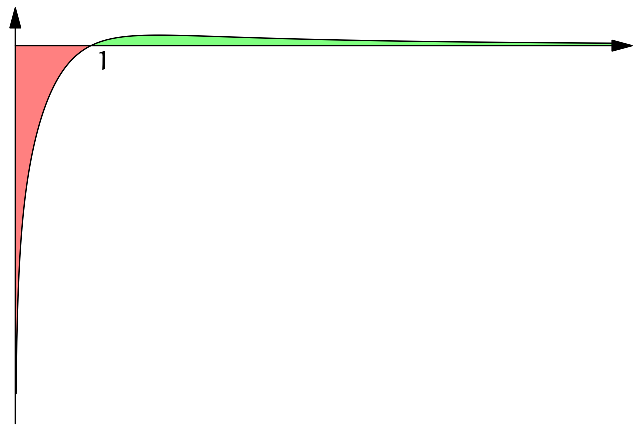
$$\int_{0}^{+\infty} (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{+\infty}^{0} f(u)\,du.$$

Autrement dit,

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_{0}^{+\infty} f(u)\,du$$

et par conséquent,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ell n\, u}{1+u^2}\,du = 0.$$



L'aire verte et l'aire rouge se compensent exactement !

2. On considère maintenant la fonction continue g définie par

$$\forall\, u \in \left]0, +\infty\right[, \quad g(u) = \frac{\ln u}{a^2 + u^2}$$

et le changement de variable *affine* ψ défini par

$$\forall\, x \in I, \quad u = \psi(t) = at,$$

qui réalise une bijection de I sur I.

La fonction (de t) définie par

$$(g \circ \psi)(t) \cdot \psi'(t) = a\frac{\ln(at)}{a^2 + (at)^2} = \frac{1}{a}\frac{(\ln t + \ln a)}{1 + t^2} = \frac{f(t)}{a} + \frac{\ln a}{a}\frac{1}{1 + t^2}$$

est intégrable sur I en tant que somme de deux fonctions intégrables. D'après le théorème de changement de variable, la fonction g est elle aussi intégrable sur I et, comme les deux termes de cette somme sont intégrables, on peut invoquer la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(u)\,du &= \int_0^{+\infty} (g \circ \psi)(t) \cdot \psi'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt + \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}\,dt = \big[\operatorname{Arctan} t\big]_0^x = \operatorname{Arctan} x$$

(puisque $\operatorname{Arctan} 0 = 0$) et, en faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

et on obtient enfin que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ln a}{a}.$$

Solution 3 **06-03**

Les deux intégrales se simplifient à l'aide d'un même changement de variable affine qui transporte l'intervalle $J = \left]a, b\right[$ sur l'intervalle $I = \left]-1, 1\right[$.

On cherche donc une fonction affine φ telle que

$$\varphi(a) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi(b) = 1.$$

D'après la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange,

$$\varphi(t) = \varphi(a) \cdot \frac{b - t}{b - a} + \varphi(b) \cdot \frac{t - a}{b - a} = \frac{(t - b) + (t - a)}{b - a} = \frac{2t - (a + b)}{b - a}.$$

✍ *Pourquoi chercher l'expression de φ quand le cours nous donne la formule ? Il nous reste à la simplifier.*

En particulier,
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \frac{2}{b-a} > 0.$$
De plus, $\psi(t) = 1 - \varphi(t)$ est une fonction affine telle que $\psi(a) = 2$ et $\psi(b) = 0$ et $\chi(t) = 1 + \varphi(t)$ est une fonction affine telle que $\chi(a) = 0$ et $\chi(b) = 2$, donc
$$\psi(t) = 2 \cdot \frac{b-t}{b-a} \quad \text{et} \quad \chi(t) = 2 \cdot \frac{t-a}{b-a}.$$
Par conséquent,
$$1 - \varphi^2(t) = \big(1-\varphi(t)\big)\big(1+\varphi(t)\big) = 4 \cdot \frac{(b-t)(t-a)}{(b-a)^2}.$$

✍ *J'espère avoir convaincu les masses de l'utilité* ***pratique*** *des polynômes interpolateurs de Lagrange (au moins pour le cas du premier degré).*

1. La fonction
$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$
est intégrable sur l'intervalle $I =]-1, 1[$ (fonction de référence) et
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} 1 - \operatorname{Arcsin}(-1) = \pi.$$

❧ D'après le Théorème de changement de variable, la fonction définie par
$$(f \circ \varphi)(t).\varphi'(t) = \frac{b-a}{2\sqrt{(b-t)(t-a)}} \cdot \frac{2}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$$
est intégrable sur J et comme φ' est une fonction **positive**,
$$\int_J (f \circ \varphi)(t).\varphi'(t)\, dt = \int_I f(x)\, dx.$$
Autrement dit,
$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

✍ *Une rédaction claire ne suit pas la chronologie des calculs !*

Initialement, on considère l'intégrale sur $]a, b[$ d'une fonction $g(t)$. Cette intégrale nous pousse à introduire une nouvelle variable
$$x = \frac{2t-(a+b)}{b-a}$$
et c'est ce changement de variable qui nous conduit à définir une nouvelle fonction $f(x)$ (sur un nouvel intervalle) telle que
$$\forall\, t \in]a, b[, \quad g(t) = (f \circ \varphi)(t).\varphi'(t).$$
Dans un souci de clarté, il vaut mieux commencer la démonstration en introduisant cette fonction $f(x)$ et revenir progressivement à la fonction $g(t)$.

2. La fonction
$$f = \left[x \mapsto \sqrt{1-x^2}\right]$$
est continue sur le segment $I = [-1, 1]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle.

On applique le Théorème de changement de variable à la fonction affine φ définie plus haut : la fonction définie par
$$g(t) = (f \circ \varphi)(t).\varphi'(t) = \frac{2\sqrt{(b-t)(t-a)}}{b-a} \cdot \frac{2}{b-a}$$
est intégrable sur $J = [a, b]$ et comme φ' est une fonction **positive**,
$$\int_J g(t)\, dt = \int_I f(x)\, dx.$$

✍ *Pour une fois, une partie du Théorème ne sert strictement à rien : la fonction g est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est évidemment intégrable sur cet intervalle. On n'a pas attendu le Théorème pour le savoir !*

Autrement dit,

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b \sqrt{(b-t)(t-a)}\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

❧ Les amateurs de calculs de primitives (tous les vices sont dans la nature) se précipitent sur un nouveau changement de variable.

La fonction $\psi = [\theta \mapsto \cos\theta]$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ (et **décroissante**) du segment $[0, \pi]$ sur le segment $[-1, 1]$.

La fonction définie par

$$\begin{aligned}(f \circ \psi)(\theta).|\psi'(\theta)| &= \sqrt{1-\cos^2\theta}.|-\sin\theta| \\ &= \sin^2\theta \qquad\qquad (\text{car } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \text{ et } \sin\theta \geqslant 0)\end{aligned}$$

est (évidemment !) intégrable sur le segment $[0, \pi]$ et

$$\int_{[0,\pi]} (f \circ \psi)(\theta).|\psi'(\theta)|\,d\theta = \int_{[-1,1]} f(x)\,dx.$$

Par conséquent,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta.$$

✍ *La décroissance de φ nous a incité à conserver la valeur absolue sur φ', ce qui nous permet de conserver les bornes de l'intégrale dans l'ordre croissant. (C'est une commodité, pas une nécessité. La seule nécessité est de ne pas faire de faute de signe.)*

Il reste à linéariser :

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

pour trouver la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\int_a^b \sqrt{(b-t)(t-a)}\,dt = \frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

❧ Les géomètres s'épargneront ce dernier changement de variable. En effet, l'aire sous la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$: c'est l'aire d'un demi-cercle de rayon 1, soit $\pi/2$.

✍ *Les **vrais** géomètres auront remarqué dès le début qu'on calculait l'aire d'un demi-disque de diamètre $[a, b]$, soit*

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Solution 4 — 06-04

On sait que la fonction $f = [x \mapsto e^{-x^2}]$ est intégrable sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ (fonction de référence). De plus, il s'agit d'une fonction paire, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Même si la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, on peut considérer qu'il s'agit ici d'une intégrale sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

La fonction $\varphi = \left[t \mapsto \sqrt{t}\right]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection (croissante) de $J =]0, +\infty[$ sur $I =]0, +\infty[$. D'après le Théorème de changement de variable, la fonction

$$(f \circ \varphi)(t).\varphi'(t) = e^{-(\sqrt{t})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

est intégrable sur J et de plus, comme φ' est une fonction **positive**,

$$\int_J \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \int_I e^{-x^2}\, dx.$$

✍ *La remarque sur le signe de $\varphi'(t)$ sert à justifier l'absence de valeur absolue.*

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Solution 5 **06-05**

Soit f, une fonction continue sur le segment $I_0 = [-1, 1]$. La fonction g définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

est donc continue sur l'intervalle *ouvert* $I =]-1, 1[$.

❧ La fonction $\varphi = [\theta \mapsto \cos\theta]$ réalise une bijection (décroissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle ouvert $J =]0, \pi[$ sur l'intervalle I. D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction

$$(g\circ\varphi)(\theta).|\varphi'(\theta)| = \frac{f(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\cdot|-\sin\theta| = \frac{f(\cos\theta)}{\sin\theta}\cdot\sin\theta = f(\cos\theta) \qquad \text{(car } \sin\theta > 0 \text{ sur J)}$$

est intégrable sur J. Or la composée $[\theta \mapsto f(\cos\theta)]$ est continue sur le segment $J_0 = [0, \pi]$

$$\begin{array}{ccccc} J_0 & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \cos\theta & \longmapsto & f(\cos\theta) \end{array}$$

donc elle est intégrable sur $J \subset J_0$, ce qui prouve que $g(x)$ est intégrable sur I.

✍ *On peut aussi s'inspirer du résultat établi en **[06-29]** pour justifier l'intégrabilité de la fonction intégrande. Sachant que la fonction*

$$w = \left[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$

est intégrable sur $I =]-1, 1[$ et que la fonction f est continue sur le segment $[-1, 1]$ et donc bornée sur I, le produit $g = fw$ est intégrable sur I.

De plus,

$$\int_J (g\circ\varphi)(\theta).|\varphi'(\theta)|\, d\theta = \int_I g(x)\, dx$$

c'est-à-dire (en plaçant les bornes dans l'ordre croissant)

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta.$$

❧ De même, la fonction $\psi = [\theta \mapsto \sin\theta]$ réalise une bijection (croissante cette fois) de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle ouvert $K =]-\pi/2, \pi/2[$ sur l'intervalle I. D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction

$$(g\circ\psi)(\theta).|\psi'(\theta)| = \frac{f(\sin\theta)}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot|\cos\theta| = \frac{f(\sin\theta)}{\cos\theta}\cdot\cos\theta = f(\sin\theta) \qquad \text{(car } \cos\theta > 0 \text{ sur K)}$$

est intégrable sur K. Or la composée $[\theta \mapsto f(\sin\theta)]$ est continue sur le segment $K_0 = [-\pi/2, \pi/2]$

$$\begin{array}{ccccc} K_0 & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta & \longmapsto & f(\sin\theta) \end{array}$$

donc elle est intégrable sur $K \subset K_0$, ce qui prouve (à nouveau !) que $g(x)$ est intégrable sur I.

De plus,

$$\int_K (g\circ\psi)(\theta).\psi'(\theta)\, d\theta = \int_I g(x)\, dx$$

(sans valeur absolue car, cette fois, $\psi'(\theta) > 0$) et donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin\theta)\, d\theta.$$

Solution 6 06-06

1. La fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{t-1}{\ell n\, t} \right]$$

est évidemment continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. Lorsque t tend vers 0,

$$f(t) \sim \frac{-1}{\ell n\, t} \longrightarrow 0.$$

Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{(t-1)}{\ell n[1-(1-t)]} \sim \frac{(t-1)}{-(t-1)} \longrightarrow -1.$$

La fonction f admet donc un prolongement continu sur le segment $[0,1]$ (en posant $f(0)=0$ et $f(1)=-1$), donc elle est intégrable sur $]0,1[$.

✍ *Seul le prolongement de f est intégrable sur le segment $[0,1]$, car f elle-même* n'est pas définie *sur le segment $[0,1]$, mais seulement sur l'ouvert $]0,1[$.*

2. La fonction $\varphi = [x \mapsto t = e^{-x}]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $]0,1[$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Comme $f(t)$ est intégrable sur $]0,1[$, le Théorème du changement de variable nous assure que

$$f\circ\varphi(x)\cdot\varphi'(x) = \frac{e^{-x}-1}{\ell n(e^{-x})}\cdot(-e^{-x}) = \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$I = \int_{+\infty}^{0} f\circ\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx.$$

❧ Puisque la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \right]$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$, on sait que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx.$$

Comme les deux fonctions

$$\left[x \mapsto \frac{e^{-x}}{x} \right] \quad \text{et} \quad \left[x \mapsto \frac{e^{-2x}}{x} \right]$$

sont intégrables sur $[\varepsilon,+\infty[$ (continues sur cet intervalle et $o(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$), on peut invoquer la linéarité de l'intégrale :

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x}\,dx.$$

Le changement de variable AFFINE $y=2x$ dans la dernière intégrale nous donne :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

3. Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $x\in[\varepsilon,2\varepsilon]$,

$$\frac{e^{-2\varepsilon}}{x} \leqslant \frac{e^{-x}}{x} \leqslant \frac{e^{-\varepsilon}}{x}.$$

En intégrant sur $[\varepsilon,2\varepsilon]$, on en déduit que

$$e^{-2\varepsilon}\,\ell n\, 2 \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \leqslant e^{-\varepsilon}\,\ell n\, 2$$

et, par encadrement, que $I = \ell n\, 2$.

Variante 1.

La fonction $[x \mapsto (e^{-x}-1)/x]$ est continue sur $]0,+\infty[$ et tend vers -1 au voisinage de 0, donc elle est intégrable au voisinage de 0. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx = \int_0^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx - \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0-0=0.$$

Par conséquent, en vertu de l'Astuce taupinale,

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx = \ln 2 + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \ln 2 + 0.$$

On prendra soin de ne jamais invoquer la linéarité pour des intégrales divergentes !

Variante 2.

La fonction $g = [x \mapsto e^{-x}/x]$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $g(x) \sim {}^1\!/_x$ au voisinage de 0. Comme la fonction $[x \mapsto {}^1\!/_x]$ est continue et positive mais pas intégrable au voisinage de 0, on en déduit que

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\ln\varepsilon$$

(Théorème d'intégration des ordres de grandeurs, version divergente).

Mais cela nous conduit à

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \big[\ln 2\varepsilon - \ln\varepsilon + o(\ln\varepsilon)\big] = o(\ln\varepsilon),$$

ce qui ne nous permet pas de conclure !

Solution 7 **06-07**

Comme a tend vers $+\infty$, on peut supposer que $a > 1$. Par conséquent, la fonction intégrande définie par

$$f(x) = \frac{1}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$$

est continue sur l'intervalle $]-1,1[$.

De plus,

$$f(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}(a+1)\sqrt{1+x}} = \frac{K}{(x-x_0)^{\alpha}}$$

avec $x_0 = -1$ et $\alpha = {}^1\!/_2 < 1$, donc f est intégrable au voisinage de -1.

De même,

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}(a-1)\sqrt{1-x}} = \frac{K'}{(x_0-x)^{\alpha}}$$

avec $x_0 = 1$ et $\alpha = {}^1\!/_2 < 1$, donc f est intégrable au voisinage de 1.

Ainsi, la fonction f est intégrable sur $]-1,1[$.

❧ Pour $a > 1$,

$$\forall\, x \in]-1,1[,\quad \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a-x} < \frac{1}{a-1}$$

et comme $\sqrt{1-x^2} > 0$, on en déduit que

$$\forall\, x \in]-1,1[,\quad \frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (\star)$$

Comme la fonction Arcsin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et continue sur le segment $[-1,1]$, l'intégrale généralisée

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

est convergente et égale à $\operatorname{Arcsin} 1 - \operatorname{Arcsin}(-1) = \pi$.

✍ *On vient d'appliquer ici la version généralisée du Théorème fondamental. Si on entre dans les détails, on commence par remarquer que*

$$\forall\ -1 < A \leqslant B < 1,\quad \int_A^B \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} B - \operatorname{Arcsin} A$$

(version classique du Théorème fondamental, appliquée à une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$) avant d'en déduire que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} 1 - \operatorname{Arcsin}(-1)$$

en faisant tendre A vers -1 et B vers 1, la continuité de la fonction Arcsin intervenant dans le second membre.

✍ *On peut aussi remarquer, mais ça ne sert à rien ici, que la convergence de cette intégrale généralisée prouve que la fonction*

$$\left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

*est intégrable sur $]-1,1[$. En effet, cette fonction étant **positive**, la convergence de l'intégrale équivaut à la convergence absolue de l'intégrale.*

On peut donc intégrer l'encadrement $(\star)$ et obtenir

$$\forall\, a > 1, \quad \frac{\pi}{a+1} \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{a-1}.$$

On en déduit en particulier que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{a}.$$

Solution 8 **06-08**

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f_n(t) = \frac{e^{-t^2}}{t^n}$$

est clairement continue sur $]0,+\infty[$ et $f_n(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, donc la fonction f_n est intégrable sur $[x,+\infty[$ pour tout $x > 0$.

❧ On fixe dorénavant un entier $n \geqslant 2$.
Comme la fonction $\left[t \mapsto e^{-t^2}\right]$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{e^{-x^2}}{t^n}. \tag{1}$$

Comme $n \geqslant 2$, le majorant est une fonction (de la variable t) intégrable sur $[x,+\infty[$:

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt \leqslant e^{-x^2} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{e^{-x^2}}{(n-1)x^{n-1}}.$$

On en déduit enfin que

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n-1}}\Big) \tag{2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. (Comme n est *fixé*, le facteur $(n-1)$ qui figure au dénominateur doit être traité comme une constante.)

✍ *Comme f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$, on sait **[10.3]** que l'intégrale*

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. L'ordre de grandeur (2) est plus précis.

✍ *On peut faire encore plus précis car l'encadrement (1) est tout juste digne d'un* stagiaire.
Le Maître *verra, lui, l'encadrement suivant :*

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant f_n(t) = \frac{te^{-t^2}}{t^{n+1}} \leqslant \frac{te^{-t^2}}{x^{n+1}}$$

et en déduira, par intégration sur $[x, +\infty[$, que

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \int_x^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}}$$

et par conséquent que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (et pas seulement $n \geqslant 2$),

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n+1}}\Big) \tag{3}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Nous allons intégrer par parties pour trouver un ordre de grandeur plus précis (méthode archi-classique). Pour $0 < x < y$, on remarque que

$$\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{1}{2}\int_x^y \frac{2te^{-t^2}}{t^{n+1}}\,dt$$

et on en déduit que

$$\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \Big[\frac{-e^{-t^2}}{2t^{n+1}}\Big]_x^y - \int_x^y \frac{-(n+1)}{2}\cdot\frac{-e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt.$$

Comme les fonctions f_n et f_{n+2} sont intégrables au voisinage de $+\infty$, on peut faire tendre y vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall\, x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} - \frac{n+1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt. \tag{4}$$

On déduit alors de (3) (avec $n \leftarrow n+2$) que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{(n+2)+1}}\Big) = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n+3}}\Big), \tag{5}$$

estimation digne d'un *Grand maître* (comparer avec (3)...).

❧ On en déduit en particulier (pour $n = 0$) que

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Mais ce n'est pas tout ! Les deux intégrales de (4) sont du même type : on peut donc itérer le procédé. On en déduit (pour $n = 0, 2, 4$ puis 6) que

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{8x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^6}\,dt \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{8x^5} - \frac{15e^{-x^2}}{16x^7} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^9}\Big).
\end{aligned}$$

Le Grand maître n'arrête de calculer que par faute de place !

Solution 9 **06-09**

1. Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\varphi = \Big[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}\Big]$$

est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Par linéarité de l'intégrale,

$$\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - f(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right)\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{x}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{t}{x})^2}}\right)\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Or, pour tout $u \geqslant 0$, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$0 \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \frac{u}{\sqrt{1+u}(\sqrt{1+u}+1)} \leqslant \frac{u}{2} \tag{$\star$}$$

puisque le dénominateur est manifestement supérieur à 2.

✍ *On peut aussi déduire l'inégalité ($\star$) du Théorème fondamental :*

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \frac{-1}{\sqrt{1+u}} - \frac{-1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{dz}{(1+z)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2}\cdot u$$

puisque, pour tout $0 \leqslant z \leqslant u$,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+z}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+z)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

✍ *On peut également la voir comme une inégalité de convexité : la fonction*

$$\left[u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}\right]$$

est convexe sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\forall\, u \geqslant 0, \qquad \frac{d^2}{du^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}\right) = \frac{3}{4(1+u)^{5/2}} \geqslant 0$$

et comme

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{u}{2} + o(u)$$

lorsque u tend vers 0, on en déduit que

$$\forall\, u \geqslant 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+u}} \geqslant 1 - \frac{u}{2}$$

(une fonction convexe est minorée par sa tangente).

Comme l'intégration conserve les inégalités (les bornes sont ici dans l'ordre croissant), on en déduit que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - f(x) \leqslant \frac{1}{x^3}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{2\sqrt{1+t^2}}$$

et donc que

$$f(x) - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

pour $x \to +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

❧ On en déduit en particulier que

$$f(x) \sim \frac{K_1}{x}$$

au voisinage de $+\infty$, avec

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{Arg\,sh} 1 = -\ell n(\sqrt{2}-1).$$

✍ *Cette dernière remarque s'adresse à ceux qui, méprisant le Programme Officiel, connaissent la dérivée de la fonction* $\operatorname{Arg\,sh}$.

3. On procède bien entendu de la même manière. Pour tout $x > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} - f(x) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}.$$

D'après l'encadrement ($\star$),

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant \frac{t^2}{2}$$

et par conséquent,

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{t^2}{2\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{t}{2}$$

puisque $\sqrt{x^2+t^2} \geqslant \sqrt{0+t^2} = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

L'intégration conserve les inégalités, donc

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} - f(x) \leqslant \int_0^1 \frac{t}{2}\,dt$$

pour tout $x > 0$, ce qui prouve que la différence

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} - f(x),$$

considérée comme une fonction de x, reste bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} + \mathcal{O}(1)$$

lorsque $x \to 0^+$.

Pour tout $x > 0$, le changement de variable affine $u = t/x$ et la relation de Chasles donnent

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \int_0^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}}_{\text{Cte}} + \int_1^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Lorsque x tend vers 0^+, l'expression $1/x$ tend vers $+\infty$ et lorsque u tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \sim \frac{1}{u}.$$

Or $[u \mapsto 1/u]$ est une fonction *positive* et *non intégrable* au voisinage de $+\infty$, donc

$$\int_1^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \sim \int_1^{1/x} \frac{du}{u} = -\ln x$$

lorsque x tend vers 0^+. On en déduit que

$$f(x) = \left[\text{Cte} - \ln x + o(\ln x)\right] + \mathcal{O}(1)$$

et donc que

$$f(x) \sim -\ln x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

✍ *Là encore, si on connaît la dérivée d'*$\operatorname{Arg\,sh}$*,*

$$\int_0^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \sim -\ln x.$$

On est quand même plus efficace quand on est plus savant...

Solution 10 **06-10**

La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\cos t}{t^2}$$

est continue sur l'intervalle ouvert $I =]0, +\infty[$. De plus,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big),$$

donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

est bien définie pour tout $x > 0$.

❧ Comme

$$f(t) = \cos t \cdot \frac{1}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} g(t) = \frac{1}{t^\alpha} \qquad \text{avec } \alpha = 2 \geqslant 1,$$

la fonction f n'est pas intégrable au voisinage de 0.

La fonction de référence g est **positive**, intégrable au voisinage de $+\infty$ mais non intégrable au voisinage de 0, le Théorème d'intégration des ordres de grandeur nous assure que

$$\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)\, dt = \frac{1}{x}.$$

Solution 11 **06-11**

1. On doit bien sûr *commencer* par justifier l'existence de l'intégrale généralisée $F(x)$.

❧ La fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$$

est évidemment continue sur $]0, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$,

$$f(t) = o(e^{-t}),$$

donc f est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

✍ *Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim {}^1\!/_t$, donc f est intégrable sur tous les intervalles $[x, +\infty[$ (avec $x > 0$) sans être pour autant intégrable sur $]0, +\infty[$. Cela mérite qu'on s'en souvienne...*

Étude au voisinage de $+\infty$

La fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est une fonction *positive* et *intégrable* au voisinage de $+\infty$. Comme $f(t) = o(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, alors on déduit du Théorème d'intégration des relations de comparaison que

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{=} o\Big(\int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt\Big).$$

Or, pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt = \big[-e^{-t}\big]_x^{+\infty} = e^{-x},$$

donc

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-x}). \tag{6}$$

✍ *Comme f est intégrable au voisinage de $+\infty$, on pouvait affirmer directement que*

$$\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

(il s'agit du "reste" d'une intégrale convergente) mais on a obtenu ici un résultat bien plus précis.

Étude au voisinage de 0

La fonction $[t \mapsto 1/t]$ est une fonction *continue*, *positive* et NON *intégrable* au voisinage de 0. Comme $f(t) \sim 1/t$ au voisinage de 0, alors on déduit du Théorème d'intégration des relations de comparaison que

$$\int_x^1 f(t)\,dt \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ell n\, x.$$

Comme f est intégrable sur $[1, +\infty[$, on déduit de la relation de Chasles que

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(t)\,dt}_{=\text{Cte}} \underset{x\to 0}{=} -\ell n\, x + o(\ell n\, x) + \mathcal{O}(1) \sim -\ell n\, x. \tag{7}$$

✍ *On a dit plus haut que f était positive, intégrable au voisinage de $+\infty$, mais pas intégrable au voisinage de 0. On aurait pu en déduire directement que*

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.$$

En appliquant un théorème d'intégration des relations de comparaison, on a obtenu ici un résultat bien plus précis (bis).

2. Comme la fonction f (définie plus haut) est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qu'elle est intégrable au voisinage de $+\infty$, la fonction F est en fait une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, primitive de $-f$ (généralisation du Théorème fondamental).

Plus précisément, la fonction F est **la** primitive de $-f$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ *Rappelons que deux primitives d'une fonction g sur un* intervalle I *diffèrent d'une constante.*

Par conséquent, la fonction $-f$ admet ***au plus une*** *primitive sur $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et, comme on l'a justifié plus haut, la fonction F est cette primitive.*

De même, la fonction $-f$ admet ***au plus une*** *primitive sur $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 au voisinage de 0. Mais comme la fonction f est positive et qu'elle n'est pas intégrable au voisinage de 0,* toutes *ses primitives tendent vers $+\infty$ au voisinage de 0.*

D'après les ordres de grandeur (6) et (7), la fonction F est intégrable au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, la fonction F est bien intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx$$

est convergente et, par définition,

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to +\infty}} \int_a^b F(x)\,dx.$$

❧ Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$, nous pouvons intégrer par parties : quels que soient $0 < a < b$,

$$\int_a^b F(x)\,dx = \big[xF(x)\big]_a^b - \int_a^b xF'(x)\,dx = bF(b) - aF(a) + \int_a^b xf(x)\,dx.$$

Or $xf(x) = e^{-x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et d'autre part, d'après (6) et (7) :

$$bF(b) \underset{b\to+\infty}{=} o(be^{-b}) \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad aF(a) \underset{a\to 0}{\sim} -a\,\ell n\, a \xrightarrow[a\to 0]{} 0.$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 0 - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 1.$$

3. On intègre à nouveau par parties en dérivant la fraction (et donc en intégrant l'exponentielle).

Quels que soient $0 < x < y$ *fixés*,

$$\int_x^y \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[\frac{-e^{-t}}{t}\right]_x^y - \int_x^y -\frac{-e^{-t}}{t^2}\,dt.$$

La fonction f_2 définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f_2(t) = \frac{e^{-t}}{t^2}$$

est évidemment continue sur $]0,+\infty[$ et $f_2(t) = o(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, donc f_2 est intégrable sur $[x,+\infty[$ pour tout $x > 0$. On peut donc faire tendre y vers $+\infty$ et en déduire que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt. \tag{8}$$

❧ Il nous reste à estimer la dernière intégrale à l'aide d'un encadrement simple.

✍ *La méthode qui suit est archi-classique.*

Il est clair que

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{x^2}. \tag{9}$$

Les trois fonctions de cet encadrement étant intégrables au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x^2}. \tag{10}$$

Cet encadrement montre que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x^2}\Big) \tag{11}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. On déduit alors de (8) que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x^2}\Big). \tag{12}$$

✍ *Il faut acquérir un peu d'expérience (c'est-à-dire faire pas mal de calculs) avant d'arriver spontanément à l'encadrement* (9). *L'encadrement suivant serait tout aussi juste :*

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{t^2}$$

mais donnerait après intégration :

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-x}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-x}}{x}$$

ce qui serait infiniment moins utile que (10)*, puisqu'on pourrait seulement en déduire que*

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x}\Big).$$

4. Soit $x > 0$. La fonction *affine* $\psi(t) = x(t+x)$ réalise une bijection (croissante) de $J = [0,+\infty[$ sur $I = \big[x^2,+\infty\big[$ et

$$\forall\, t \in J, \quad \frac{e^{-xt}}{x+t} = e^{x^2} \cdot \frac{e^{-x(t+x)}}{x(t+x)} \cdot x = e^{x^2} \cdot f\big(\psi(t)\big) \cdot \big|\psi'(t)\big|.$$

On a démontré à la première question que $f(u)$ était intégrable sur l'intervalle I, le Théorème de changement de variable nous assure alors que

$$\Big[t \mapsto \frac{e^{-xt}}{x+t}\Big]$$

est bien intégrable sur l'intervalle J et que, de plus,

$$\int_0^{+\infty} e^{x^2} \cdot f\big(\psi(t)\big) \cdot \big|\psi'(t)\big|\,dt = e^{x^2} \int_{x^2}^{+\infty} f(u)\,du$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi(x) = e^{x^2} F(x^2).$$

❧ On déduit alors de (7) et du Théorème de composition des limites que

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x^2)}{-\ln(x^2)} = 1$$

(puisque x^2 tend vers 0 lorsque x tend vers 0). Par conséquent,

$$F(x^2) \underset{x \to 0}{\sim} -2\ell n\, x$$

et donc

$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} -2e^{x^2} \ell n\, x.$$

❧ De manière analogue, comme x^2 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on déduit du développement asymptotique (12) que

$$F(x^2) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{e^{-x^2}}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^4}\Big).$$

Par conséquent,

$$\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big).$$

Solution 12 **06-12**

La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\text{Arctan}\, t}{t}$$

est continue sur l'intervalle ouvert $I_0 =]0, +\infty[$. De plus, $f(t)$ tend vers 1 lorsque t tend vers 0 (forme indéterminée usuelle), donc f est intégrable au voisinage de 0 et l'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

est convergente pour tout $x > 0$.

❧ Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f(t) = \text{Arctan}\, t \cdot \frac{1}{t} \sim g(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t}$$

et comme $1/t$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, la fonction f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Cela dit, la fonction de référence g est **positive** et continue sur $[1, +\infty[$. Le Théorème d'intégration des ordres de grandeur appliqué sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ nous assure donc que

$$\int_1^x f(t)\, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_1^x g(t)\, dt = \frac{\pi}{2} \ell n\, x.$$

On a ainsi démontré que

$$\int_0^x f(t)\, dt = F(1) + \int_1^x f(t)\, dt \underset{x \to +\infty}{=} F(1) + \Big[\frac{\pi}{2} \ell n\, x + o(\ell n\, x)\Big].$$

Comme $F(1)$ est une constante réelle et que $\ell n\, x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit enfin que

$$\int_0^x \frac{\text{Arctan}\, t}{t}\, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \cdot \ell n\, x.$$

✍ *Il est impossible d'appliquer le Théorème sur l'intervalle $]0, +\infty[$ car la fonction de référence g n'est pas intégrable au voisinage de 0. Il était donc nécessaire d'appliquer la relation de Chasles pour rester sur des intervalles où g était intégrable.*

Solution 13 **06-13**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{e^{-x^2 t}}{1 + t^3}\Big]$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et est $\mathcal{O}(1/t^3)$ au voisinage de $+\infty$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1 + t^3}\, dt$$

est définie sur $\mathbb{R}$. (Il est clair que cette fonction est *paire*.)

❧ Pour $x \neq 0$,

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad 0 < \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3} \leqslant e^{-x^2 t}$$

et le majorant est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ (fonction de référence, dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ est connue). Comme l'intégration conserve les inégalités,

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3}\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}\, dt = \frac{1}{x^2}$$

et donc

$$\forall\, x > 0, \quad 0 < x^2 f(x) \leqslant 1$$

ce qui prouve bien que

$$f(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

✍ *En particulier, on a prouvé que f tendait vers 0 au voisinage de $+\infty$.*

✍ *D'après ce qui précède, on a aussi $f(x) = \mathcal{O}(1/x^2)$ lorsque $x \to 0$. Cependant, cette nouvelle relation est dénuée d'intérêt car la fonction de référence $1/x^2$ est infiniment grande au voisinage de 0 tandis que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$:*

$$\forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3} \leqslant \frac{1}{1+t^3}$$

et donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = f(0).$$

Solution 14 — 06-14

Pour $t > 0$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, le produit nt tend vers $+\infty$ et le produit

$$nf(nt)$$

est une forme indéterminée (a priori, une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ n'a pas de limite au voisinage de $+\infty$). On n'a donc aucun espoir d'appliquer le Théorème de convergence dominée à ces intégrales.

❧ Nous posons donc, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$x = nt \qquad dx = n\, dt$$

pour obtenir

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\, dt = \int_0^n \frac{f(x)}{1+(x/n)}\, dx.$$

Nouvelle difficulté : l'intervalle d'intégration semble varier avec n, ce qui empêche d'appliquer le Théorème de convergence dominée.

❧ Nous posons donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0, +\infty[, \qquad f_n(x) = \frac{f(x)}{1+(x/n)} \cdot \mathbb{1}_{[0,n]}(x).$$

Comme f est intégrable sur $I = [0, +\infty[$, elle est (par définition) continue par morceaux sur I et les fonctions f_n sont donc elles aussi continues par morceaux sur I.

✍ *Cette astuce doit être utilisée systématiquement pour rendre l'intervalle d'intégration indépendant du paramètre n.*

De plus,

$$f_n(x) = f(x) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,n]}(x)}{1+(x/n)}$$

est le produit d'une fonction intégrable (f) et d'une fonction continue par morceaux et bornée, donc les fonctions f_n sont bien intégrables sur I et

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\, dt = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

❧ Pour tout $x \in I$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$x \leqslant n_0$$

et donc tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad x \leqslant n.$$

On a donc

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad f_n(x) = f(x) \cdot \frac{1}{1 + (x/n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

(y compris pour $x = 0$!). La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc simplement sur I vers la fonction f.

❧ Enfin, il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in I_0, \qquad \big|f_n(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| \cdot \frac{1}{1+0} = \big|f(x)\big|.$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur I_0 (par hypothèse). Nous pouvons donc appliquer le Théorème de convergence dominée et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,dt = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

✍ *Si l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ *n'est pas nulle, on a en fait démontré que*

$$\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Si cette intégrale est nulle, on a démontré que

$$\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Le Théorème de convergence dominée peut donc servir à déterminer des ordres de grandeur et pas seulement des limites...

Solution 15 — 06-15

✍ *Le Théorème de convergence dominée ne donne qu'une limite. Pour lui faire calculer un ordre de grandeur, il faut le détourner de son usage normal.*

On considère l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et les fonctions f_n définies par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in I, \qquad f_n(t) = \frac{n \operatorname{Arctan} {}^t\!/_n}{t + t^3}.$$

❧ **Intégrabilité** — Soit $n \geqslant 1$, *fixé*.

▶ Il est clair que les fonctions f_n sont continues sur l'intervalle ouvert I.

▶ Lorsque t tend vers 0,

$$f_n(t) \sim n \cdot \frac{t}{n} \cdot \frac{1}{t+t^3} \sim \frac{t}{t} = 1,$$

donc la fonction f_n tend vers une limite finie au voisinage de 0 : elle est donc intégrable au voisinage de 0 (puisqu'elle admet un prolongement continu sur l'intervalle semi-fermé $[0, +\infty[$).

▶ Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f_n(t) \sim n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^3+t} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^3}\Big),$$

donc la fonction f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison à une fonction puissance).

Ainsi, chaque fonction f_n est intégrable sur $I =]0, +\infty[$.

❧ **Convergence simple** — Pour tout $t \in I$, on sait que

$$\operatorname{Arctan} \frac{t}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t}{n},$$

donc la forme indéterminée

$$n \operatorname{Arctan} \frac{t}{n}$$

tend vers t lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur I vers la fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right],$$

qui est évidemment continue sur I.

❧ **Domination** — Par concavité de la fonction Arctan, on sait que

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \operatorname{Arctan} u \leqslant u.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in I, \qquad \left|f_n(t)\right| \leqslant \frac{n \cdot {}^t/_n}{t+t^3} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Le majorant est indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ et intégrable sur I en tant que fonction de t. Nous pouvons donc appliquer le Théorème de convergence dominée, qui nous assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

On a ainsi démontré que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} {}^t/_n}{t+t^3}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2n}.$$

Solution 16 **06-16**

✍ *Le Théorème de convergence dominée s'applique sur un intervalle d'intégration indépendant de n. Il faut donc définir les fonctions f_n en tenant compte de cette exigence (astuce classique).*

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\,dt = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\,dt + \int_n^{+\infty} 0\,dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

où on a posé

$$\forall\, t \in [0,n], \quad f_n(t) = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} \quad \text{et} \quad \forall\, t \in]n,+\infty[, \quad f_n(t) = 0.$$

Autrement dit,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in [0,+\infty[, \qquad f_n(t) = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\mathbb{1}_{[0,n]}(t).$$

❧ **Intégrabilité** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n est évidemment continue sur $[0,n[$ et sur $]n,+\infty[$. De plus, elle tend vers une limite à gauche finie (égale à $2^n e^{-2n}$) et vers une limite à droite finie (égale à 0) en $t = n$, donc f_n est bien continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Comme f_n est nulle sur $]n,+\infty[$, elle est évidemment intégrable au voisinage de $+\infty$, donc elle est bien intégrable sur $[0,+\infty[$.

❧ **Convergence simple** — Fixons $t \in [0,+\infty[$. Il existe un entier $n_0 \geqslant t$ et par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad f_n(t) = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} = \exp\left[-2t + n\,\ell n\left(1+\frac{t}{n}\right)\right].$$

On sait que

$$\ell n\left(1+\frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t}{n}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-2t + n\,\ell n\left(1+\frac{t}{n}\right)\right] = -2t + t = -t$$

et donc, par continuité de exp,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \exp(-t).$$

Il est clair que la fonction $f = [t \mapsto \exp(-t)]$ est continue sur $[0,+\infty[$.

❧ **Domination** — Par convexité de exp, on sait que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad 1 + u \leqslant \exp(u).$$

En particulier,
$$\forall\, u \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant 1 + u \leqslant \exp(u).$$
Comme $[u \mapsto u^n]$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in [0, n], \qquad 0 \leqslant \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant (\exp {}^t\!/\!_n)^n = e^t$$
et donc que
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in [0, n], \qquad \left|f_n(t)\right| \leqslant e^t \cdot e^{-2t} = e^{-t}.$$
Il est clair que cette majoration est encore vraie pour $t \in]n, +\infty[$ (puisque dans ce cas, $f_n(t) = 0$).

❧ On a ainsi démontré que la convergence était dominée :
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in [0, +\infty[, \qquad \left|f_n(t)\right| \leqslant e^{-t}$$
car le majorant est indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ et intégrable sur $[0, +\infty[$ en tant que fonction de t.

On peut donc appliquer le Théorème de convergence dominée :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$
c'est-à-dire
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{n} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1.$$

Solution 17 **06-17**

On considère l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose
$$\forall\, t \in I, \qquad u_k(t) = te^{-kt}.$$
❧ Pour tout $k \geqslant 1$, la fonction u_k est continue sur l'intervalle ouvert I.
Elle tend vers 0 (= une limite finie) au voisinage de 0, donc elle est intégrable au voisinage de 0.
Lorsque t tend vers $+\infty$,
$$u_0(t) = te^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$$
et
$$\forall\, k \geqslant 2, \quad u_k(t) = te^{-(k-1)t} \cdot e^{-t} = o(e^{-t})$$
donc u_k est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi chaque fonction u_k est intégrable sur I.

❧ La série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I en tant que série géométrique de raison $0 < e^{-t} < 1$ (puisque $t > 0$) et
$$\forall\, t > 0, \qquad S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = t \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-kt})^k = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{t}{e^t - 1}.$$
❧ On voit sur l'expression précédente que la somme S est continue sur I.

❧ Enfin, pour tout $k \geqslant 1$,
$$\int_I \left|u_k(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} te^{-kt}\, dt = \frac{1}{k^2}$$
(par intégration par parties, bien sûr).

► Comme la série $\sum {}^1\!/\!_{k^2}$ est convergente, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme : la somme S est donc intégrable sur I et
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

✍ *Et si on avait choisi $I = [0, +\infty[$?*

❧ *L'étude de l'intégrabilité était simplifiée : chaque fonction u_k étant continue sur $[0, +\infty[$, il suffisait de l'étudier au voisinage de $+\infty$ pour justifier son intégrabilité.*

❧ *La convergence simple était un peu plus délicate ! Pour $t = 0$, on n'a plus une série géométrique convergente (la raison est égale à 1), mais une série de terme général nul (à cause du facteur t).*

❧ *La régularité de la somme était plus délicate aussi ! Un développement limité montre que $S(t)$ tend vers 1 au voisinage droit de 0 alors que $S(0) = 0$ (somme de la série de terme général nul). Par conséquent, S est continue sur $]0, +\infty[$ et admet une limite à droite finie en 0, donc S est bien continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ (sans être continue sur cet intervalle).*

Solution 18 **06-18**

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé (une fois pour toutes). On étudie ici la fonction S définie par

$$S(t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} = \sin(xt) \cdot \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n \sin xt,$$

c'est-à-dire à la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, où

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in [0, +\infty[,\quad u_n(t) = e^{-nt}\sin(xt).$$

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est continue sur $[0, +\infty[$. Pour t voisin de $+\infty$, on a $u_n(t) = \mathcal{O}(e^{-nt})$ et comme $n > 0$, on en déduit que u_n est intégrable sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

❧ La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I (en tant que somme d'une série géométrique de raison $e^{-t} \in]0, 1[$).

❧ La somme S de cette série est clairement continue sur I (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur I).

❧ Il reste maintenant à prouver que la série de terme général

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| dt$$

est convergente afin de pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

❧ **Première tentative (ratée)**

Soit $n \geqslant 1$. Il est clair que

$$\forall\, t \in I,\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant e^{-nt}. \tag{13}$$

Par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}.$$

Hélas, la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente et cette première majoration ne permet pas de conclure.

✍ *On peut comprendre cet échec en étudiant l'intégrabilité de la fonction S. Cette fonction est clairement continue sur $]0, +\infty[$ et*

$$\left|S(t)\right| = \frac{\left|\sin(xt)\right|}{1 - e^{-t}} \cdot e^{-t}$$

donc $S(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Mais lorsque t tend vers 0,

$$S(t) \sim \frac{xt}{t} = x$$

donc S admet une limite finie en 0^+, tandis que

$$\frac{1}{e^t - 1} \sim \frac{1}{t}.$$

On voit maintenant qu'en éliminant le $\sin$ dans la majoration (13), on perd le facteur qui rend S intégrable au voisinage de l'origine. Il faut donc chercher un majorant qui tienne compte du $\sin$!

❧ **Deuxième tentative (efficace)**

On *doit savoir* que

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\quad |\sin u| \leqslant |u|. \tag{14}$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in I,\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant |xt|e^{-nt} \tag{15}$$

et la fonction $[t \mapsto te^{-nt}]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \geqslant 1$. Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad 0 \leqslant I_n \leqslant |x| \int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt = \frac{|x|}{n^2} \int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du$$

avec le changement de variable affine $u = nt$.

Comme $[u \mapsto ue^{-u}]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (on l'a déjà dit), la dernière intégrale est un réel fini (qu'il est inutile de préciser — il est égal à 1). On a donc démontré cette fois que

$$I_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{16}$$

et donc que la série $\sum I_n$ est convergente.

❧ On peut alors déduire du théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \mathfrak{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+ix)t}\,dt = \mathfrak{Im}\Big[\frac{e^{(-n+ix)t}}{-n+ix}\Big]_0^{+\infty} = \frac{x}{n^2+x^2},$$

donc finalement

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

❧ **Variantes**
On peut établir l'ordre de grandeur (16) de deux autres manières, plus précises (mais plus longues aussi).

❧ Le changement de variable *affine* $u = xt$ en supposant $\boxed{x > 0}$, la relation de Chasles et le second changement de variable *affine* $v = u - k\pi$ (pour $k \in \mathbb{N}$) nous donnent

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt} |\sin xt|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-nu/x} |\sin u| \frac{du}{x} \tag{17}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-nu/x} |\sin u| \frac{du}{x} \tag{18}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-nk\pi/x} \int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv \tag{19}$$

puisque $\sin v \geqslant 0$ pour tout $v \in [0, \pi]$.

Dans (19), l'intégrale ne dépend plus de k et on peut (pardon : on doit!) reconnaître une somme géométrique. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt} |\sin xt|\,dt = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-n\pi/x}} \int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv. \tag{20}$$

❧ Classiquement, on trouve un ordre de grandeur d'une telle intégrale en intégrant par parties. Pour le coup, il faut intégrer *deux fois* par parties (à chaque fois en intégrant l'exponentielle et en dérivant la composante trigonométrique). On trouve :

$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv = \frac{x}{n} \int_0^{\pi} e^{-nv/x} \cos v\,dv, \tag{21}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x} \cos v\,dv = \frac{1 + e^{-n\pi/x}}{n} \cdot x + \frac{x}{n} \int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv \tag{22}$$

et en combinant (21) et (22), on trouve

$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv = \frac{x^2}{n^2}\big(1 + e^{-n\pi/x}\big) - \frac{x^2}{n^2} \int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv. \tag{23}$$

❧ Devant (23), deux attitudes sont possibles :

— L'Ancienne école, qui se réjouit de pouvoir en déduire une **expression explicite** de l'intégrale cherchée!

$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv = \frac{x^2}{n^2+x^2} \left(1 + e^{-n\pi/x}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{24}$$

— L'École moderne (à laquelle, pour une fois! j'appartiens) se contente de remarquer que

$$0 \leqslant 1 + e^{-n\pi/x} \leqslant 2$$

et que

$$0 \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv \leqslant \int_0^{\pi} 1\,dv = \pi$$

ce qui suffit à donner l'**ordre de grandeur** suivant

$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v\,dv = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{25}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Quelle que soit la manière choisie (24) ou (25), l'estimation (16) peut alors être déduite de (23).

✍ *Par principe, l'École moderne n'a pas très envie de calculer des expressions explicites lorsqu'elle peut se contenter d'un ordre de grandeur trouvé d'un coup d'œil (l'École moderne a un très bon coup d'œil) et, si on cherche vraiment à calculer cette intégrale, autant passer par les complexes :*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-n\nu/x}\sin\nu\,d\nu &= \mathfrak{Im}\int_0^\pi \exp\Big[\Big(\frac{-n}{x}+i\Big)\nu\Big]\,d\nu\\ &= \mathfrak{Im}\left[\frac{1}{i-\frac{n}{x}}\exp\Big[\Big(\frac{-n}{x}+i\Big)\nu\Big]\right]_0^\pi = \dots\end{aligned}$$

✍ ***Autre méthode***

Pour intégrer terme à terme, on peut avoir le choix entre le Théorème d'intégration terme à terme (qu'on a choisi d'appliquer) et le Théorème de convergence dominée.

❧ *On a remarqué plus haut que la fonction* S *est la limite, au sens de la convergence simple sur l'intervalle* I*, de la suite des fonctions définies par*

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t).$$

Or il s'agit d'une somme géométrique *! Donc*

$$\big|f_n(t)\big| = \left|\sin(xt)\cdot\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}}\cdot e^{-t}\right| \leqslant \frac{|\sin xt|\,e^{-t}}{1-e^{-t}} = \big|S(t)\big|$$

et la convergence est dominée : on a trouvé un majorant indépendant *de* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* intégrable *sur* I *(démontré plus haut). Par conséquent,*

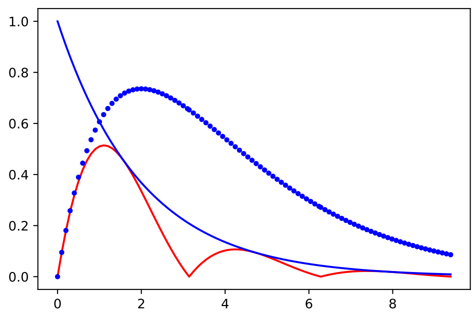
$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt.$$

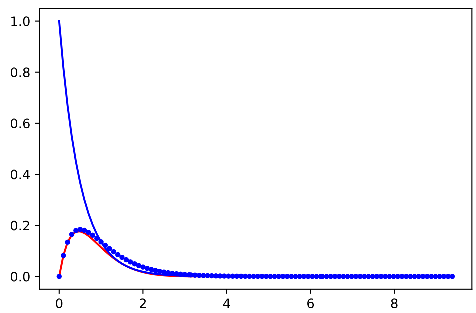
✍ *On peut expliquer graphiquement pourquoi la majoration* (14) *nous a mieux réussi que la majoration* (13) *pour établir la convergence de la série* $\sum I_n$.

En fait, si la majoration (14) *paraît plus grossière que* (13) *(on majore une fonction bornée par une fonction qui n'est pas bornée !), elle est bien plus précise au voisinage de l'origine. C'est l'occasion de se rappeler le principe essentiel formulé par Boris Vian au sujet des bombes atomiques :* "la seule chose qui compte, c'est l'endroit où c'qu'elle tombe".

Dans les deux figures ci-dessous, le graphe de $e^{-n\nu/x}|\sin\nu|$ *est en trait continu rouge.*

Pour les petites valeurs de n *(figure de gauche), on voit bien que la majoration* (14) *(en pointillés) est moins précise que* (13) *(en trait continu bleu).*

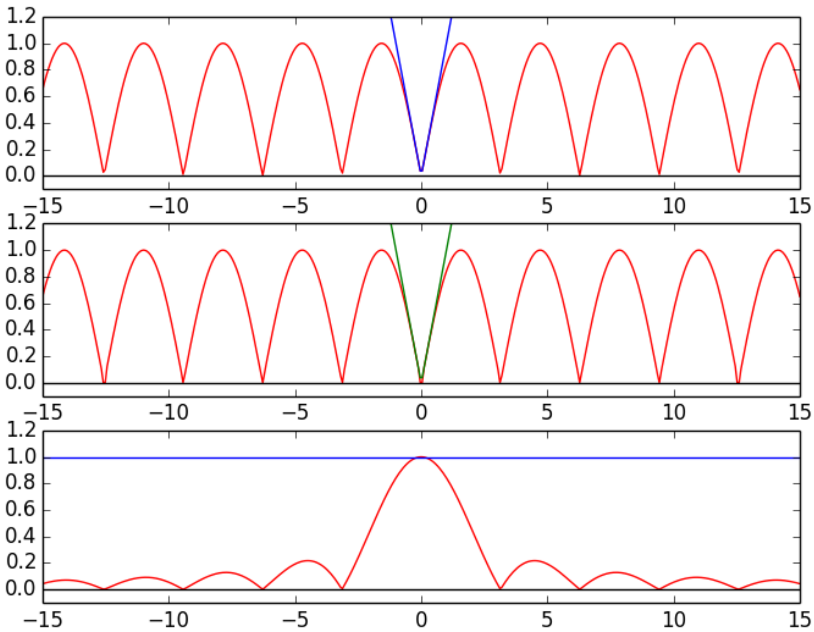




En revanche, pour les grandes valeurs de n *(figure de droite), lorsque* I_n *devient vraiment petit, la majoration* (14) *devient bien meilleure que la majoration* (13).

✍ *Un dernier mot, à propos de la majoration* (14)*. Cette majoration peut être comprise d'un point de vue analytique (variations de la fonction* sinus cardinal*) ou d'un point de vue géométrique (concavité de la fonction* sin *sur* $[0,\pi]$*).*

C'est ce que montrent les graphes ci-dessous.



Solution 19 06-19

On considère l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, t \in I, \qquad u_k(t) = (-1)^k e^{-kt} = (-e^{-t})^k.$$

❧ Pour tout $k \geqslant 1$, la fonction u_k est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$u_k(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-t})$$

donc u_k est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc sur I.

❧ Pour tout $t \in I$, la série $\sum u_k(t)$ est une série géométrique de raison $(-e^{-t})$ et comme $0 < |-e^{-t}| = e^{-t} < 1$, cette série est (absolument) convergente. Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I.

❧ La somme S définie par

$$\forall\, t \in I, \qquad S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = (-e^{-t}) \cdot \frac{1}{1 - (-e^{-t})} = \frac{-e^{-t}}{1 + e^{-t}}$$

est clairement continue sur I.

✍ ***MAIS** la série de terme général*

$$\int_I |u_k(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-kt}\, dt = \frac{1}{k}$$

est divergente : on ne peut donc pas appliquer le Théorème d'intégration terme à terme.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in I$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right| = \left|\frac{-e^{-t}\big(1 - (-e^{-t})^n\big)}{1 + e^{-t}}\right| = \frac{1 - (-e^{-t})^n}{e^t + 1} \leqslant \frac{2}{1 + e^t} = g(t)$$

puisque $|-e^{-t}| = e^{-t} \leqslant 1$.

On a trouvé un majorant $g(t)$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, la fonction g est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc cette fonction g est bien intégrable sur $I =]0, +\infty[$.

► D'après le Théorème de convergence dominée, la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\, dt$$

est convergente et tend vers

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt.$$

Autrement dit, la série

$$\sum \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\, dt$$

est convergente et sa somme est connue :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt.$$

On reconnaît une expression de la forme $u'(t)/u(t)$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt = \lim_{A\to+\infty} \ell n(1+e^{-A}) - \ell n(1+e^{-0}) = -\ell n 2 = \ell n \frac{1}{2}.$$

Solution 20 **06-20**

On va constater sur cet exemple qu'on n'a pas toujours besoin du cours sur les intégrales à paramètre pour étudier les propriétés d'une fonction définie par une intégrale.

1. On pose $I = [0, +\infty[$, $\Omega =]0, +\infty[$ et

$$\forall\, (x,t) \in \Omega \times I, \quad f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{x+t}.$$

❧ Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle fermé I et

$$f(x,t) = \frac{1}{x+t} \cdot e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-xt}).$$

Comme $x > 0$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$.

Par conséquent, la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt$$

est bien définie pour tout $x \in \Omega$.

❧ Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto e^{-xt}]$ est décroissante et positive, tandis que la fonction $[x \mapsto x+t]$ est croissante et positive. Par conséquent, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est décroissante et positive.

On a donc

$$\forall\, 0 < x < y,\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f(y,t) \leqslant f(x,t)$$

et en intégrant cet encadrement, on obtient

$$\forall\, 0 < x < y, \quad 0 \leqslant F(y) \leqslant F(x)$$

ce qui signifie que la fonction F est décroissante et positive sur Ω.

❧ Soit $x > 0$. Il est clair que

$$\forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \frac{e^{-xt}}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot x e^{-xt}$$

et par conséquent

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \cdot \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x^2}.$$

✍ *Il est important de connaître par cœur la valeur de cette dernière intégrale !*

Cet encadrement nous dit en particulier que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

et donc que F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ *On aurait aussi pu appliquer le théorème de continuité en fonction d'un paramètre (dans la version "existence d'une limite finie").*

2. Pour $x > 0$ fixé, on considère le changement de variable affine :

$$u = x(x+t) = x^2 + xt \qquad du = x\,dt.$$

On en déduit que

$$F(x) = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{xe^{-(u-x^2)}}{u} \cdot \frac{du}{x} = e^{x^2} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

❧ Comme la fonction $[u \mapsto e^{-u}/u]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$, on sait que la fonction φ définie par

$$\forall\, y > 0, \qquad \varphi(y) = \int_y^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

est une primitive de $-e^{-y}/y$.

Par conséquent,

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^{x^2}\varphi(x^2)$$

donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = 2xF(x) + 2xe^{x^2}\varphi'(x^2) = 2xF(x) + 2xe^{x^2} \cdot \frac{(-e^{-x^2})}{x^2} = 2xF(x) - \frac{2}{x}.$$

La fonction F est donc bien une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad xy(x) - y'(x) = \frac{2}{x}.$$

✍ *On aurait aussi pu appliquer le cours sur les intégrales à paramètre pour démontrer que* F *était de classe* $\mathscr{C}^1$ *et exprimer sa dérivée (Formule de Leibniz).*

3. On fixe $x > 0$ et on considère les deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies par :

$$\forall\, t \in I, \qquad u(t) = \frac{-e^{-xt}}{x} \qquad \text{et} \qquad v(t) = \frac{1}{x+t}.$$

Il est clair que

$$\forall\, t \in I, \qquad u'(t) = e^{-xt} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{-1}{(x+t)^2}.$$

On a déjà démontré que $u'v$ était intégrable sur I. Il est clair que uv tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Enfin uv' est continue sur I et $\mathcal{O}(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$, donc uv' est aussi intégrable sur I.

D'après la formule d'intégration par parties,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt = \frac{1}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x(x+t)^2}\,dt.$$

Pour tout $t \in I$ et tout $x > 0$, il est clair que

$$0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{x(x+t)^2} \leqslant \frac{xe^{-xt}}{x^4}$$

et donc, en intégrant cet encadrement,

$$\forall\, x > 0, \quad \Big|F(x) - \frac{1}{x^2}\Big| \leqslant \frac{1}{x^4}.$$

En particulier, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F(x) = \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \sim \frac{1}{x^2}.$$

❧ La fonction $[u \mapsto 1/u]$ est continue et positive sur $]0,1]$, mais elle n'est pas intégrable au voisinage de 0. Or

$$\frac{e^{-u}}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u}$$

donc

$$\int_y^1 \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{y\to 0}{\sim} \int_y^1 \frac{du}{u} = -\ell n\, y.$$

Par composition de limites *(et pas par composition d'équivalents !)*, on en déduit que

$$\int_{x^2}^1 \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x\to 0}{-} \ell n(x^2) = -2\,\ell n\, x.$$

D'autre part, l'intégrale

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

est convergente (déjà vu !) et indépendante de x et le facteur e^{x^2} tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

Finalement,

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} e^{x^2}\left[\left(-2\,\ell n\, x + o(\ell n\, x)\right) + K\right] \sim -2\,\ell n\, x.$$

Solution 21 **06-21**

1. Tout d'abord, la fonction $f = \left[t \mapsto \sin(t^2)\right]$ est continue sur le segment $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$, donc elle est intégrable sur ce segment et l'intégrale I_n est donc bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|I_n| \leqslant \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \left|\sin(t^2)\right|\,dt$$

et

$$\forall\, t \in [\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}], \quad \left|\sin(t^2)\right| \leqslant 1,$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |I_n| \leqslant \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}.$$

Pour calculer un ordre de grandeur de $\sqrt{(n+1)\pi}$, on commence par **factoriser** : lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{(n+1)\pi} = \sqrt{n\pi}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{1/2} = \sqrt{n\pi}\Big(1+\frac{1}{2n}+o(1/n)\Big).$$

On en déduit que

$$\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

ce qui prouve bien que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2. Il ne s'agit pas de poser $u = t^2$, mais de poser $t = \sqrt{u}$, ce qui n'est pas tout à fait la même chose.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\varphi = \left[u \mapsto \sqrt{u}\right]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[n\pi, (n+1)\pi]$ sur $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$ et comme la fonction f est intégrable sur $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$, on peut déduire du Théorème du changement de variable que la fonction

$$(f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \left[u \mapsto \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\right]$$

est intégrable sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$.

✍ *Cela n'a rien de remarquable :* toute *fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.*

En revanche, pour $n = 0$, l'application φ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,\pi]$ sur $\left]0, \sqrt{\pi}\right]$ et la fonction $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ est intégrable sur l'intervalle $]0,\pi]$, ce qui est tout de même plus intéressant car, cette fois, le Théorème du changement de variable nous assure de la convergence d'une *intégrale généralisée* :

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du.$$

Quoi qu'il en soit,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du.$$

3. Le changement de variable affine $v = u - n\pi$ permet d'écrire I_n comme une intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour tout $n \geqslant 1$.

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(v + n\pi)}{\sqrt{v + n\pi}}\, dv = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin v}{\sqrt{v + n\pi}}\, dv$$

Comme $\sin v$ est positif pour tout $v \in [0, \pi]$, on en déduit que l'intégrale I_n est du signe de $(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série $\sum I_n$ est une série alternée.

4. Pour tout $v \in [0, \pi]$ et pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que

$$0 < \sqrt{v + n\pi} \leqslant \sqrt{v + (n+1)\pi}$$

et comme $\sin v \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{\sin v}{\sqrt{v + (n+1)\pi}} \leqslant \frac{\sin v}{\sqrt{v + n\pi}}.$$

Comme l'intégration avec bornes dans l'ordre croissant conserve les inégalités, on en déduit enfin que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant |I_{n+1}| \leqslant |I_n|.$$

Cela prouve que les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont remplies. La série $\sum I_n$ est donc convergente et sa somme est du signe de I_0, c'est-à-dire positive.

Solution 22 06-22

1. La fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{\ell n\, t}{\sqrt{(1-t)^3}}\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Lorsque t tend vers 0, il est clair que $f(t) \sim \ell n\, t$. Or ℓn est une fonction intégrable au voisinage droit de 0 (fonction de référence).

Lorsque t tend vers 1, on pose $t = 1 - h$. D'après le Théorème du changement de variable AFFINE, la fonction f est intégrable au voisinage (gauche) de 1 si, et seulement si, la fonction $[h \mapsto f(1-h)]$ est intégrable au voisinage (droit) de 0. Or

$$f(1-h) = \frac{\ell n(1-h)}{\sqrt{h^3}} \sim \frac{-h}{h^{3/2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$$

et la fonction $\left[h \mapsto h^{-1/2}\right]$ est intégrable au voisinage de $h = 0$ (fonction de référence), donc f est bien intégrable au voisinage de 1.

Ainsi, la fonction f est bien intégrable sur $]0, 1[$ et l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\ell n\, t}{\sqrt{(1-t)^3}}\, dt$$

est (absolument) convergente.

2. La fonction $g = (t+2) - \sqrt{t^2 + 4t + 1}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{t^2 + 4t + 1} = t\sqrt{1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} = t\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{16}{t^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right] = (t+2) - \frac{3}{2t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc

$$g(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{-3}{2t}$$

ce qui prouve que g n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ L'équivalent trouvé montre que la fonction g tend vers 0 par valeurs inférieures au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, elle est de signe constant (négative !) au voisinage de $+\infty$ et comme elle n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} (t+2) - \sqrt{t^2 + 4t + 1}\, dt$$

est divergente.

✍ *On aurait pu calculer le développement limité de manière plus siouX en réduisant le trinôme à la forme canonique. En effet,*

$$\sqrt{t^2 + 4t + 1} = \sqrt{(t+2)^2 - 3} = (t+2)\sqrt{1 - \frac{3}{(t+2)^2}} = (t+2) - \frac{3}{2(t+2)} + o\left(\frac{1}{(t+2)}\right)$$

et on pouvait en déduire plus rapidement l'équivalent de $g(t)$ qui permettait de conclure.

Solution 23 **06-23**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, fixé. La fonction
$$f_x = \left[t \mapsto \frac{(t-1)t^x}{\ell n\, t}\right] \ : \ ]0,1[\to \mathbb{R}$$
est continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

Elle tend clairement vers 0 au voisinage de 0 (limite finie au voisinage d'une borne finie), donc elle est intégrable au voisinage de 0.

Avec $t = 1-h$,
$$f_x(t) = \frac{(-h)(1-h)^x}{\ell n(1-h)} \xrightarrow[t\to 1]{} 1,$$
donc f_x est intégrable au voisinage de 1 (limite finie au voisinage d'une borne finie à nouveau).

La fonction F est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

❧ L'étude précédente nous a montré que la fonction g définie par
$$\forall\, t \in]0,1[, \qquad g(t) = \frac{t-1}{\ell n\, t}$$
était continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, mais pouvait être prolongée en une fonction continue sur le segment $[0,1]$ en posant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Ce prolongement est donc borné (fonction continue sur un segment) et, d'après l'inégalité triangulaire,
$$\forall\, x > 0, \quad \left|F(x)\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(t-1)t^x}{\ell n\, t}\right| dt \leqslant \|g\|_\infty \int_0^1 t^x\, dt = \frac{\|g\|_\infty}{x+1}.$$

En particulier, la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Solution 24 **06-24**

Il est clair que la fonction définie par
$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{\ell n(1-x^2)}{x^2}$$
est continue et négative sur l'intervalle $]0,1[$.

Lorsque x tend vers 0,
$$f(x) \sim \frac{-x^2}{x^2} \to -1,$$
ce qui prouve que f admet un prolongement continu sur $[0,1[$ et donc que f est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque x tend vers 1, on effectue le changement de variable AFFINE $h = 1-x$. D'après le Théorème du changement de variable, $f(x)$ est intégrable au voisinage de $x=1$ si, et seulement si, $f(1-h)$ est intégrable au voisinage de $h=0$. Or
$$f(x) = f(1-h) = \frac{\ell n(2h-h^2)}{(1-h)^2} = \frac{1}{(1-h)^2} \cdot \left[\ell n\, h + \ell n\, 2 + \ell n\left(1 - \frac{h}{2}\right)\right]$$
donc, lorsque h tend vers 0,
$$f(1-h) \sim \ell n\, h.$$
Comme $\ell n\, h$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence), la fonction f est bien intégrable au voisinage de 1.

La fonction f est donc intégrable sur $]0,1[$. En particulier, l'intégrale généralisée de f sur $]0,1[$ est convergente et :
$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to 1}} \int_\varepsilon^A f(x)\, dx.$$

❧ Essayons d'intégrer par parties avec
$$u(x) = \ell n(1-x^2) \qquad v(x) = \frac{-1}{x} \qquad u'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Lorsque x tend vers 0, le produit
$$u(x)v(x) = \frac{-\ell n(1-x^2)}{x}$$
est équivalent à $-(-x^2)/x = x$ et tend donc vers 0. Mais, lorsque x tend vers 1, ce produit tend vers $+\infty$... Cette intégration par parties est impossible.

❧ Que déduire du calcul précédent ? Pour que le produit $u(x)v(x)$ ait une limite finie lorsque x tend vers 1, il faut qu'il s'agisse d'une forme indéterminée et donc que $v(x)$ tende vers 0.

La seule possibilité pour intégrer par parties est donc :

$$u(x) = \ln(1-x^2) \qquad v(x) = \frac{-1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x} \qquad u'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On a donc

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad u(x)v(x) = \frac{-(1-x)\ln(1-x^2)}{x} = \frac{-(1-x)\ln(1-x) + (1-x)\ln(1+x)}{x}.$$

Lorsque x tend vers 0, on a encore $u(x)v(x) \sim x$ et lorsque x tend vers 1, cette fois, $u(x)v(x)$ tend vers 0 (les deux termes du numérateur tendent vers 0 et le dénominateur tend vers 1).

La Formule d'intégration par parties nous dit alors que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

est convergente et que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\to1} u(x)v(x) - \lim_{x\to0} u(x)v(x) - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_0^1 \frac{2x(1-x)}{(1-x)(1+x)x}\,dx = -2\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -2\ln 2.$$

✍ *Le résultat trouvé est* négatif, *ce qui est cohérent avec notre remarque initiale sur le signe de* $f(x)$.

✍ *La Formule d'intégration par parties démontre seulement que l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

est convergente, elle ne prouve pas à elle seule que le produit $u'(x)v(x)$ *est intégrable sur* $]0,1[$.

En fait, ce produit étant négatif (donc de signe constant*) et l'intégrale généralisée étant* convergente, *on peut conclure que* $u'v$ *est bien intégrable sur* $]0,1[$.

Mais, je le répète, cette propriété n'est pas une conséquence de la Formule d'intégration par parties toute seule !

Solution 25 **06-25**

On pose $I =]0,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, t \in I, \quad f_n(t) = \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}.$$

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur l'ouvert I.

Pour $n = 0$, la fonction f_n tend vers 2 au voisinage de $t = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1+o(1)}{\sqrt{t}+o(\sqrt{t})} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Donc f_n est intégrable au voisinage de $t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $f_n(t) \sim {}^2/\!\sqrt{t}$ au voisinage de $+\infty$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^n + o(t^n)}{t^{2n}+o(t^{2n})} \sim \frac{1}{t^n}.$$

Donc f_n est intégrable au voisinage de $t = +\infty$ si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

Bref : pour tout $n \geqslant 2$ (et seulement pour $n \geqslant 2$), la fonction f_n est intégrable sur I.

❧ Considérons la fonction f définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \left|\begin{array}{ll} {}^1/\!\sqrt{t} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{array}\right.$$

La fonction f est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Par ailleurs, elle admet une limite finie à gauche en $t=1$ (limite égale à 1) et une limite finie à droite en $t=1$ (limite nulle). Donc la fonction f est bien continue par morceaux sur I.

❧ Pour $0<t<1$, on sait que t^n et t^{2n} tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = f(t).$$

Pour $t=1$, on a $f_n(t)=1=f(t)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Enfin, pour $t>1$, on sait que t^n et t^{2n} tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc

$$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t^n}{t^{2n}} = \frac{1}{t^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = f(t).$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge donc simplement sur I vers la fonction f.

❧ Considérons la fonction g définie sur I par

$$\forall\, t\in I,\quad g(t) = \left|\begin{array}{ll} 2/\sqrt{t} & \text{si } 0<t\leqslant 1,\\ 1/t^2 & \text{si } t>1.\end{array}\right.$$

Cette fonction est évidemment continue sur les deux intervalles ouverts $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Par ailleurs, elle tend vers une limite finie à gauche en $t=1$ (limite égale à 2) et vers une limite finie à droite en $t=1$ (limite égale à 1). La fonction g est donc continue par morceaux sur I.

Par comparaison avec les fonctions de Riemann (au voisinage de $t=0$ comme au voisinage de $t=+\infty$), la fonction g est intégrable sur l'intervalle I.

❧ Pour $0<t\leqslant 1$, il est clair que

$$0\leqslant f_n(t)\leqslant \frac{1+1}{\sqrt{t}+0} = g(t).$$

Pour $t>1$ et $n\geqslant 2$, on a $0<\sqrt{t}\leqslant t^n$ et donc

$$0\leqslant f_n(t)\leqslant \frac{1+t^n}{t^n+t^{2n}} = \frac{1}{t^n}\leqslant \frac{1}{t^2} = g(t).$$

On a donc établi que

$$\forall\, n\geqslant 2,\ \forall\, t\in I,\quad 0\leqslant f_n(t)\leqslant g(t)$$

où le majorant est indépendant de n et intégrable sur I en tant que fonction de t.

La convergence est donc dominée. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$$

Solution 26 **06-26**

1. Les deux définitions de $f_n(1/n)$ coïncident :

$$n\sqrt{n}\,\frac{1}{n} = \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1/n}}$$

donc la fonction f_n est bien définie sur $[0,1]$.

❧ La fonction f_n est clairement continue sur $[0,1/n[$, ainsi que sur $]1/n,1]$. De plus, elle est clairement continue à gauche en $x=1/n$ et continue à droite en $x=1/n$, donc elle est bien continue en $x=1/n$. Par conséquent, la fonction f_n est continue sur le segment $[0,1]$.

L'intégrale I_n existe donc bien en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

✍ *La fonction f_n est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles $[0,1/n[$ et $]1/n,1]$. Elle est également dérivable à gauche et à droite en $x=1/n$, mais*

$$(f_n)'_g(1/n) = n\sqrt{n}\quad\textit{tandis que}\quad (f_n)'_d(1/n) = \left.\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right|_{x=1/n} = \frac{-n\sqrt{n}}{2},$$

donc f_n n'est pas dérivable en $x=1/n$.

❧ Si $x=0$, alors $f_n(x)=0$ pour tout $n\geqslant 1$.

Si $0<x\leqslant 1$, alors il existe un entier $n_0=n_0(x)\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n\geqslant n_0,\qquad x\geqslant \frac{1}{n_0}\geqslant \frac{1}{n}$$

et donc

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0, \\ {}^1/_{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{array}\right.$$

✍ *La fonction f est continue sur $]0, 1]$, mais elle n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$, car elle n'a pas de limite à droite finie au voisinage de 0 (elle tend vers $+\infty$).*

❧ Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$, si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ convergeait uniformément sur $[0, 1]$, la limite f de cette suite serait également continue sur $[0, 1]$, ce qui est faux comme on vient de le constater.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

2. On peut calculer explicitement I_n : pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n = n\sqrt{n}\,\frac{({}^1/_n)^2}{2} + 2\big(\sqrt{1} - \sqrt{{}^1/_n}\big) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

❧ Sinon, on peut remarquer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall\, 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n({}^1/_n) = \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

et que

$$\forall\, \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant f_n(x) = f(x).$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x).$$

Or la fonction f est une fonction intégrable de référence sur $]0, 1]$, donc la convergence est dominée !

Par conséquent,

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt = 2\big[\sqrt{1} - \sqrt{0}\big] = 2.$$

✍ *La fonction f n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ et* a fortiori *n'est pas intégrable sur $[0, 1]$. Cependant, elle est bien continue sur $]0, 1]$ et intégrable sur $]0, 1]$: c'est même, comme on l'a dit, une fonction de référence !*

Cette remarque en passant pour indiquer que la théorie de l'intégration qui est au programme est trop simplifiée pour ne pas présenter quelques bizarreries...

Solution 27 — 06-27

1. Les réels

$$x = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \text{et} \quad y = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

vérifient l'équation du cercle trigonométrique :

$$x^2 + y^2 = 1$$

donc (forme faible du Théorème de relèvement) il existe un réel φ_n tel que

$$x = \cos\varphi_n \quad \text{et} \quad y = -\sin\varphi_n$$

si bien que

$$x\cos nt + y \sin nt = \cos(nt + \varphi_n).$$

2. Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_n &= (a_n^2 + b_n^2)\int_c^d \cos^2(nt + \varphi_n)\,dt \\ &= (a_n^2 + b_n^2)\int_c^d \frac{1 + \cos(2nt + 2\varphi_n)}{2}\,dt \\ &= \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\cdot\left[(d - c) + \int_c^d \cos(2nt + 2\varphi_n)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Mais l'intégrale

$$\int_c^d \cos(2nt + 2\varphi_n)\,dt = \left[\frac{\sin(2nt + 2\varphi_n)}{2n}\right]_c^d$$

tend vers 0 (le numérateur est borné et le dénominateur tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$), donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left[(d-c) + \int_c^d \cos(2nt + 2\varphi_n)\,dt\right] = (d-c) > 0.$$

Autrement dit,

$$\left[(d-c) + \int_c^d \cos(2nt + 2\varphi_n)\,dt\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} (d-c)$$

et par conséquent

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d-c)}{2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in [c,d], \quad f_n(t) = \big(a_n \cos nt + b_n \sin nt\big)^2.$$

Chaque fonction f_n est intégrable sur $[c, d]$ (fonction continue sur un segment).

Par hypothèse, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[c, d]$ vers la fonction nulle (qui est une fonction continue sur $[c, d]$...).

Enfin, la convergence est dominée : en effet, comme les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \|a\|_\infty \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant \|b\|_\infty.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [c,d], \quad \big|f_n(t)\big| \leqslant (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty)^2.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $n \in \mathbb{N}$ et intégrable sur $[c, d]$ en fonction de t (en tant que fonction constante sur un segment).

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_c^d f_n(t)\,dt = \int_c^d 0\,dt = 0.$$

❧ On déduit alors de la question précédente que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2 + b_n^2 = 0$$

(puisque $(d-c) > 0$) et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$$

(par composition de limites).

Et comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

on déduit du Théorème d'encadrement que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Solution 28 — 06-28

1. Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, il existe un réel a tel que

$$\forall\, x \geqslant a, \qquad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \tag{$\star$}$$

(Théorème fondamental) et si f' est intégrable au voisinage de $+\infty$, alors f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(t)\,dt.$$

✍ *À retenir ! On vient de démontrer que : si une fonction continue est intégrable au voisinage de $+\infty$, ses primitives ont toutes une limite finie au voisinage de $+\infty$.*

❧ Supposons que $\ell > 0$: il existe donc un réel $A \geqslant a$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A, \qquad f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$$

et d'après ($\star$) et la relation de Chasles,

$$\forall\, x \geqslant A, \qquad \int_A^x f(t)\,dt \geqslant \int_A^x \frac{\ell}{2}\,dt = \frac{(x-A)\ell}{2}.$$

Comme le minorant tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

On obtient un résultat analogue si $\ell < 0$ (les primitives de f tendent vers $-\infty$ dans ce cas).

La seule possibilité qui reste est $\ell = 0$.

✍ *À retenir aussi ! On vient de démontrer que : si une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ tend vers une limite ℓ au voisinage de $+\infty$, alors cette limite est nulle : $\ell = 0$.*

Cela dit, les fonctions qui n'ont pas de limite au voisinage de $+\infty$ sont légion et il faut toujours se rappeler que tendre vers 0 au voisinage de $+\infty$ n'est ***ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante*** *pour être intégrable au voisinage de $+\infty$.*

2. Une fonction monotone tend vers une limite (finie ou non) au voisinage de $+\infty$. D'après la question précédente, si f est monotone sur $[a, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$, alors il faut que cette limite soit nulle.

3. Supposons que la fonction f ne tende pas vers 0 au voisinage de $+\infty$. Alors il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall\, A > 0,\ \exists\, x \geqslant A, \qquad \big|f(x)\big| \geqslant \varepsilon_0.$$

On peut dire les choses plus simplement : il existe dans ce cas une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big|f(u_n)\big| \geqslant \varepsilon_0. \tag{$\dagger$}$$

✍ *En fait, on* ***doit*** *dire les choses plus simplement ! C'est le moyen de conserver la maîtrise de son véhicule.*

Il faut donc retenir aussi la "caractérisation séquentielle" des fonctions qui ne tendent pas vers 0 au voisinage de $+\infty$.

❧ Comme $\varepsilon_0/2 > 0$ et que la fonction f est uniformément continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \geqslant a, \qquad |x-y| \leqslant \alpha \implies \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{$\ddagger$}$$

❧ Quitte à remplacer ce réel $\alpha > 0$ par $1/3$ (par exemple),on peut supposer que $0 < \alpha < 1/2$ (en vertu du principe *"Qui peut le plus, peut le moins"*).

Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut également supposer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant a \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n + 1$$

(puisque la suite tend vers $+\infty$).

On peut alors déduire de ($\dagger$) et de ($\ddagger$) que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [u_n - \alpha, u_n + \alpha], \qquad \big|f(x) - f(u_n)\big| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

et donc que (inégalité triangulaire)

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [u_n - \alpha, u_n + \alpha], \qquad \big|f(x)\big| \geqslant \big|f(u_n)\big| - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \int_{u_n-\alpha}^{u_n+\alpha} \big|f(x)\big|\,dx \geqslant (2\alpha)\frac{\varepsilon_0}{2} = \alpha \cdot \varepsilon_0. \tag{$\star\star$}$$

❧ Supposons que la fonction f soit intégrable sur $[a, +\infty[$.

On remarque que les segments $[u_n - \alpha, u_n + \alpha]$ sont **deux à deux disjoints** puisque

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n + \alpha < u_n + \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} - \frac{1}{2} < u_{n+1} - \alpha.$$

Comme la fonction $|f|$ est positive, on déduit alors de la relation de Chasles que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{u_n-\alpha}^{u_n+\alpha} \big|f(x)\big|\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx,$$

ce qui est impossible car, d'après (⋆⋆), la série

$$\sum \int_{u_n-\alpha}^{u_n+\alpha} |f(x)|\,dx$$

est une série **grossièrement divergente** de terme général positif.

On a ainsi démontré qu'une fonction uniformément continue et intégrable au voisinage de $+\infty$ tendait nécessairemen vers 0.

✍ *Cela dit, les fonctions continues qui ne sont pas uniformément continues sur un voisinage de $+\infty$ sont légion et il faut toujours se rappeler que tendre vers 0 au voisinage de $+\infty$ n'est* ***ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante*** *pour être intégrable au voisinage de $+\infty$ — vous connaissez la chanson.*

Solution 29 — 06-29

Première méthode

La fonction w continue sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et

$$\forall\ -1 < x \leqslant y < 1, \qquad \int_x^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} y - \operatorname{Arcsin} x.$$

On sait que Arcsin tend vers une limite finie (égale à $\pi/2$) au voisinage de 1 ainsi que vers une limite finie (égale à $-\pi/2$) au voisinage de -1. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

est convergente et comme la fonction w est positive, on en déduit que la fonction w est intégrable sur $]-1,1[$.

✍ *Si une fonction f est intégrable sur l'intervalle I, alors l'intégrale généralisée*

$$\int_I f(t)\,dt$$

est convergente. La réciproque est fausse en général. Mais si la fonction f est ***de signe constant sur*** *I, alors la convergence de l'intégrale généralisée*

$$\int_I f(t)\,dt$$

entraîne immédiatement la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_I |f(t)|\,dt$$

et donc l'intégrabilité de f sur I.

❧ **Deuxième méthode**

La fonction w est continue sur l'intervalle ouvert $I =]-1,1[$. De plus, cette fonction est paire, donc elle est intégrable sur I si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de 1. Or

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\,(1-t)^{1/2}}$$

et on sait que

$$\left[t \mapsto \frac{1}{(t-1)^\alpha}\right]$$

est intégrable au voisinage gauche de 1 si, et seulement si, $\alpha < 1$. Comme $1/2 < 1$, on en déduit que w est intégrable au voisinage (gauche) de 1 et donc intégrable sur $]-1,1[$.

✍ *Voir* ***[06-05]*** *pour une application de ce résultat.*

Solution 30 06-30

Les fonctions
$$f = \left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right], \quad g = \left[x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}\right] \quad \text{et} \quad h = \left[x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]$$
sont continues sur $]0, +\infty[$.

❧ Au voisinage de 0, la fonction f tend vers 1 et peut donc être prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
Il en va donc de même pour la fonction $h = f^2$.
Enfin, la fonction g tend également vers une limite finie au voisinage de 0 :
$$\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{t^2}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right] \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2}$$
et peut être elle aussi prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$ en posant $g(0) = {}^1\!/\!_2$.

❧ Au voisinage de $+\infty$, les fonctions g et h sont intégrables car
$$g(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \qquad \text{et} \qquad h(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$
En revanche, la fonction f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (résultat à connaître).

❧ Considérons deux réels $0 < \varepsilon < A$ et intégrons par parties.
$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$
Sachant que g est intégrable sur $]0, +\infty[$, l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$$
est convergente. Par ailleurs, il est clair que
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon g(\varepsilon) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1-\cos A}{A} = 0.$$
On prouve ainsi que l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$
est convergente et que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

✍ *Lors de l'intégration par parties, il faut choisir* ***une*** *primitive de* sin*. On a pris ici* la seule *primitive de* sin *qui nous donne une fonction intégrable au voisinage de* 0*.*
Le choix de cette *primitive est essentielle !*

❧ Il est l'heure de faire un peu de trigonométrie :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$$
donc
$$\forall\, t > 0, \quad \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}$$
et par conséquent (puisqu'on a déjà prouvé l'intégrabilité de la fonction g)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)^2} \cdot \frac{dt}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$
en effectuant le changement de variable <u>affine</u> $u = {}^t\!/\!_2$.

✍ *Ce changement de variable affine réalise bien une bijection (croissante) de classe* $\mathscr{C}^1$ *de l'intervalle ouvert* $]0, +\infty[$ *sur lui-même.*

❧ *Si nous n'avions pas déjà justifié l'intégrabilité de* h*, le Théorème du changement de variable aurait pu nous permettre de déduire l'intégrabilité de* h *de l'intégrabilité de* g *(sur l'intervalle* $]0, +\infty[$*).*

Solution 31 **06-31**

La fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t > 0, \qquad f(t) = \ell n\Big(\frac{1+t^2}{t^2}\Big) = \ell n\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big) = \ell n(1+t^2) - 2\,\ell n\, t$$

est clairement continue sur l'intervalle ouvert $I =]0,+\infty[$.

Lorsque t tend vers 0,

$$f(t) = -2\,\ell n\, t + o(1) = \mathcal{O}(\ell n\, t)$$

donc f est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f(t) \sim \frac{1}{t^2}$$

donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc intégrable sur I et l'intégrale généralisée de f est convergente.

❧ Intégrons par parties avec l'astuce habituelle en présence de la fonction ℓn. Quels que soient les réels $0 < \varepsilon < A$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A f(t)\,dt &= \Big[t\,\ell n\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\Big]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A t\cdot\Big(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2}{t}\Big)\,dt \\ &= \Big[t\,\ell n\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\Big]_\varepsilon^A + 2\int_\varepsilon^A \frac{dt}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\lim_{t\to 0} t\,\ell n\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big) = \lim_{t\to+\infty} t\,\ell n\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big) = 0.$$

On a déjà démontré que f était intégrable sur I et on sait bien que $\frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur I (fonction de référence). On peut donc faire tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$ pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} \ell n\Big(\frac{1+t^2}{t^2}\Big)\,dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Solution 32 **06-32**

La fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t > 0, \qquad f(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}$$

est continue sur $]0,+\infty[$. De plus,

$$f(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\cdot\frac{1}{t^{1/2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$$

donc f est intégrable au voisinage (droit) de 0 et comme Arctan est bornée sur $\mathbb{R}$,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^{3/2}}\Big)$$

donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ La fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, u > 0, \qquad g(u) = \frac{1}{1+u^4}$$

est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$g(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^4},$$

donc g est bien intégrable au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

❧ Les fonctions Arctan et $1/\sqrt{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. On peut donc intégrer par parties en remarquant que

$$\frac{\operatorname{Arctan} t}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \sqrt{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \qquad \text{et que} \qquad \frac{\operatorname{Arctan} t}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

ce qui nous donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\,dt = \Big[\frac{-2}{t^{1/2}}\cdot\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

✍ *Sachant que l'intégrale généralisée*

$$\int_I f(t)g'(t)\,dt$$

est convergente (puisqu'on a démontré que fg' *était intégrable sur* I*) et que le produit* $f(t)g(t)$ *tend vers une limite finie aux deux extrémités de l'intervalle* I*, on a justifié la convergence de l'intégrale généralisée*

$$\int_I f'(t)g(t)\,dt.$$

En revanche, on n'a pas encore justifié que le produit $f'g$ *était intégrable sur* I*.*

On peut réécrire l'égalité précédente sous une forme apparemment plus compliquée.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\,dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{t})^4}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

La fonction g est intégrable sur $I =]0, +\infty[$ et la fonction $\varphi = [t \mapsto \sqrt{t}]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle ouvert I sur lui-même. Par conséquent, le produit $(g\circ\varphi)\cdot\varphi'$ est intégrable sur I et

$$4\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{t})^4}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}} = 4\int_0^{+\infty} (g\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt = 4\int_0^{+\infty} g(u)\,du.$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\,dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Solution 33 **06kh-01**

Comme $z \notin \mathbb{R}_-$, il est clair que la fonction f est continue sur l'intervalle I.

Comme l'intervalle I est fermé en 0, il reste à étudier f au voisinage de $+\infty$ pour justifier que f est intégrable sur I.

Or il est clair que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Comme $3/2 > 1$, on déduit de la règle de Riemann que la fonction f est intégrable au voisinage de $+\infty$ et donc que f est intégrable sur I.

Solution 34 **06kh-02**

Le dénominateur est évidemment continu sur I et aussi strictement positif (somme d'une exponentielle, strictement positive, et d'un terme positif), donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

✍ *Il reste donc à étudier l'ordre de grandeur de* f *au voisinage de* $+\infty$ *et au voisinage de* $-\infty$ *pour conclure.*

❧ Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme e^t est infiniment grand alors que le produit t^2e^{-t} tend vers 0 (par croissances comparées). Par conséquent,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}.$$

Comme $[t \mapsto e^{-t}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de référence), on en déduit que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ Lorsque t tend vers $-\infty$, le terme e^t tend vers 0 alors que le produit t^2e^{-t} tend vers $+\infty$.

✍ *Cette fois, les deux facteurs tendent vers* $+\infty$*, ce n'est pas une forme indéterminée, on aurait donc tort d'invoquer un résultat sur les croissances comparées.*

Par conséquent,

$$f(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{e^t}{t^2} = \frac{1}{t^2}\cdot e^t = o(e^t).$$

Comme $[t \mapsto e^t]$ est intégrable au voisinage de $-\infty$ (fonction de référence), on en déduit que f est intégrable au voisinage de $-\infty$.

✍ *On aurait pu procéder un peu différemment :*

$$f(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} e^t\cdot\frac{1}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et conclure en rappelant que $[t \mapsto 1/t^2]$ *est, elle aussi, intégrable au voisinage de* $-\infty$*.*

En conclusion, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Solution 35 **06kh-03**

1. Il est clair que la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert I.

✍ *Il reste donc à étudier l'ordre de grandeur de f au voisinage de 1 et au voisinage de $+\infty$.*

❧ Lorsque t tend vers $+\infty$, il est clair que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$$

et la règle de Riemann nous assure que f est bien intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{(t-1)(t+1)}} \underset{t\to1^+}{\sim} 1\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t-1}}.$$

Le changement de variable affine $x = t-1$ prouve que f est intégrable au voisinage (droit) de 1 si, et seulement si, la fonction $[x\mapsto {}^1/_{\sqrt{x}}]$ est intégrable au voisinage (droit) de 0.

La règle de Riemann nous assure donc que f est bien intégrable au voisinage droit de 1.

❧ Ainsi, la fonction f est intégrable sur $I =]1,+\infty[$ et par conséquent l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^3\sqrt{t^2-1}}$$

est convergente.

2.

✍ *Le principe général du changement de variable est d'éliminer un élément indésirable. Ici, il s'agit clairement de se débarrasser du facteur $\sqrt{t^2-1}$. Il faut donc exprimer t (en fonction d'une nouvelle variable x) de telle sorte que t^2-1 soit le carré d'une quantité dont le signe est connu.*

❧ ***Idée*** *: $\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\tan^2\theta$ et on sait que $\tan\theta\geqslant 0$ pour $0\leqslant\theta<{}^\pi/_2$.*

❧ ***Variante*** *: $\operatorname{ch}^2 x-1=\operatorname{sh}^2 x$ et on sait que $\operatorname{sh} x$ est du signe de x.*

Nous allons exposer les deux changements de variable.

❧ L'application

$$\left[\theta\mapsto\frac{1}{\cos\theta}\right]$$

réalise une bijection (croissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de $J =]0,{}^\pi/_2[$ sur $I =]1,+\infty[$.

Poser $t=\frac{1}{\cos\theta}$ revient à poser $\cos\theta=\frac{1}{t}$, ce qui donne

$$-\sin\theta\,d\theta=\frac{-1}{t^2}\,dt.$$

Par ailleurs, pour $\theta\in J$, on sait que $\tan\theta>0$ et

$$t^2-1=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\tan^2\theta.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^3\sqrt{t^2-1}} &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{dt}{t^2} = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}\cdot\sin\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

❧ L'application ch réalise une bijection (croissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $K =]0,+\infty[$ sur l'intervalle $I =]1,+\infty[$.

En posant $t=\operatorname{ch} x$, on a donc $dt=\operatorname{sh} x\,dx$ et comme $\operatorname{sh} x>0$ pour tout $x\in K$,

$$\sqrt{t^2-1}=\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}=\operatorname{sh} x.$$

On déduit de la formule de changement de variable que

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^3\sqrt{t^2-1}}=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\operatorname{ch}^3 x\operatorname{sh} x}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x}.$$

✍ *Ça a l'air plus simple, certes, mais ce n'est pas encore fini...*

En revenant à la définition de $\operatorname{ch} x$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x} = 8\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^3} = 8\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-x})^2}{[1+(e^{-x})^2]^3} \cdot e^{-x}\, dx.$$

L'application $[x \mapsto e^{-x}]$ réalise une bijection (décroissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de $K =]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$ et en posant $u = e^{-x}$, on obtient $du = -e^{-x}\, dx$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x} = 8\int_0^1 \frac{u^2}{(1+u^2)^3}\, du.$$

✍ *C'est presque fini, puisque nous avons enfin fait apparaître une fonction rationnelle !*
(J'ai dit "presque" ? Ah oui, j'ai dit "presque".)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^n}.$$

(Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment — rien de méchant.)

Il est clair que $I_0 = 1$ et $I_1 = \pi/4$. Intégrons par parties :

$$I_n = \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{(1+u^2)^n}\, du = \left[\frac{u}{(1+u^2)^n}\right]_0^1 + \int_0^1 u \cdot \frac{2nu}{(1+u^2)^{n+1}}\, du = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{(1+u^2)-1}{(1+u^2)^{n+1}}\, du$$

si bien que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1}). \tag{26}$$

On peut aussi écrire cette relation de récurrence sous une forme plus classique :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{2n-1}{2n} I_n. \tag{27}$$

On déduit de (27) que

$$I_2 = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \quad \text{puis de (26) que} \quad 8(I_2 - I_3) = 2\Big(I_2 - \frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

On a enfin retrouvé la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x} = 8(I_2 - I_3) = \frac{\pi}{4}.$$

✍ *Comment prévoir qu'un changement de variable sera beaucoup plus simple qu'un autre ? Je ne sais pas...*

Solution 36 — 06kh-04

La fonction f définie par

$$\forall\, 0 \leqslant t < 1, \qquad f(t) = \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$$

est clairement continue sur l'intervalle semi-ouvert $I = [0, 1[$.

Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{t^3}{\sqrt{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}.$$

Le changement de variable affine $u = 1 - t$ nous ramène donc à la forme $1/\sqrt{u}$ pour u voisin de 0 et on sait (règle de Riemann) que cette fonction est intégrable au voisinage de 0.

Par conséquent, f est intégrable au voisinage de 1 et donc intégrable sur l'intervalle $[0, 1[$.

✍ *Une variante mérite d'être présentée : on sait que la fonction* Arcsin *est continue sur le segment* $[-1, 1]$. *Par conséquent, l'intégrale*

$$\operatorname{Arcsin} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

tend vers une limite finie (égale à $\pi/2$*) lorsque* x *tend vers* 1.

Cela signifie que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

est convergente et comme la fonction intégrande est <u>*positive*</u>*, cela signifie en fait que cette fonction intégrande*

$$\left[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$

est intégrable sur l'intervalle $I = [0, 1[$.

*En considérant la dérivée d'*Arcsin *comme une* fonction intégrable de référence, *on peut interpréter la fonction* f *comme le produit de la fonction* $[t \mapsto t^3]$*, qui est continue et bornée sur* I*, par une fonction intégrable sur* I *et cela prouve que* f *est intégrable sur* I.

❧ La fonction sin réalise une bijection (croissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de $J = [0, \pi/2[$ sur $I = [0, 1[$ et en posant $t = \sin\theta$, on obtient $dt = \cos\theta\, d\theta$ et d'autre part

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$$

puisque $\cos\theta > 0$ pour tout $\theta \in J$.

On déduit alors de la formule du changement de variable que

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta.$$

En réfléchissant un peu avant de linéariser, on remarque que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta = -\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)(-\sin\theta)\, d\theta$$

ce qui nous conduit à poser $u = \cos\theta$. (Ce changement de variable est décroissant, il faut faire attention à l'ordre des bornes !)

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 (1-u^2)\, du = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

✍ *On aurait pu aller plus vite si on avait pensé dès le début à poser*

$$u = \cos \operatorname{Arcsin} t.$$

(Mais COMMENT *n'y ai-je pas pensé ? ? ?)*

Solution 37 **06kh-05**

Soient $I =]0, +\infty[$ et $I_0 = [0, +\infty[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, t \in I_0, \quad u_n(t) = t^2 e^{-nt} = t^2 (e^{-t})^n.$$

Chaque fonction u_n est continue sur l'intervalle fermé I_0 et

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad u_n(t) = t^2 e^{-(n-1/2)t} \cdot e^{-t/2} \underset{t\to+\infty}{\mathcal{o}} (e^{-t/2}).$$

Comme $[t \mapsto e^{-t/2}]$ est une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que u_n est intégrable sur I_0 (et donc sur $I \subset I_0$).

❧ Pour tout $t \in I$, la série $\sum u_n(t)$ est une série géométrique de raison $e^{-t} \in]0, 1[$, donc elle converge (absolument) et sa somme est égale à

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = t^2 e^{-t} \cdot \frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{t^2}{e^t - 1}.$$

Il est clair que la fonction S ainsi définie est continue sur l'intervalle ouvert I.

✍ *Pour appliquer le théorème lebesguien d'intégration terme à terme, il reste à vérifier que la série de terme général*

$$\alpha_n = \int_0^{+\infty} |u_n(t)| \, dt$$

est convergente.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| \, dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} \, dt = \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} (nt)^2 e^{-nt} \cdot n \, dt.$$

Le changement de variable affine $u = nt$ montre alors que

$$\forall \, n \geqslant 1, \quad \alpha_n = \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} \, du = \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} u_1(t) \, dt.$$

Ainsi $\alpha_n = \mathcal{O}(1/n^3)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et, d'après le critère de Riemann, la série $\sum \alpha_n$ est (absolument) convergente.

❧ Le Théorème d'intégration terme à terme nous assure alors que la fonction S est intégrable sur l'intervalle I ; que la série de terme général

$$\beta_n = \int_0^{+\infty} u_n(t) \, dt$$

est absolument convergente (ce qui n'est pas une nouvelle, puisque $\beta_n = \alpha_n$: les fonctions u_n sont positives !) et que

$$\int_0^{+\infty} S(t) \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n.$$

Comme $\beta_n = \alpha_n$, nous savons donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} \, dt = \zeta(3) \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \, dt = 2\zeta(3).$$

✍ *On peut calculer*

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \, dt$$

au moyen d'une double intégration par parties. Mais il n'est pas plus fatigant de se souvenir que

$$\forall \, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt = \Gamma(n+1) = n!.$$

Solution 38 **06kh-06**

1. Il est clair que la fonction S est continue sur l'intervalle ouvert $I =]0, +\infty[$.

❧ Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$S(t) \sim \sqrt{t} e^{-t} = \sqrt{t} e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$$

(par croissances comparées de $\sqrt{t}$ et de $e^{-t/2}$). Or la fonction $\left[t \mapsto e^{-t/2}\right]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc S est intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ Lorsque t tend vers 0,

$$S(t) \sim \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

et on sait que la fonction $[t \mapsto 1/t^{1/2}]$ est intégrable au voisinage de 0 (règle de Riemann), donc S est intégrable au voisinage de 0.

❧ Ainsi, la fonction S est intégrable sur I.

2. Pour tout $t > 0$, on considère ici une série géométrique de raison $e^{-t} \in]0, 1[$. C'est donc une série (absolument) convergente et, d'après la formule bien connue,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{t} e^{-(n+1)t} = \sqrt{t} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{1 - e^{-t}} = S(t).$$

3. On a justifié plus haut la convergence de cette intégrale. La fonction $[t \mapsto \sqrt{nt}]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ sur lui-même. On peut donc poser $u = \sqrt{nt}$ avec

$$du = \sqrt{n} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

et on déduit alors de la formule de changement de variable que

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}\,dt = \frac{2}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} nte^{-nt} \cdot \frac{\sqrt{n}\,dt}{2\sqrt{t}} = \frac{2}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}\,du.$$

Il reste à intégrer par parties pour terminer le calcul :

$$\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}\,du = \frac{-1}{2} \int_0^{+\infty} u \cdot (-2u)e^{-u^2}\,du = \frac{-1}{2} \left\{ \left[u \cdot e^{-u^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

d'après le résultat donné par l'énoncé.

Finalement, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}.$$

✍ *Le changement de variable affine* $u = nt$ *(avec* $du = n\,dt$*) nous aurait donné*

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \sqrt{u}e^{-u}\,du = \frac{1}{n\sqrt{n}}\Gamma(3/2)$$

et, sachant que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *pour tout* $x > 0$*, on en déduit que*

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n\sqrt{n}}\Gamma(3/2) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}.$$

4. On considère ici la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in]0, +\infty[, \quad u_n(t) = \sqrt{t}e^{-(n+1)t}.$$

On a démontré précédemment que toutes les fonctions u_n étaient intégrables sur $I =]0, +\infty[$; que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur I et que sa somme S était continue sur I.

✍ *On a aussi démontré, ce qui n'était indispensable, que la fonction* S *était intégrable sur* I.

On a aussi démontré que la série de terme général

$$\alpha_n = \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt$$

était convergente.

On déduit alors du Théorème d'intégration terme à terme que la fonction S est intégrable (ce n'est qu'une confirmation) ; que la série de terme général

$$\beta_n = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \alpha_n$$

est absolument convergente (ce qui ne nous apprend rien non plus) et enfin que

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n,$$

c'est-à-dire, d'après les calculs précédents :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Solution 39 **06Kh-51**

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, égale à 1 si $x \in \pi\mathbb{N}$ et à $\exp(x\,\ell n|\sin x|)$ sinon.

✍ *En particulier, la fonction f ne tend pas vers 0 au voisinage de $+\infty$.* Mais cela ne prouve rien !

❧ Comme la fonction f est positive, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

est convergente et, toujours par positivité de f, la fonction (croissante)

$$\left[a \mapsto \int_0^a f(x)\,dx\right]$$

tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, la suite de terme général

$$\int_0^{n\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(x)\,dx.$$

On est ainsi ramené à étudier la convergence d'une série de terme général positif.
❧ On effectue le changement de variable affine $x = t + (k-1)\pi$. Comme $|\sin|$ est π-périodique et que $\sin t > 0$ sur $]0, \pi[$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (\sin t)^{t+(k-1)\pi}\,dt.$$

Pour tout réel $t \in [0, \pi]$ et tout entier $k \geqslant 2$,

$$0 < t + (k-1)\pi \leqslant k\pi \leqslant 4k$$

et comme

$$\forall\, t \in [0, \pi], \quad |\sin t| \leqslant 1,$$

alors

$$\forall\, k \geqslant 2,\ \forall\, t \in [0, \pi], \quad |\sin t|^{t+(k-1)\pi} \geqslant |\sin t|^{4k}.$$

Par intégration, on en déduit que

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t)\,dt \geqslant 2\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{4k}\,dt.$$

D'après le rappel,

$$2\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{4k}\,dt \underset{k\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2k}}.$$

La série (de Riemann) $\sum {}^1/_{\sqrt{k}}$ est une série divergente de terme général positif, donc la série

$$\sum \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t)\,dt$$

diverge, ce qui prouve finalement que la fonction f *n'est pas* intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 40 **06Kh-52**

La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Notons F, l'une de ces primitives.
❧ La fonction y est une solution de l'équation (E) si, et seulement si, il existe une constante $K_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \exp\big(-F(x)\big)\left[K_0 + \int_0^x g(t)\exp\big(F(t)\big)\,dt\right] \tag{28}$$

$$= K_0 \exp\big(-F(x)\big) + \exp\big(-F(x)\big)\int_0^x g(t)\exp\big(F(t)\big)\,dt. \tag{29}$$

Quelle que soit la constante K_0 choisie, la fonction y_H définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y_H(x) = K_0 \exp\big(-F(x)\big) \tag{30}$$

est une solution de l'équation homogène associée à (E).

✍ *Ou bien on connaît la formule par cœur, ou bien on la retrouve rapidement par le calcul, mais il n'est pas question de traîner pour exprimer la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre !*

❧ Pour tout $x \geqslant 0$,

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt \geqslant F(0) + \int_0^x dt = F(0) + x,$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty. \tag{31}$$

De manière analogue, pour tout $x \leqslant 0$,

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt \leqslant F(0) + \int_0^x dt = F(0) + x$$

(cette fois, les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre décroissant !), donc

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty. \tag{32}$$

1. D'après (31), toutes les solutions de l'équation homogène tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$:

$$\forall\, K_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} K_0 \exp[-F(x)] = 0. \tag{33}$$

Nous allons maintenant démontrer que la solution particulière définie par

$$y_0(x) = \exp\big(-F(x)\big) \int_0^x g(t) \exp\big(F(t)\big)\,dt = \int_0^x g(t) \exp\big(F(t) - F(x)\big)\,dt \tag{34}$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

❧ Comme la fonction g tend vers 0 au voisinage de $+\infty$,

$$g(t).\exp\big(F(t)\big) \underset{t \to +\infty}{=} o\big(\exp[F(t)]\big).$$

Or la fonction $[t \mapsto \exp(F(t))]$ est continue, positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$ (puisqu'elle tend vers $+\infty$). On déduit du Théorème d'intégration des relations de comparaison que

$$\int_0^x g(t).\exp\big(F(t)\big)\,dt \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\int_0^x \exp\big(F(t)\big)\,dt\right)$$

et donc que

$$\exp\big(-F(x)\big) \int_0^x g(t).\exp\big(F(t)\big)\,dt \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\int_0^x \exp\big(F(t) - F(x)\big)\,dt\right).$$

❧ Comme x tend vers $+\infty$, on peut supposer que $x > 0$. Pour $t \in [0, x]$,

$$F(t) - F(x) = \int_x^t f(u)\,du \leqslant \int_x^t du = (t - x)$$

car $t \leqslant x$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \int_0^x \exp\big(F(t) - F(x)\big)\,dt &\leqslant \int_0^x \exp(t - x)\,dt \\ &\leqslant 1 - e^{-x} \leqslant 1. \end{aligned}$$

L'expression

$$\int_0^x \exp\big(F(t) - F(x)\big)\,dt$$

est donc bornée en tant que fonction de x, ce qui prouve que la solution particulière tend vers 0 au voisinage de $+\infty$:

$$\exp\big(-F(x)\big) \int_0^x g(t).\exp\big(F(t)\big)\,dt \underset{x \to +\infty}{=} o(1). \tag{35}$$

❧ Par (29), (33) et (35), *toutes* les solutions de (E) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Pour tout $t \leqslant 0$,

$$F(t) = F(0) + \int_0^t f(u)\,du \leqslant F(0) + \int_0^t du = F(0) + t$$

donc

$$0 < \exp\big(F(t)\big) \leqslant \exp\big(F(0) + t\big) = \exp[F(0)].e^t$$

et comme

$$\lim_{t \to -\infty} g(t) = 0,$$

alors

$$g(t)\exp\big(F(t)\big) \underset{t\to-\infty}{=} o(e^t).$$

Comme $[t \mapsto e^t]$ est intégrable au voisinage de $-\infty$, on en déduit que la fonction (continue !)

$$[t \mapsto g(t)\exp(F(t))]$$

est intégrable au voisinage de $-\infty$.

❧ D'après le Théorème fondamental (version généralisée), la fonction

$$\left[x \mapsto \int_{-\infty}^x g(t)\exp\big(F(t)\big)\,dt\right]$$

est une primitive de cette fonction. (Plus précisément : c'est la primitive qui tend vers 0 au voisinage de $-\infty$.) On peut donc réécrire la solution générale de l'équation différentielle (E) sous la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad y(x) = \exp\big(-F(x)\big)\left[K_1 + \int_{-\infty}^x g(t)\exp\big(F(t)\big)\,dt\right] \tag{36}$$

$$= K_1\exp\big(-F(x)\big) + \exp\big(-F(x)\big)\int_{-\infty}^x g(t)\exp\big(F(t)\big)\,dt. \tag{37}$$

❧ D'après (32),

$$\forall\, K_1 \neq 0,\quad \lim_{x\to-\infty} K_1\exp\big(-F(x)\big) = \pm\infty.$$

Comme l'équation différentielle (E) est linéaire, si y_1 et y_2 sont deux solutions distinctes de (E), alors la différence

$$y_H = y_1 - y_2$$

est une solution non identiquement nulle de l'équation homogène. Comme cette différence tend vers l'infini au voisinage de $-\infty$, les solutions y_1 et y_2 ne peuvent pas être toutes les deux bornées au voisinage de $-\infty$.

Il existe donc *au plus une* solution de (E) qui soit bornée au voisinage de $-\infty$.

❧ Notre objectif est maintenant de démontrer que la solution particulière

$$y_0(x) = \exp\big(-F(x)\big)\int_{-\infty}^x g(t)\exp\big(F(t)\big)\,dt \tag{38}$$

tend vers 0 au voisinage de $-\infty$.

Comme la fonction g tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ et que la fonction

$$[t \mapsto \exp(F(t))]$$

est intégrable au voisinage de $-\infty$, on déduit du Théorème d'intégration des relations de comparaison (version intégrable, cette fois) que

$$\int_{-\infty}^x g(t)\exp\big(F(t)\big)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_{-\infty}^x \exp\big(F(t)\big)\,dt\right)$$

et donc que

$$y_0(x) \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\int_{-\infty}^x \exp\big(F(t) - F(x)\big)\,dt\right). \tag{39}$$

D'après le Théorème fondamental,

$$\forall\, t \leqslant x,\quad F(t) - F(x) = \int_x^t f(u)\,du \leqslant (t - x)$$

(puisque les bornes sont ici dans l'ordre décroissant). Par croissance de la fonction exp et positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{x} \exp\bigl(F(t) - F(x)\bigr)\,dt \leqslant e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{t}\,dt = 1.$$

D'après (39),

$$\lim_{x\to-\infty} y_0(x) = 0.$$

❧ On a ainsi démontré que l'équation (E) admettait une, et une seule, solution bornée au voisinage de $-\infty$: cette solution est la solution particulière y_0 définie en (38) et elle tend vers 0 au voisinage de $-\infty$.

Solution 41 **06Kh-53**

Pour tout $t \in I = [0, 1]$, on pose

$$g(t) = \frac{1}{1+t+t^2}.$$

Il est clair que g est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$), strictement positive et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad g'(t) = \frac{-(2t+1)}{(1+t+t^2)^2} < 0.$$

Comme $g(0) = 1$, on en déduit que

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \quad 0 < g(t) < 1.$$

Par conséquent,

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \quad \lim_{x\to+\infty} [g(t)]^x = 0.$$

Il est clair que

$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad \bigl|[g(t)]^x\bigr| \leqslant 1.$$

Le majorant est indépendant de x et comme la fonction $[t \mapsto 1]$ est intégrable sur le segment $[0, 1]$, on peut déduire du Théorème de convergence dominée que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

✍ *On sait que $f(x)$ est un infiniment petit, il est donc intéressant d'en calculer un équivalent. La technique la plus fréquente pour y arriver consiste à intégrer par parties.*

Point principal à retenir : cet exercice est beaucoup plus simple si on le présente de manière abstraite (en introduisant la fonction g et celles de ses propriétés qui seront utiles).

❧ Comme g est de classe $\mathscr{C}^2$ et que sa dérivée g' ne s'annule pas, la fonction H définie par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad H(t) = \frac{1}{g'(t)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $I = [0, 1]$.

❧ Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
(x+1)f(x) &= \int_0^1 (x+1)[g(t)]^x g'(t).H(t)\,dt \\
&= \Bigl[[g(t)]^{x+1}.H(t)\Bigr]_0^1 - \int_0^1 [g(t)]^{x+1}.H'(t)\,dt \\
&= 1 + [g(1)]^{x+1}.H(1) - \int_0^1 [g(t)]^{x+1}.H'(t)\,dt
\end{aligned}$$

puisque $g(0) = 1$ et $g'(0) = -1$.

❧ Comme $0 < g(1) < 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} [g(1)]^{x+1}.H(1) = 0.$$

❧ Comme on l'a expliqué plus haut,

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \quad \lim_{x\to+\infty} [g(t)]^{x+1}.H'(t) = 0$$

et

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad \bigl|[g(t)]^{x+1}.H'(t)\bigr| \leqslant \bigl|H'(t)\bigr|.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I (en tant que fonction continue sur le segment $[0,1]$). Par convergence dominée,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 [g(t)]^{x+1}.H'(t)\,dt = 0.$$

❧ On en déduit enfin que

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)f(x) = 1$$

c'est-à-dire

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Solution 42 **06Kh-54**

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction

$$f_n = \left[t \mapsto \left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-t}\right]$$

est continue sur l'intervalle $[-n,+\infty[$. De plus,

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^n e^{-t}}{n^n}$$

(puisque n est fixé), donc la fonction f_n est bien intégrable sur $[-n,+\infty[$.

❧ Effectuons le changement de variable affine $u = t+n$.

$$\begin{aligned}u_n &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{n}\right)^n e^{-(u-n)}\,du\\ &= \frac{e^n}{n^n}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du = \frac{e^n}{n^n}\,n!.\end{aligned}$$

✍ *Il est bon de connaître la dernière intégrale pour ne pas avoir à poser sans cesse le calcul.*

D'après la formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$$

donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}$$

et par conséquent (relation de Chasles)

$$\lim_{n\to+\infty} I_n + J_n = \sqrt{2\pi}.$$

2. Nous allons maintenant démontrer que la suite (J_n) tend vers 0, ce qui prouvera par la même occasion que la suite (I_n) converge vers $\sqrt{2\pi}$.

On effectue cette fois le changement de variable affine

$$u = 1+\frac{t}{n},$$

qui nous donne

$$J_n = \sqrt{n}e^n\int_2^{+\infty}(ue^{-u})^n\,du.$$

❧ La fonction $g = [u \mapsto ue^{-u}]$ est une fonction positive de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$\forall\, u \geqslant 2,\quad g'(u) = (1-u)e^{-u} < 0,$$

si bien que la fonction H définie par

$$\forall\, u \geqslant 2,\quad H(u) = \frac{1}{g'(u)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$. On peut donc intégrer par parties selon la méthode classique.

Pour $n \geqslant 2$,

$$
\begin{aligned}
(n+1)\int_2^{+\infty}[g(u)]^n\,du &= \int_2^{+\infty}(n+1)[g(u)]^n g'(u)\cdot H(u)\,du\\
&= \Big[[g(u)]^{n+1}H(u)\Big]_2^{+\infty} - \int_2^{+\infty}[g(u)]^{n+1}\cdot H'(u)\,du\\
&= e^2\cdot(2e^{-2})^n - \int_2^{+\infty}[g(u)]^{n+1}\cdot H'(u)\,du
\end{aligned}
$$

car

$$\lim_{u\to+\infty}[g(u)]^{n+1}H(u) = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^n}{1-u}e^{-(n-1)u} = 0.$$

D'autre part, pour tout $u \geqslant 2$,

$$
\begin{aligned}
\left|[g(u)]^{n+1}\cdot H'(u)\right| &= \frac{u^{n+1}(u-2)}{(u-1)^2}\cdot e^{-nu}\\
&\leqslant [g(u)]^{n+1}
\end{aligned}
$$

car $u(u-2) = u^2-2u \leqslant (u-1)^2$. On en déduit que

$$\frac{e^2\cdot(2e^{-2})^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \int_2^{+\infty}[g(u)]^n\,du + o\left(\int_2^{+\infty}[g(u)]^n\,du\right)$$

c'est-à-dire

$$\int_2^{+\infty}[g(u)]^n\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^2\cdot(2e^{-2})^n}{n}.$$

Nous sommes arrivés au bout de nos peines, car

$$J_n = \sqrt{n}e^n\int_2^{+\infty}(ue^{-u})^n\,du \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n}(2e^{-1})^n),$$

ce qui prouve bien que J_n converge vers 0.

✍ *Pour aller plus loin : Mines PC 2017, deuxième épreuve.*

Solution 43 **06Kh-55**

Pour tout $h \neq 0$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{h}{h^2+x^2}\,f(x)\right]$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc $F(h)$ est bien définie. De plus, il est clair que F est une fonction *impaire*, donc nous allons désormais supposer que $h > 0$.

❧ Pour nous faire une idée du résultat, nous allons commencer en supposant que la fonction f est constante. Pour tout $h > 0$,

$$\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\,f_0\,dx = f_0\cdot h\cdot\left[\frac{1}{h}\operatorname{Arctan}\frac{x}{h}\right]_0^1 = f_0\cdot\operatorname{Arctan}\frac{1}{h}$$

et cette expression tend vers $\pi f_0/2$ lorsque h tend vers 0^+.

❧ Pour confirmer cette première impression, nous allons supposer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et intégrer par parties.

$$F(h) = \left[\operatorname{Arctan}\frac{x}{h}\cdot f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{Arctan}\frac{x}{h}\cdot f'(x)\,dx = f(1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{h} - \int_0^1\operatorname{Arctan}\frac{x}{h}\cdot f'(x)\,dx.$$

Il est clair que

$$\lim_{h\to0^+} f(1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{h} = f(1)\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, pour tout $x \in]0,1]$,

$$\lim_{h\to0^+}\operatorname{Arctan}\frac{x}{h}\cdot f'(x) = \frac{\pi}{2}\cdot f'(x)$$

et, comme la dérivée f' est continue sur le segment $[0,1]$,

$$\forall\, h>0,\ \forall\, x\in\,]0,1]\,,\qquad \left|\operatorname{Arctan}\frac{x}{h}\cdot f'(x)\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\|f'\|_\infty.$$

Le majorant est constant, donc indépendant de h et intégrable sur l'intervalle borné $]0,1]$. Par convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1\operatorname{Arctan}\frac{x}{h}\cdot f'(x)\,dx=\int_0^1\frac{\pi}{2}\cdot f'(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot[f(1)-f(0)]$$

et donc que

$$\lim_{h\to0^+}F(h)=\frac{\pi f(0)}{2}.$$

❧ Il est temps de répondre à la question posée : on suppose seulement que f est continue sur le segment $[0,1]$. En particulier, elle est bornée :

$$\forall\, t\in[0,1],\qquad |f(t)|\leqslant\|f\|_\infty.$$

❧ L'habitude des fractions rationnelles mène au changement de variable $x=hy$:

$$F(h)=\int_0^1\frac{1}{1+(x/h)^2}\cdot f\Big(h\cdot\frac{x}{h}\Big)\frac{dx}{h}=\int_0^{1/h}\frac{1}{1+y^2}\cdot f(h\cdot y)\,dy=\int_0^{+\infty}g_h(y)\,dy$$

où on a posé :

$$\forall\, 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{h},\quad g_h(y)=\frac{f(h\cdot y)}{1+y^2}\quad\text{et}\quad\forall\, y>\frac{1}{h},\quad g_h(y)=0.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, la fonction g_h est continue sur $[0,{}^1\!/\!_h[$, elle est continue sur $]{}^1\!/\!_h,+\infty[$ (car constante) et elle tend vers une limite finie à gauche et à droite en ${}^1\!/\!_h$:

$$\lim_{y\to1/h^-}g_h(y)=\frac{h^2f(1)}{1+h^2},\qquad\lim_{y\to1/h^+}g_h(y)=0$$

donc la fonction g_h est bien continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

De plus, g_h est identiquement nulle sur $]{}^1\!/\!_h,+\infty[$, donc elle est intégrable sur $[0,+\infty[$.

✍ *Dorénavant, on considérera que l'intervalle d'intégration est $I=\,]0,+\infty[$, pour ne pas avoir à considérer le cas particulier $y=0$.*

❧ Fixons $y\in I$. Comme ${}^1\!/\!_h$ tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0 par valeurs positives, il existe $\alpha>0$ tel que

$$\forall\, 0<h<\alpha,\quad 0<y<\frac{1}{h}$$

et donc tel que

$$\forall\, 0<h<\alpha,\quad g_h(y)=\frac{f(hy)}{1+y^2}.$$

On en déduit que, par continuité de f,

$$\lim_{h\to0^+}g_h(y)=\frac{f(0)}{1+y^2}=g(y).$$

Il est clair que la fonction g ainsi définie est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Enfin,

$$\forall\, h>0,\ \forall\, 0<y\leqslant\frac{1}{h},\quad |g_h(y)|\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{1+y^2}$$

et comme g_h est identiquement nulle sur $]{}^1\!/\!_h,+\infty[$, on en déduit que

$$\forall\, h>0,\ \forall\, y>0,\quad |g_h(y)|\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{1+y^2}.$$

Ce majorant est indépendant de h et intégrable sur $]0,+\infty[$ (en tant que fonction de y).

❧ On a ainsi démontré par convergence dominée que

$$\lim_{h\to0^+}F(h)=\int_0^{+\infty}g(y)\,dy=\frac{\pi f(0)}{2}.$$

✍ *Si on ne pense pas à effectuer ce changement de variable, on peut, en imitant un* Grand classique, *démontrer que la différence*

$$F(h) - f(0) \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} \cdot \big[f(x) - f(0)\big]\,dx$$

tend vers 0 *lorsque* h *tend vers* $+\infty$.

C'est assez technique, les ε *sont de sortie !*

❧ *Pour tout* $x \in [0, 1]$, *on pose*

$$\delta(x) = f(x) - f(0).$$

❧ *Soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe alors* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall\, x \in [0, \alpha], \quad \big|\delta(x)\big| \leqslant \varepsilon$$

car, par continuité de f, *la fonction* δ *tend vers* 0 *au voisinage de* 0. *De plus, toujours par continuité de* f, *la fonction* δ *est bornée sur le segment* $[0, 1]$:

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad \big|\delta(x)\big| \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

On déduit alors de la relation de Chasles et de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\delta(x)\,dx\right| &\leqslant \int_0^\alpha \frac{h}{h^2+x^2}\big|\delta(x)\big|\,dx + \int_\alpha^1 \frac{h}{h^2+x^2}\big|\delta(x)\big|\,dx \\ &\leqslant \varepsilon \int_0^\alpha \frac{h\,dx}{h^2+x^2} + 2\|f\|_\infty \int_\alpha^1 \frac{h\,dx}{h^2+x^2} \\ &\leqslant \varepsilon \operatorname{Arctan}\frac{\alpha}{h} + 2\|f\|_\infty \cdot (1-\alpha) \cdot \frac{h}{h^2+\alpha^2}.\end{aligned}$$

❧ *D'une part, le facteur* $\operatorname{Arctan} \alpha/h$ *est compris entre* 0 *et* $\pi/2$ *(car* $\alpha/h > 0$*). D'autre part, le réel* α *étant fixé (depuis qu'on a choisi* ε *en fait), il est clair que*

$$\lim_{h\to 0} 2\|f\|_\infty \cdot (1-\alpha) \cdot \frac{h}{h^2+\alpha^2} = 0.$$

Il reste à observer que

$$\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \varepsilon > 0.$$

Par définition de la limite, il existe donc un réel $h_0 > 0$ *tel que*

$$\forall\, 0 < h \leqslant h_0, \quad 0 \leqslant 2\|f\|_\infty \cdot (1-\alpha) \cdot \frac{h}{h^2+\alpha^2} \leqslant \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \varepsilon.$$

❧ *On a ainsi démontré que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existait un réel* $h_0 > 0$ *tel que*

$$\left|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\delta(x)\,dx\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Cela signifie précisément que

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\delta(x)\,dx = 0$$

et la conclusion est démontrée.

Solution 44 **06Kh-56**

Commençons par résoudre cette équation (linéaire, du premier ordre : la routine).

Une fonction y est une solution de l'équation homogène associée à (E) si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad y(x) = \frac{K}{x^\lambda}.$$

La méthode de variation de la constante nous assure alors que la fonction y définie par

$$\forall\, x > 0, \quad y(x) = \frac{K(x)}{x^\lambda}$$

(où K est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$) est une solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall\, x > 0, \quad K'(x) = \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}.$$

Comme $\lambda > 0$, on en déduit que la fonction K' est intégrable au voisinage de 0. On déduit alors du Théorème fondamental qu'il existe une constante $K_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad K(x) = K_0 + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\, dt.$$

✍ *Comme K' est intégrable au voisinage de 0, la fonction K tend vers une limite finie en 0^+ et la constante K_0 est égale à cette limite.*

Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$\forall\, x > 0, \quad y(x) = \frac{K_0}{x^\lambda} + \frac{1}{x^\lambda}\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\, dt.$$

❧ Si y_1 et y_2 sont deux solutions distinctes de (E), alors il existe deux réels $K_1 \neq K_2$ tels que

$$\forall\, x > 0, \quad y_2(x) - y_1(x) = \frac{K_2 - K_1}{x^\lambda}$$

et comme $K_2 - K_1 \neq 0$, alors la différence $y_2 - y_1$ tend vers l'infini au voisinage de 0 (vers $\pm\infty$, selon le signe de $K_2 - K_1$).

Comme la différence de deux fonctions bornées est une fonction elle-même bornée, il existe donc *au plus une* solution de (E) qui soit bornée au voisinage de 0.

❧ Lorsque t tend vers 0,

$$\frac{t^{\lambda-1}}{1+t} \sim t^{\lambda-1}.$$

Or la fonction $\big[t \mapsto t^{\lambda-1}\big]$ est positive et intégrable au voisinage de 0, donc

$$\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\, dt \underset{x\to 0}{\sim} \int_0^x t^{\lambda-1}\, dt = \frac{x^\lambda}{\lambda}$$

d'après le Théorème d'intégration des relations de comparaison (version intégrable). On en déduit que

$$\frac{1}{x^\lambda}\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\, dt \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\lambda}$$

donc la solution particulière y_0 définie par

$$\forall\, x > 0, \quad y_0(x) = \frac{1}{x^\lambda}\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\, dt$$

est bornée au voisinage de 0.

Il existe donc une, et une seule, solution de (E) qui soit bornée au voisinage de 0. On a même démontré que cette solution tendait vers $1/\lambda$ au voisinage de 0.

Solution 45 **rms130-576**

La fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}}$$

est évidemment continue sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Elle tend vers 1 au voisinage de 0 (équivalent bien connu) et

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{3/2}} = o\Big(\frac{1}{t^{5/4}}\Big)$$

donc f est bien intégrable sur I.

❧ La série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ est évidemment convergente !

❧ L'application φ définie par

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur $]0, 1[$. Cette bijection est <u>décroissante.</u>

Il est clair que

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{1+t}(1+t)} = \frac{-\varphi^2(t)}{2\sqrt{1+t}}$$

et que

$$t = \frac{1-\varphi^2(t)}{\varphi^2(t)}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\ell n(1+t)}{t\sqrt{1+t}} &= \frac{-2\,\ell n\,\varphi(t)}{1-\varphi^2(t)} \cdot \varphi^2(t) \cdot \frac{-2\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} \\ &= 4 \cdot \frac{\ell n\,\varphi(t)}{1-\varphi^2(t)} \cdot \varphi'(t) = g\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\end{aligned}$$

où on a posé

$$\forall\, 0 < u < 1, \quad g(u) = 4 \cdot \frac{\ell n\, u}{1-u^2}.$$

D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur $]0,1[$ et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^0 g(u)\,du.$$

✍ *Attention à l'ordre des bornes, notre changement de variable est décroissant !*

Donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 4\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} -u^{2k}\,\ell n\, u\,du.$$

Les fonctions $h_k(u) = -u^{2k}\,\ell n\, u$ sont continues et positives sur $]0,1[$; elles sont évidemment intégrables et en intégrant par parties, on trouve que

$$\int_0^1 -u^{2k}\,\ell n\, u\,du = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

La série de fonctions $\sum h_k$ est donc une série de fonctions intégrables qui converge simplement sur $]0,1[$ vers une fonction intégrable sur $]0,1[$ et comme la série de terme général positif

$$\sum \int_0^1 |h_k(u)|\,du$$

est convergente, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

✍ *Ceux qui connaissant $\zeta(2)$ et les astuces associées en déduiront que l'intégrale est égale à $\pi/2$.*

Solution 46 **rms130-1388**

La fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \qquad f(t) = \frac{\ell n\, t}{1+t^2}$$

est évidemment continue sur l'intervalle $]0,1]$. De plus, $f(t) \sim \ell n\, t$ lorsque t tend vers 0, donc la fonction f est intégrable au voisinage de 0 et donc sur l'intervalle $]0,1]$.

L'intégrale généralisée est donc bien définie.

✍ *On pourrait se contenter de définir la fonction f et d'observer qu'elle est continue sur l'intervalle $]0,1[$, en laissant au Théorème d'intégration terme à terme le soin de justifier l'intégrabilité de f. (Voir plus bas.)*

❧ Pour tout $t \in]0,1[$, il est clair que

$$f(t) = \ell n\, t \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \quad \text{où} \quad u_n(t) = (-1)^n t^{2n}\,\ell n\, t.$$

Les fonctions u_n sont continues sur l'intervalle $]0,1]$ et intégrables sur cet intervalle (puisque $u_n(t) = \mathcal{O}(\ell n\, t)$ au voisinage de $t = 0$). On a déjà observé que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur l'intervalle $]0,1[$ et que sa somme, la fonction f, était continue sur $]0,1[$.

❧ En intégrant par parties pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^{2n}\,\ell n\, t\,dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\,\ell n\, t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n}\,dt}{2n+1} = \frac{-1}{(2n+1)^2}.$$

✍ *On doit savoir justifier cette intégration par parties en détail sans la moindre hésitation (se ramener à un segment $[\varepsilon,1]$, intégrer par parties sur ce segment et étudier clairement les limites).*

Quant à savoir s'il est judicieux de détailler systématiquement tous ces calculs, c'est une toute autre question !

❧ Comme la fonction u_n est de signe constant sur $]0,1[$, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 |u_n(t)|\,dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et donc que la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\,dt$ est convergente.

D'après le Théorème d'intégration terme à terme, la fonction f (= la somme de la série de fonctions) est intégrable sur $]0,1[$ (ce que nous avons déjà justifié de manière indépendante) et

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Solution 47 **rms132-571**

Tout d'abord, la fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{e^t}{t}\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 1$, le segment $[\ell n\, x, 2\,\ell n\, x]$ est contenu dans $]0,+\infty[$. Par conséquent, l'expression $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 1$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

1. Soit $x > 1$. Par croissance de la fonction exp,

$$\forall\, t \in [\ell n\, x, 2\,\ell n\, x],\quad \frac{x}{t} = \frac{e^{\ell n\, x}}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2\,\ell n\, x}}{t} = \frac{x^2}{t}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, x > 1,\quad x\int_{\ell n\, x}^{2\,\ell n\, x} \frac{dt}{t} \leqslant f(x) \leqslant x^2 \int_{\ell n\, x}^{2\,\ell n\, x} \frac{dt}{t}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 1,\qquad x\,\ell n\, 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2\,\ell n\, 2.$$

On peut conclure par encadrement :

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \ell n\, 2.$$

✍ *Variante plus compliquée, qui permet néanmoins de réviser plusieurs idées intéressantes...*

On peut aussi utiliser le développement en série entière de la fonction exp.

Si le rayon de convergence d'une série entière est infini, il y a convergence normale sur le segment $[\ell n\, x, 2\,\ell n\, x]$ (quel que soit $x > 1$) et par conséquent

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\ell n\, x}^{2\,\ell n\, x} \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt = \ell n\, 2 + \int_{\ell n\, x}^{2\,\ell n\, x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt && \text{(linéarité)}\\ &= \ell n\, 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\ell n\, x}^{2\,\ell n\, x} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt && \text{(intégration terme à terme)}\\ &= \ell n\, 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k-1)\,\ell n^k\, x}{k.k!} \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{(2^k - 1)u^k}{k.k!}$$

est infini. Sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$ et par composition de limites,

$$\lim_{x \to 1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)\ln^k x}{k.k!} = \lim_{u \to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)u^k}{k.k!} = 0.$$

On a ainsi redémontré que $f(x)$ tendait vers $\ln 2$ au voisinage de 1.

2. D'après le Théorème fondamental, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 1, \quad F'(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{e^{2\ln x}}{2\ln x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x} > 0.$$

Comme F est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$, elle est injective.

Solution 48 **rms132-610**

Tout d'abord, la série de Poisson $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toute sous-famille d'une famille sommable étant elle-même sommable, on en déduit que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. On sait (cours sur la fonction Γ) que $[x \mapsto x^n e^{-x}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!}\, dx = 1.$$

Par linéarité de l'intégrale (puisque I est un ensemble **fini**, il est permis d'invoquer la linéarité !), on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!}\, dx = \sum_{n \in I} 1 = \#(I).$$

Or $I \subset A$ et le terme général est positif, donc

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leqslant e^{-x} f(x)$$

et par hypothèse, la fonction $[x \mapsto e^{-x} f(x)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

$$\#(I) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\, dx.$$

Le majorant ne dépendant pas de I, on peut en conclure que la partie A est finie.

✍ *Par définition, le cardinal d'une partie A est infini si, et seulement si, on peut extraire de A une partie finie de cardinal arbitrairement grand.*

2. Puisque A est un ensemble fini d'indices, la fonction f est en fait polynomiale. Par conséquent, l'équivalent proposé est impossible !

Solution 49 **rms132-617**

Transformons l'intégrale avec le changement de variable linéaire $u = nx$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\, du.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_n(u) = \frac{f(u/n)}{1+u^2}.$$

❧ **Intégrabilité** — Comme f est continue et bornée, chaque fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\varphi_n(u) = \mathcal{O}(1/u^2)$ lorsque u tend vers $+\infty$, donc chaque fonction φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

❧ **Convergence simple** — Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en 0. Par composition de limites, on en déduit que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$\varphi = \left[u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}\right].$$

❧ **Domination** — Par ailleurs, comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \geqslant 0, \quad \left|\varphi_n(u)\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2}.$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc la convergence est dominée.

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n(u)\, du = \int_0^{+\infty} \varphi(u)\, du = f(0)\big[\operatorname{Arctan} u\big]_0^{+\infty}$$

et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot f(0).$$

Solution 50 rms132-628

Tout d'abord, l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

❧ Pour $x > 0$ (ce qui n'est pas une restriction, puisqu'on étudie $x \to +\infty$), on peut effectuer le changement de variable linéaire $u = tx$:

$$xF(x) = \int_0^{xa} g\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}\, du.$$

❧ On considère donc la fonction φ définie par

$$\forall\, 0 \leqslant u \leqslant xa, \quad \varphi(x,u) = g\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall\, u > xa, \quad \varphi(x,u) = 0.$$

▶ **Intégrabilité** — On a déjà justifié que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$[u \mapsto \varphi(x,u)]$$

était intégrable sur $I = [0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x,u)\, du = xF(x).$$

▶ **Convergence simple** — Comme g est continue en 0,

$$\forall\, u \in I, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x,u) = g(0)e^{-u}$$

et la fonction $[u \mapsto g(0)e^{-u}]$ est continue sur I (et bien entendu intégrable sur cet intervalle).

▶ **Domination** — Comme g est continue sur le compact $[0, a]$, elle est bornée. Par conséquent,

$$\forall\, u \in I,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\varphi(x,u)\right| \leqslant \|g\|_\infty\, e^{-u}.$$

La majorant trouvé est indépendant de $x > 0$ et intégrable sur I en tant que fonction de u.

Par conséquent, d'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_I \varphi(x,u)\, du = \int_I g(0)e^{-u}\, du = g(0).$$

Comme $g(0) \neq 0$, on peut en déduire que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}.$$

✍ *Si $g(0) = 0$, on a seulement démontré que $F(x) = o(1/x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on n'a pas trouvé d'équivalent.*

Solution 51 rms132-1166

Il est clair que la fonction $f = [t \mapsto 1 - t \operatorname{Arctan} {}^1\!/_t]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Comme la fonction Arctan tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, la fonction f tend vers 1 au voisinage de $t = 0$. Admettant une limite finie au voisinage de 0, elle est donc intégrable au voisinage de 0.

D'autre part, d'après le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de la fonction Arctan,

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + o\Big(\frac{1}{t^3}\Big)$$

donc

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2},$$

ce qui prouve que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui prouve que l'intégrale généralisée est bien définie ("convergente", comme on dit).

❧ On connaît l'identité classique :

$$\forall\, t > 0, \quad \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t. \tag{$\star$}$$

On en déduit que

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = 1 - \frac{\pi}{2}\, t + t \operatorname{Arctan} t.$$

En intégrant par parties,

$$\int t \operatorname{Arctan} t \, dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t$$

donc une primitive de f est

$$F(t) = \frac{t}{2} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t.$$

Par définition,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(0) = \lim_{t\to+\infty} F(t).$$

Avec l'identité ($\star$) rappelée plus haut,

$$\frac{t}{2} - \frac{\pi t^2}{4} + \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} t = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}\Big[\frac{1}{t} + o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big] = o(1)$$

donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Solution 52 rms132-1167

1. La fonction $[x \mapsto \ln \sin x]$ est continue sur l'intervalle $]0, {}^\pi\!/_2]$ et

$$\ln \sin x - \ln x = \ln \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ln 1 = 0$$

(par composition de limites), donc

$$\ln \sin x = \ln x + o(\ln x) \sim \ln x.$$

Comme $\ln$ est une fonction intégrable de référence au voisinage de 0, on en déduit que $\ln \sin x$ est intégrable sur $]0, {}^\pi\!/_2]$.

❧ On considère maintenant le changement de variable affine $u = \frac{\pi}{2} - x$ qui réalise une bijection de $[0, {}^\pi\!/_2[$ sur $]0, {}^\pi\!/_2]$: d'après le Théorème de changement de variable, la fonction $[x \mapsto \ln \cos x]$ est intégrable sur $[0, {}^\pi\!/_2[$ si, et seulement si, la fonction $[u \mapsto \ln \cos({}^\pi\!/_2 - u)]$ est intégrable sur $]0, {}^\pi\!/_2]$. Or

$$\forall\, 0 < u \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \ln \cos\Big(\frac{\pi}{2} - u\Big) = \ln \sin u$$

et on a déjà démontré que $\ln \sin u$ était intégrable sur $]0, {}^\pi\!/_2]$.

2. Les intégrales I et J sont donc bien définies. De plus, d'après le Théorème du changement de variable,

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du = I.$$

3. Par linéarité,

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \ell n(\sin x \cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ell n \frac{\sin 2x}{2}\,dx$$

donc

$$2I = -\frac{\pi \ell n 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ell n \sin 2x\,dx.$$

Avec le changement de variable affine $u = 2x$, qui réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $]0, \pi[$, on a

$$\int_0^{\pi/2} \ell n \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\ell n \sin 2x)\,(2\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ell n \sin u\,du.$$

La fonction $[u \mapsto \ell n \sin u]$ est intégrable sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ (conséquence du changement de variable précédent !) et admet $u = \pi/2$ pour axe de symétrie :

$$\forall\, 0 < u < \pi, \qquad \ell n \sin(\pi - u) = \ell n \sin u.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ell n \sin u\,du = \int_0^{\pi/2} \ell n \sin u\,du = I.$$

✍ *C'est une variante du théorème bien connu : si f est paire et intégrable sur $]-\alpha, \alpha[$, alors*

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 2\int_0^{\alpha} f(t)\,dt.$$

❧ Finalement,

$$I = J = -\frac{\pi \ell n 2}{2}.$$

✍ *Puisque $0 < \sin u \leqslant 1$ pour $0 < u \leqslant \pi/2$, on intègre une fonction négative avec des bornes rangées dans l'ordre croissant, donc on savait dès le début que l'intégrale était négative.*

Solution 53 **rms132-1169**

1. On introduit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, t > 0, \qquad f(t) = -\frac{\ell n(1-t)}{t}.$$

Le développement limité de $\ell n(1-t)$ au voisinage de $t = 0$ montre que f est continue sur $[0, +\infty[$, donc f est continue sur le segment $[0, x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et par conséquent, $F(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

❧ La fonction f n'est pas définie pour $t < 0$, donc l'intégrale $F(x)$ n'a pas de sens pour $x < 0$.
L'ensemble de définition de F est donc l'intervalle $[0, +\infty[$.

✍ *Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, on déduit du Théorème fondamental que la fonction F est la primitive de f qui s'annule en 0 et en particulier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.*

2. Pour tout $t \in [0, 1[$, on sait que

$$\ell n(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.$$

D'après la définition de f,

$$\forall\, t \in [0, 1[, \qquad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n définie par

$$\forall\, t \in [0, 1], \qquad u_n(t) = \frac{t^n}{n+1}$$

est continue sur le segment $[0, 1]$, donc intégrable sur tout segment $[0, x] \subset [0, 1]$.

▶ La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et, sur cet intervalle, sa somme est la fonction f, donc la somme est continue sur $[0,1[$.

▶ Pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n(x) = \int_0^x |u_n(t)|\,dt = \int_0^x u_n(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$$

donc la série (de terme général positif) $\sum I_n(x)$ est convergente.

▶ On déduit donc du Théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est intégrable sur le segment $[0,x]$ pour tout $0 \leqslant x < 1$ ainsi que sur l'intervalle $[0,1[$ et que

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x u_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

✍ *On savait déjà que f était intégrable sur tout segment $[0,x] \subset [0,1]$, puisque cette fonction est continue sur le segment $[0,1]$. Sur ce point particulier, le Théorème d'intégration terme à terme ne nous apprend donc rien.*

3. Soit $0 < x < 1$. Pour tout $0 < \varepsilon < x$,

$$\int_\varepsilon^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt = \big[-\ln(1-t)\ln t\big]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x \frac{\ln t}{1-t}\,dt$$

et comme

$$\ln(1-\varepsilon)\ln\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\varepsilon\ln\varepsilon \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 0,$$

on a

$$F(x) = -\ln x \ln(1-x) - \int_0^x \frac{\ln t}{1-t}\,dt.$$

Le changement de variable affine $u = 1-t$ et la relation de Chasles permettent d'en déduire que

$$F(x) = -\ln x\ln(1-x) - \int_{1-x}^1 \frac{\ln u}{u}\,du = -\ln x \ln(1-x) + F(1) + \int_0^{1-x} \frac{\ln t}{t}\,dt$$

soit

$$\forall\, 0 < x < 1, \qquad F(x) + F(1-x) = F(1) - \ln x \ln(1-x).$$

L'expression établie à la question précédente pour $x \in [0,1]$ nous confirme que $F(1) = \pi^2/6$.

Solution 54 **rms132-1219**

1. Pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$n^p.v_n = \exp(-\sqrt{n} + p\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée ($\ln n \ll \sqrt{n}$). Ainsi, le terme général v_n est négligeable devant le terme générale de n'importe quelle série de Riemann convergente, ce qui prouve que la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

✍ *Un développement limité simple montre que*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

et donc que v_{n+1}/v_n tend vers 1 : il est donc impossible de prouver que la série $\sum v_n$ converge à l'aide de la règle de D'Alembert.

2. La fonction $\left[t \mapsto e^{-\sqrt{t}}\right]$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, comme on l'a vu,

$$e^{-\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^p}\Big)$$

quel que soit l'entier $p > 1$. Par conséquent, cette fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

❧ Par intégration par parties,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x ue^{-u}\,du = 1 - (1+x)e^{-x}$$

et par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du = 1.$$

❧ Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (avec $dt = 2u\,du$) nous donne

$$I_n = 2\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} ue^{-u}\,du.$$

Avec la relation de Chasles, on en déduit que

$$I_n = 2\left(1 - \int_0^{\sqrt{n}} ue^{-u}\,du\right) = 2(\sqrt{n}+1)e^{-\sqrt{n}}.$$

3. La fonction $\left[t \mapsto e^{-\sqrt{t}}\right]$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, t \in [k, k+1], \qquad e^{-\sqrt{k+1}} \leqslant e^{-\sqrt{t}} \leqslant e^{-\sqrt{k}}$$

donc

$$e^{-\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} e^{-\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-\sqrt{k}}.$$

On a démontré que la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ était convergente, tout comme l'intégrale généralisée $\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$. On peut donc sommer l'encadrement précédent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k+1}} \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt = I_n \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} = R_{n-1}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I_n.$$

❧ D'après l'expression calculée ci-dessus,

$$I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}.$$

4. Avec le développement limité à l'ordre deux de $\ell n(1+h)$, on trouve que

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{v_k}{\sqrt{e}}.$$

Or $\sum v_k$ est une série convergente de terme général positif, donc la série $\sum u_k$ est (absolument) convergente et

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{\sqrt{e}} = \frac{R_n}{\sqrt{e}}$$

d'après le Théorème de sommation des relations de comparaison.

Solution 55 **rms132-1225**

1. Il est clair que l'application S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad S'(x) = -xe^{-x} < 0.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad 0 < S(x) \leqslant S(1) = 2e^{-1}.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \geqslant 1, \forall\, n \geqslant 2, \quad 0 < [S(x)]^n \leqslant [S(x)]^{n-1}.S(x) \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(x).$$

2. La fonction intégrande est le produit d'une application polynomiale par e^{-t}, donc elle est bien intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'après la question précédente,

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n-1} e^{-t} = \left[\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-t/n}\right]^n = \left[S(t/n)\right]^n \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(t/n).$$

Le changement de variable affine $u = t/n$ montre que

$$\int_n^{+\infty} S(t/n)\,dt = n\int_1^{+\infty} S(u)\,du$$

(où l'intégrale est un réel positif, puisque S est une fonction intégrable et positive). Par conséquent,

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{+\infty}\Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-t}\,dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{+\infty}\Big(\frac{2}{e}\Big)^{n-1} S(t/n)\,dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\Big(\frac{2}{e}\Big)^{n-1}\cdot n\int_1^{+\infty} S(u)\,du$$

et comme $0 < 2/e < 1$, on en déduit par croissances comparées (de $\sqrt{n}$, n et q^n) que le majorant tend vers 0.

On a démontré par encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{+\infty}\Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-t}\,dt = 0$$

(et on n'a pas encore compris ce que venait faire ici ce facteur $1/\sqrt{n}$).

3. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x > -1$,

$$\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\cdot f_4(t)\,dt$$

où

$$\forall\, t > -1,\quad f_4(t) = \frac{d^4}{dt^4}\,\ell n(1+t) = \frac{-6}{(1+t)^4} < 0.$$

On en déduit que l'intégrale est négative pour tout $x > -1$ (en discutant sur le signe de x pour tenir compte de l'ordre des bornes de cette intégrale) et donc que

$$\forall\, x > -1,\quad \ell n(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4. On devine qu'il s'agit d'appliquer le Théorème de convergence dominée : nous allons définir une suite de fonctions avec un peu d'astuce, afin de considérer une suite d'intégrales pour lesquelles l'intervalle d'intégration est toujours le même (= indépendant de n).

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x} \times \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x).$$

Elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (en tant que produit d'une fonction continue [polynomiale !] par l'indicatrice d'un intervalle) et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car nulle au voisinage de $\pm\infty$) et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x}\,dx.$$

❧ On vérifie sans peine que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction célèbre.

D'une part,

$$\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x} = \exp\Big[-\sqrt{n}x + n\,\ell n\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big] = \exp\Big[-\sqrt{n}x + \sqrt{n}x - \frac{x^2}{2} + o(1)\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-x^2/2)$$

et d'autre part, comme $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\quad f_n(x) = \Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x}$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \exp(-x^2/2).$$

❧ Il reste à vérifier la condition de domination. *Ouvrez grand les yeux !*

D'après l'inégalité obtenue à la question précédente,

$$\forall\, x > -\sqrt{n},\qquad n\,\ell n\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \leqslant \sqrt{n}t - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\sqrt{n}}$$

et donc

$$\forall\, x > -\sqrt{n}, \qquad 0 < \Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x} \leqslant \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big) \cdot \exp\Big(\frac{x^3}{3\sqrt{n}}\Big).$$

En particulier,

$$\forall\, x \in \left]-\sqrt{n}, \sqrt{n}\right], \qquad 0 < \Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x} \leqslant \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big) \cdot \exp\Big(\frac{x^2}{3}\Big)$$

puisque

$$\forall\, |x| \leqslant \sqrt{n}, \qquad \frac{|x|^3}{3\sqrt{n}} \leqslant \frac{x^2}{3}.$$

Comme f_n est identiquement nulle hors de l'intervalle $\left]-\sqrt{n}, \sqrt{n}\right]$, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \exp\Big(\frac{-x^2}{6}\Big).$$

On a trouvé un majorant indépendant de n et, en tant que fonction de x, intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la condition de domination est remplie.

❧ D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

5. On effectue, comme le suggère l'énoncé, le changement de variable affine $t = n + \sqrt{n}u$ dans l'intégrale I_n :

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n + \sqrt{n}u)^n e^{-n-\sqrt{n}u}\, du = \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\, du.$$

Or $I_n = n!$ et d'après la Formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}}.$$

On en déduit, par unicité de la limite, que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\, du = \sqrt{2\pi}.$$

❧ D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\, du = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \Big(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\, du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\, du.$$

Avec le changement de variable $t = \sqrt{n}u$ dans la dernière intégrale, on obtient

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\, du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{n}^{+\infty} \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n e^{-t}\, dt \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

d'après **[2]**. Ainsi, d'après **[4]**,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Par unicité de la limite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Solution 56 rms134-1465

✍ *Les termes de la somme dépendent de l'indice n, par conséquent S_n **n'est pas** la somme partielle d'une série.*

✍ *En réécrivant les termes de la somme, on fait apparaître le motif k/n :*

$$\tan\frac{1}{k+n} = \tan\Big(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+k/n)}\Big)$$

qui doit faire penser aux sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Mais la tangente complique la donne !

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, le quotient $\frac{1}{k+n}$ est compris entre 0 et $1/n$. Il est donc petit et par conséquent

$$\tan\frac{1}{k+n} \approx \frac{1}{k+n}, \tag{40}$$

ce qui suggère que

$$S_n \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ell n\,2.$$

Malheureusement, la relation (40) n'a pas vraiment de sens (l'entier k est-il fixé ? s'agit-il d'un équivalent uniforme en k ?) et aucun théorème du cours ne permet de passer de cette relation de comparaison entre les termes à la relation analogue entre les sommes.

❧ **Première méthode**

La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[0, \pi/4]$ et

$$\forall\, x \in [0, \pi/4], \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x$$
$$\tan''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x)$$

donc

$$\forall\, 0 \in [0, \pi/4], \quad 0 \leqslant \tan''(x) \leqslant 2\times 1\times(1+1^2) = 4.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a donc

$$\forall\, x \in [0, \pi/4], \quad \big|\tan x - x\big| \leqslant 4\frac{x^2}{2} = 2x^2.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Big|S_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\Big| \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+n)^2} \leqslant \frac{2n}{(1+n)^2}. \tag{41}$$

✍ *Pour majorer une somme, on peut parfois se contenter de multiplier le plus grand terme par le nombre total de termes...*

L'encadrement (41) prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} = 0.$$

On a reconnu plus haut une somme de Riemann et on a déjà calculé sa limite, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell n\,2.$$

❧ **Variante de la première méthode**

✍ *On a travaillé sur le segment $[0, \pi/4]$ de manière assez arbitraire. Or les arguments de la fonction* tan *sont tous compris entre $1/2n$ et $1/n$. Il serait donc plus judicieux d'étudier* tan *au voisinage de 0 et plus précisément l'écart entre le graphe de* tan *et sa tangente à l'origine...*

On considère la fonction $f = [x \mapsto \tan x - x]$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, 1/n]$ et

$$\forall\, x \in [0, 1/n], \quad 0 \leqslant f'(x) = \tan^2 x \leqslant \tan^2 \frac{1}{n}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est donc lipschitzienne sur $[0, 1/n]$ avec en particulier

$$\forall\, x \in [0, 1/n], \quad \big|f(x)\big| = \big|f(x) - f(0)\big| \leqslant \tan^2 \frac{1}{n} \cdot |x| \leqslant \frac{1}{n} \tan^2 \frac{1}{n}.$$

On a donc (inégalité triangulaire)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| f\Big(\frac{1}{k+n}\Big) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \tan^2 \frac{1}{n}$$

et donc (somme de n termes, tous égaux)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \right| \leqslant \tan^2 \frac{1}{n}. \tag{42}$$

Comme plus haut, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = 0$$

et on peut conclure de la même manière.

✍ *Il est important de noter qu'on a utilisé ici un théorème moins précis que dans la première version (inégalité des accroissements finis, c'est-à-dire approximation au premier ordre,* vs *inégalité de Taylor-Lagrange au second ordre), mais on s'en est servi de façon plus judicieuse (en considérant un intervalle plus petit).*

Cela explique pourquoi on a obtenu une meilleure approximation (le majorant de (42) *est un infiniment petit du second ordre alors que le majorant de* (41) *était un infiniment petit du premier ordre).*

❧ **Deuxième méthode**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \tan \frac{1}{n+t}.$$

Il est clair que cette fonction est continue et décroissante. Une comparaison classique entre somme et intégrale nous donne l'encadrement suivant.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) - f(0) + \int_0^n \tan \frac{1}{n+t}\, dt \leqslant S_n \leqslant \int_0^n \tan \frac{1}{n+t}\, dt \tag{43}$$

D'une part,

$$f(n) - f(0) = \tan \frac{1}{2n} - \tan \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'autre part, le changement de variable $t = nu$ nous donne

$$\int_0^n \tan \frac{1}{n+t}\, dt = \int_0^1 g_n(u)\, du \quad \text{avec} \quad g_n(u) = n \tan \frac{1}{n(1+u)}.$$

Chaque fonction g_n est intégrable sur $[0, 1]$ (fonction continue sur un segment) et

$$g_n(u) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n(1+u)} = \frac{1}{1+u}.$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n \geqslant 1}$ converge donc simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction continue sur $[0, 1]$ (et donc intégrable sur ce segment).

Par croissance de la fonction tan sur $[0, 1/n] \subset [0, 1]$,

$$\forall\, u \in [0, 1], \quad 0 \leqslant n \tan \frac{1}{n(1+u)} \leqslant n \tan \frac{1}{n}$$

et d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction tan est 2-lipschitzienne sur $[0, \pi/4]$, donc

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \tan\frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{n},$$

si bien que la convergence est dominée :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, u \in [0,1], \quad 0 \leqslant g_n(u) \leqslant 2.$$

(Le majorant est indépendant du paramètre n et, en tant que fonction de u, il est intégrable sur le segment $[0,1]$.)

On déduit alors du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(u)\,du = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ell n\, 2$$

et finalement, on déduit de (43) que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell n\, 2$$

par encadrement.

Solution 57 **rms134-1482bis**

1. Pour $0 < t < 1$, on pose

$$g(t) = \frac{\ell n(1-t)}{t}.$$

Il est clair que cette fonction g est continue sur $]0,1[$. Sachant que

$$g(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{-t + o(t)}{t} = -1 + o(1),$$

on peut poser $g(0) = -1$ pour obtenir ainsi une fonction continue sur l'intervalle $I = [0,1[$.

D'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction G définie par

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

est alors une primitive de g et donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

❧ Par composition, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1[$:

$$\begin{array}{ccccc} [0,1[& \longrightarrow & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 & \longmapsto & f(x) = G(x^2) \end{array}$$

et d'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad f'(x) = 2xG'(x^2) = 2xg(x^2)$$

soit

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad f'(x) = \frac{2\,\ell n(1-x^2)}{x}.$$

2. On sait que la fonction ℓn est intégrable au voisinage de l'origine. Lorsque t tend vers 1 (par valeurs inférieures),

$$g(t) \sim \ell n(1-t)$$

donc la fonction g est intégrable au voisinage de 1. La fonction f est donc bien définie en 1 :

$$f(1) = \int_0^1 g(t)\,dt.$$

✍ *Il suffit que la fonction g soit intégrable sur $[0,1[$ pour que l'intégrale généralisée soit convergente.*

Comme g est continue sur l'intervalle $[0,1[$, elle est donc intégrable sur $[0,1[$ et, par définition des intégrales généralisées,

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \lim_{x\to 1}\int_0^x g(t)\,dt = \lim_{x\to 1} G(x).$$

Par composition de limites, comme x^2 tend vers 1 lorsque x tend vers 1,

$$f(x) = G(x^2) \xrightarrow[x \to 1]{} \lim_{x \to 1} G(x) = \int_0^1 g(t)\,dt = f(1).$$

La fonction f est donc continue sur $[0,1]$.

✍ *Comment calculer $f(1)$? Avec un changement de variable et une intégration terme à terme :*

$$f(1) = \int_0^1 \frac{\ell n\, u}{1-u}\,du = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \ell n\, u\,du = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2} = \frac{-\pi^2}{6}.$$

Vous devriez pouvoir vérifier les détails sans difficulté.

3. L'expression de la dérivée montre que

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = -\infty.$$

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, on peut appliquer le Théorème des accroissements finis : pour tout réel $0 < x < 1$, il existe un réel $c_x \in]x, 1[$ tel que

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(c_x).$$

L'encadrement $x < c_x < 1$ prouve que

$$\lim_{x \to 1} f'(c_x) = -\infty$$

donc le taux d'accroissement étudié ne tend pas vers une limite finie.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1.

✍ *On a en fait prouvé que le graphe de f avait une tangente verticale au point d'abscisse 1.*

4. En primitivant le développement limité à l'ordre 0 de g, on obtient le développement limité à l'ordre 1 de G :

$$G(x) \underset{x \to 0}{=} -x + o(x).$$

Comme x^2 tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut substituer pour obtenir le développement limité à l'ordre 2 de f :

$$f(x) = G(x^2) \underset{x \to 0}{=} -x^2 + o(x^2).$$

✍ *Le graphe de f admet donc une tangente horizontale à l'origine et est situé sous cette tangente.*

Le développement limité qu'on vient de calculer nous donne cette information au voisinage de l'origine seulement.

L'expression de la dérivée nous montre que f est strictement décroissante sur $[0,1]$, donc $f(x) < f(0)$ pour tout $0 < x \leqslant 1$: le graphe de f est donc situé sous sa tangente à l'origine sur la totalité de l'intervalle $[0,1]$!

Solution 58 — rms134-1483

En tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, $\varphi(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

❧ La fonction tan réalise une bijection strictement croissante de l'intervalle $I_0 =]-\pi/2, \pi/2[$ sur $J = \mathbb{R}$. On peut donc effectuer le changement de variable $v = \tan u$ pour tout $x \in I_0$.

✍ *Si $x \in I_0$, alors le segment $[0 \leftrightarrow x]$ est contenu dans l'intervalle ouvert I_0.*

On sait que

$$\cos^2 u = \frac{1}{1+v^2} \quad \text{et} \quad dv = (1 + \tan^2 u)\,du = \frac{du}{\cos^2 u}$$

donc, pour tout $x \in I_0$,

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{\frac{3}{\cos^2 u} + 1} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1 + 3(1+v^2)}\,dv.$$

Autrement dit, pour tout $x \in I_0$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{3} \int_0^{\tan x} \frac{dv}{4/3 + v^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{3}\tan x}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{3}\tan x}{2}.\end{aligned}$$

✍ *Il est utile de retenir une fois pour toutes que*

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}$$

pour tout $a > 0$ *et pas plus difficile de retenir que*

$$\int \frac{dx}{a^2+(x+b)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x+b}{a}$$

quels que soient $a > 0$ *et* $b \in \mathbb{R}$.

❧ Comme l'intégrande est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (Théorème fondamental).

✍ *On peut aussi remarquer que* φ *est la primitive* $\boxed{\text{nulle en } x = 0}$ *d'une fonction paire : cette fonction* φ *est donc impaire.*

En particulier,

$$\varphi(\pi/2) = \lim_{x\to(\pi/2)-} \varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Par symétrie,

$$\varphi(-\pi/2) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{3+\cos^2 u} = \varphi(\pi/2) - \varphi(-\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

L'intégrande étant une fonction paire et périodique, de période π, on en déduit que

$$\int_0^{\pi} \frac{du}{3+\cos^2 u} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{3+\cos^2 u} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \tag{$\star$}$$

❧ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un, et un seul, entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

✍ *Cet entier relatif* n *est égal à*

$$\left\lfloor \frac{x+\pi/2}{\pi} \right\rfloor$$

mais cela est sans importance.

Dans le cas général ($|x - n\pi| < \pi/2$), on déduit de la relation de Chasles, de la périodicité de l'intégrande et de la propriété ($\star$) que

$$\begin{aligned}\int_0^x \cdots &= \int_0^{n\pi} \cdots + \int_{n\pi}^x \cdots \\ &= 2n\int_0^{\pi/2} \cdots + \int_0^{x-n\pi} \cdots \\ &= \frac{n\pi}{2\sqrt{3}} + \varphi(x-n\pi)\end{aligned}$$

et comme $x - n\pi \in I_0$, on a finalement

$$\varphi(x) = \frac{n\pi}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{3}\tan x}{2}.$$

❧ Dans le cas particulier où $x = n\pi + \pi/2 = (2n+1)\pi/2$,

$$\varphi(x) = (2n+1)\varphi(\pi/2) = \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Solution 59 **rms134-1516**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[x \mapsto \cos^n x]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale est bien définie.

Comme $0 \leqslant \cos x < 1$ pour tout $x \in]0, \pi/2]$,

$$\forall\, x \in]0, \pi/2]\,, \quad \lim_{n \to +\infty} \cos^n x = 0 \tag{44}$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]0, \pi/2]\,, \quad 0 \leqslant \cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x < 1 \tag{45}$$

donc, en intégrant (45),

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \,dx \leqslant \int 0^{\pi/2} \cos^n x \,dx$$

et, par convergence dominée [(44) et (45)],

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0.$$

On peut donc appliquer le Critère spécial des séries alternées et en conclure que la série alternée $\sum u_n$ est convergente.

✍ *L'étude classique des intégrales de Wallis montre que*

$$|u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

et donc que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann).

❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0, \pi/2], \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k x.$$

Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et par conséquent intégrable.

Pour $x \in]0, \pi/2]$, on reconnaît une série géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - (-\cos x)^{n+1}}{1 + \cos x}$$

ce qui justifie la convergence simple vers une fonction continue :

$$\forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$$

mais aussi que la convergence est dominée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{1 + \cos^{n+1} x}{1 + \cos x} \leqslant \frac{2}{1 + \cos x}.$$

✍ *Le majorant trouvé est indépendant du paramètre n et intégrable sur $]0, \pi/2]$ (puiqu'il admet un prolongement continu sur le segment $[0, \pi/2]$).*

On peut remarquer que la domination est vraie sur le segment $[0, \pi/2]$ puisque $f_n(0) = 1$ ou 0 selon la parité de n, mais pas la convergence simple : la suite de terme général $f_n(0)$ est divergente. C'est sans importance pour appliquer le Théorème de convergence dominée.

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) \,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\pi/2} f_n(t) \,dt = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

donc on a démontré que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

❧ Il reste à calculer l'intégrale. On pose pour cela

$$t = \tan\frac{x}{2},$$

ce qui nous donne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Après simplifications, il ne reste que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 dt = 1.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1.$$

Solution 60 **rms134-1520**

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \in I = [0, +\infty[$, on pose

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}.$$

❧ Il est clair que chaque fonction u_n est intégrable sur I (continue sur l'intervalle fermé I et $\mathcal{O}(1/t^2)$ lorsque t tend vers $+\infty$).
❧ Il est tout aussi clair que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur l'intervalle ouvert $I_0 =]0, +\infty[$ car

$$\forall\, t > 0, \quad u_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

✍ *La série $\sum u_n(0)$ est grossièrement divergente !*

❧ La somme S est donc définie sur I_0 :

$$\forall\, t \in I_0, \qquad S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t).$$

Chaque fonction u_n est continue sur I_0 et

$$\forall\, a > 0,\ \forall\, t \in [a, +\infty[, \quad |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+n^2a^2}.$$

✍ *Il s'agit de majorer une fonction monotone (décroissante) de t...*

Le majoration est indépendant de t et c'est le terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$.
Comme les fonctions u_n sont continues, on en déduit que la somme S est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ et donc sur l'intervalle

$$I_0 = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

❧ Pour tout $t \in I_0$, la suite de terme général $|u_n(t)|$ tend vers 0 en décroissant. Le Critère spécial des séries alternées permet donc de dominer le reste de cette série :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I_0, \quad \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)\Big| \leqslant |u_{n+1}(t)| \tag{$\star$}$$

et en particulier pour $n = 0$:

$$\forall\, t \in I_0, \quad |S(t)| = |R_0(t)| \leqslant |u_1(t)|.$$

On a démontré que la fonction u_1 était intégrable sur I_0, donc la fonction S est intégrable sur I_0 (théorème de comparaison).
Nous avons (enfin !) démontré l'existence de l'intégrale.

❧ Décomposons la somme en somme partielle et reste : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} S(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} S_n(t) + R_n(t)\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt\\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale (les u_k et le reste R_n sont des fonctions intégrables sur I_0 comme on l'a démontré).

Pour tout $t \in I_0$, la suite de terme général $R_n(t)$ tend vers 0 (puisque c'est le reste d'une série convergente) et, d'après ($\star$),

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in I_0, \quad \left|R_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)^2t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Le majorant est indépendant de n et, en tant que fonction de t, il est intégrable sur I_0 (fonction de référénce), donc la convergence est dominée et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} R_n(t)\,dt = 0.$$

Finalement, la série de terme général

$$\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+k^2t^2} = \frac{(-1)^k}{k} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

converge (ce qui n'est pas surprenant) et

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

❧ Le cours sur les séries entières nous dit que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad \ell n(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Comme la série du second membre converge pour $x = 1$, on déduit du Théorème d'Abel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ell n\, 2$$

et donc que

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \frac{-\pi\, \ell n\, 2}{2}.$$

✍ *L'intégrale est donc* négative. *C'était prévisible ! En effet, d'après le Critère spécial des séries alternées, le reste est du signe du premier terme négligé et en particulier, la somme (= reste d'ordre 0) est du signe du premier terme. Donc*

$$\forall\, t > 0, \quad S(t) \leqslant 0$$

et l'intégrale de S est donc négative.

Solution 61 **rms134-1659**

1. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure réelle (Axiome de la borne supérieure). Comme f et f'' sont définies sur $\mathbb{R}_+$, les ensembles

$$\left\{\left|f(x)\right|,\ x \in \mathbb{R}_+\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\left|f''(x)\right|,\ x \in \mathbb{R}_+\right\}$$

ne sont pas vides. Comme f et f'' sont supposées bornées, ces deux ensembles sont également majorés. Par conséquent, les deux réels $M_0(f)$ et $M_2(f)$ sont bien définis.

2. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \bigl|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\bigr| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\, M_2(f).$$

En particulier, pour $a = x \in \mathbb{R}_+$ et $b = x + h$ avec $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\bigl|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\bigr| \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2(f).$$

On en déduit par inégalité triangulaire que

$$\bigl||hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)|\bigr| \leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2(f)$$

et donc que

$$\begin{aligned} \bigl|hf'(x)\bigr| &\leqslant \frac{h^2}{2}\, M_2(f) + \bigl|f(x+h) - f(x)\bigr| \\ &\leqslant 2M_0(f) + \frac{h^2}{2}\, M_2(f) \end{aligned}$$

(à nouveau par inégalité triangulaire). Comme $h > 0$, on en déduit que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \bigl|f'(x)\bigr| \leqslant \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

3. Dans l'encadrement précédent, le majorant est indépendant de x. Cela prouve que la dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et par conséquent que le réel $M_1(f)$ est bien défini (pour les raisons données plus haut).

Dans cet encadrement, le minorant est indépendant de $h > 0$, on peut donc passer à la borne inférieure :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \bigl|f'(x)\bigr| \leqslant \inf_{h>0} \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}.$$

Une étude (rapide !) des variations de la fonction

$$\varphi = \left[h \mapsto \frac{2M_0(f)}{h} + \frac{hM_2(f)}{2}\right]$$

montre que

$$\inf_{h>0} \varphi(h) = \varphi\Bigl(\sqrt{\frac{4M_0(f)}{M_2(f)}}\Bigr) = 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Par conséquent, on a bien

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \bigl|f'(x)\bigr| \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

Le majorant est indépendant de la variable x, on peut cette fois passer à la borne supérieure et trouver :

$$M_1(f) \leqslant 2\sqrt{M_0(f)M_2(f)}.$$

4. Il est clair que f_ε est strictement croissante sur $[0, 2]$. Comme

$$f_\varepsilon(2) = 2, \quad f_\varepsilon(0) = 2 - 2^{2+\varepsilon} = 2 - 4.2^\varepsilon < -2$$

et que $f_\varepsilon(x) = 2$ pour tout $x > 2$, on en déduit que

$$M_0(f_\varepsilon) = 4.2^\varepsilon - 2.$$

❧ Pour tout $0 \leqslant x \leqslant 2$, on a

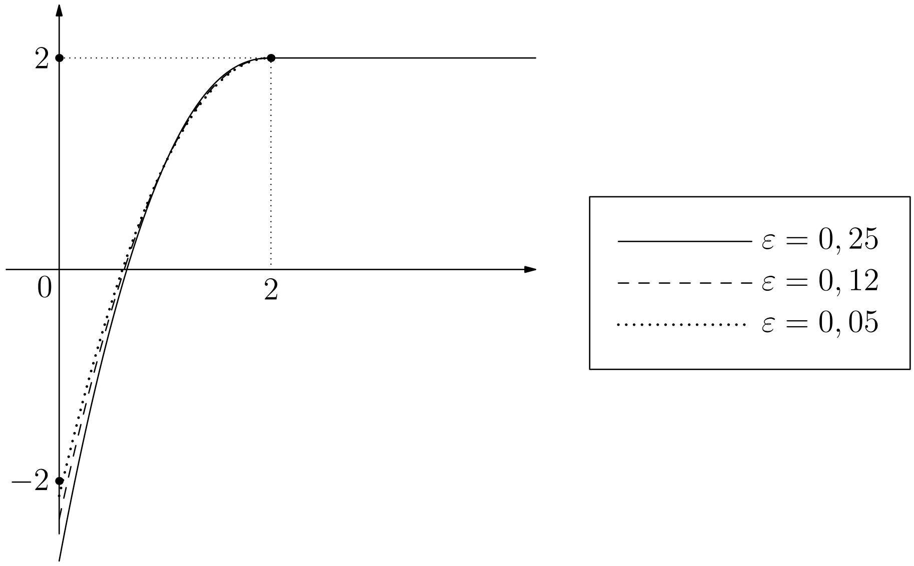
$$f_\varepsilon'(x) = (2+\varepsilon)(2-x)^{1+\varepsilon}.$$

Il est aussi clair que la dérivée f_ε' est décroissante sur $[0, 2]$ (et nulle sur $]2, +\infty[$!) avec

$$f_\varepsilon'(0) = 2^{1+\varepsilon}(2+\varepsilon), \quad f_\varepsilon'(2) = 0.$$

Par conséquent,

$$M_1(f_\varepsilon) = 2.(2+\varepsilon).2^\varepsilon.$$



❧ Enfin, f_ε'' est nulle sur $]2, +\infty[$ et

$$\forall\, x \in [0, 2], \quad f_\varepsilon''(x) = -(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)(2-x)^\varepsilon.$$

La dérivée seconde est donc négative et croissante sur $[0, 2]$:

$$f_\varepsilon''(0) = -(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon, \quad f_\varepsilon''(2) = 0$$

d'où finalement

$$M_2(f_\varepsilon) = (2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon.$$

✍ *Un détail à ne pas perdre de vue : pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction f_ε est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.*
En effet,
— *elle est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 2[$ et sur $]2, +\infty[$;*
— *elle tend vers 2 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est continu) ;*
— *sa dérivée tend vers 0 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est de classe $\mathscr{C}^1$) ;*
— *sa dérivée seconde tend vers 0 à gauche et à droite de $x = 2$ (donc le raccord est de classe $\mathscr{C}^2$).*
En revanche, la fonction f_0 définie par

$$\forall\, x \in [0, 2], \quad f_0(x) = 2 - (2-x)^2 \quad \textit{et} \quad \forall\, x > 2, \quad f_0(x) = 2$$

n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$: sa dérivée seconde est égale à -2 sur $[0, 2[$ et identiquement nulle sur $]2, +\infty[$.
Cette fonction ne peut donc pas servir de contre-exemple alors même que

$$M_1(f_0) = 2\sqrt{M_0(f_0)M_2(f_0)}.$$

5. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\alpha < 2$ tel que

$$\frac{M_1(f)}{\sqrt{M_0(f)M_2(f)}} \leqslant \alpha$$

pour toute fonction f bornée et de dérivée seconde bornée.
En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\frac{M_1(f_\varepsilon)}{\sqrt{M_0(f_\varepsilon)M_2(f_\varepsilon)}} = \frac{2.(2+\varepsilon).2^\varepsilon}{\sqrt{[4.2^\varepsilon - 2][(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)2^\varepsilon]}} \leqslant \alpha.$$

En faisant tendre ε tend vers 0, on obtiendrait alors

$$\frac{2.2.1}{\sqrt{[4-2][2.1.1]}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 \leqslant \alpha$$

(puisque les inégalités larges sont conservées par passage à la limite), ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $\alpha < 2$.
Le facteur 2 est donc optimal (minimal).

Solution 62 **rms134-1663**

1. Il est clair que les deux intégrales sont bien définies (fonctions continues sur un segment).

La fonction f et la fonction polynomiale associée à P_0 sont de classe $\mathscr{C}^2$, ce qui nous permet d'intégrer deux fois par parties après avoir remarqué que $P_0''(t) = 1$ pour tout $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b f(t)P_0''(t)\,dt \\
&= \big[f(t)P_0'(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)P_0'(t)\,dt \\
&= -\int_a^b f'(t)P_0'(t)\,dt && \text{(car } f(a) = f(b) = 0\text{)} \\
&= -\big[f'(t)P_0(t)\big]_a^b + \int_a^b f''(t)P_0(t)\,dt \\
&= \int_a^b f''(t)P_0(t)\,dt && \text{(car } P_0(a) = P_0(b) = 0\text{)}
\end{aligned}$$

2. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, sa dérivée seconde f'' est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée :

$$\forall\, t \in [a, b], \quad \big|f''(t)\big| \leqslant \|f''\|_\infty.$$

On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b f''(t)P_0(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b \big|f''(t)P_0(t)\big|\,dt \leqslant \|f''\|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\,dt.
\end{aligned}$$

✍ *On doit immédiatement se rendre compte que la fonction associée à P_0 est négative sur le segment $[a, b]$ (signe d'un trinôme entre ses racines).*

On effectue ensuite le changement de variable affine usuel pour se ramener à l'intervalle $[0, 1]$ (cf le cours sur les fonctions convexes).

$$t = (1-u)a + ub \qquad dt = (b-a)\,du$$

On obtient ainsi

$$\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\,dt = \frac{(b-a)^3}{2}\int_0^1 u(1-u)\,du = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

✍ *Il est plus efficace de changer de variable avant de développer la fonction intégrande : le facteur $(b-a)^3$ apparaît sous forme factorisée et le calcul de l'intégrale est alors immédiat.*

Complément

On vient d'effectuer le calcul qui donne l'efficacité de la méthode des trapèzes pour approcher une intégrale au moyen d'une somme de Riemann.

❧ Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, alors il existe une fonction affine φ telle que

$$\varphi(a) = f(a) \qquad \text{et} \qquad \varphi(b) = f(b).$$

L'existence (et l'unicité) de φ découle du théorème sur l'interpolation de Lagrange et l'expression de φ présente peu d'intérêt. En effet, comme φ est affine, son intégrale sur le segment $[a, b]$ est l'aire d'un trapèze et donc

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \times (b-a) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a).$$

❧ On peut alors appliquer ce qui précède à la fonction $g = f - \varphi$: il est clair que g est de classe $\mathscr{C}^2$, on a fait ce qu'il fallait pour que $g(a) = g(b) = 0$ et de plus $g'' = f''$ (puisque la fonction φ est affine), si bien qu'on a en fait déjà démontré que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty.$$

Il reste à découper le segment $[a, b]$ au moyen d'une subdivision

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b \quad \text{avec} \quad \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{b-a}{n}.$$

Chaque segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ étant contenu dans le segment $[a, b]$, on a

$$\sup_{t\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}]} \left|f''(t)\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \left|f''(t)\right| = \|f''\|_\infty$$

et le duo habituel (relation de Chasles et inégalité triangulaire) nous donne

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(\alpha_k) + f(\alpha_{k+1})\right]\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha_{k+1}-\alpha_k)^3}{12} \cdot \|f''\|_\infty \\ &\leqslant n \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot \|f''\|_\infty = \frac{K}{n^2}. \end{aligned}$$

❧ L'erreur commise en approchant l'intégrale de f par la méthode des trapèzes avec une subdivision en n sous-intervalles est donc $\mathcal{O}(1/n^2)$, c'est-à-dire un ordre de grandeur plus précise que la méthode des rectangles.
❧ C'est d'autant plus remarquable que les expressions simplifiées des deux méthodes sont très semblables !

$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)$$

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(\alpha_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k) + \frac{f(\alpha_n)}{2}\right]$$

Solution 63 — 07-01

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\mathcal{V}$ qui converge vers x_0. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in I, \qquad f_n(t) = f(u_n, t).$$

D'après les hypothèses du Théorème de continuité,

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I ;
— pour tout $t \in I$, la suite de terme général $f_n(t)$ converge vers $f(x_0, t)$ (puisque f est continue par rapport à la première variable) ;
— pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in I$,

$$\left|f_n(t)\right| = \left|f(u_n, t)\right| \leqslant g(t)$$

où le majorant $g(t)$ est indépendant de $n \in \mathbb{N}$ et intégrable en fonction de t sur l'intervalle I.

❧ On peut donc appliquer le Théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On en déduit que

$$\int_I f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x_0, t)\,dt$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = F(x_0).$$

Comme cela vaut pour *toute* suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{V}$ qui converge vers x_0, cela prouve que F est continue au point x_0 (caractérisation séquentielle de la continuité).
❧ Et comme cela vaut pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, cela prouve que la fonction F est continue sur $\mathcal{V}$ (définition de la continuité sur un intervalle).

Solution 64 — 07-02

1. On pose

$$f(x, t) = \frac{\cos t}{t + x}$$

afin d'étudier la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} f(x, t)\,dt.$$

Définition

Pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle et l'intégrale $F(x)$ est donc bien définie sur $]0, +\infty[$.

Monotonie

Soient $0 < x < y$. Comme $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, le numérateur $\cos t$ est positif, donc

$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad f(y,t) = \frac{\cos t}{t+y} \leqslant \frac{\cos t}{t+x} = f(x,t).$$

En intégrant bornes croissantes, on en déduit que

$$F(y) \leqslant F(x).$$

On a ainsi démontré que la fonction F était décroissante sur $]0, +\infty[$.

✍ *Pour $0 \leqslant t < \pi/2$, le numérateur $\cos t$ est strictement positif, donc*

$$\forall\, 0 < x < y, \quad f(y,t) < f(x,t)$$

et par conséquent $F(y) < F(x)$. La fonction F est donc en fait strictement décroissante.

✍ *On pouvait aussi justifier la monotonie de F en appliquant le Théorème de dérivation sous le signe $\int$, qui prouve que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donne*

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos t}{(t+x)^2}\, dt.$$

Les bornes sont dans l'ordre croissant et la fonction intégrande est négative, donc l'intégrale $F'(x)$ est négative.

Plus précisément, la fonction intégrande est une fonction continue de t et n'est pas identiquement nulle, donc $F'(x) < 0$ (Théorème de l'intégrale nulle).

Continuité

On a déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega =]0, +\infty[$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

était intégrable sur $I =]0, \pi/2]$.

Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est continue sur Ω.

Enfin, la monotonie déjà justifiée précédemment prouve que, pour tout réel $a > 0$,

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V} = [a, +\infty[, \quad \left|f(x,t)\right| = f(x,t) \leqslant f(a,t).$$

Ce majorant est indépendant de x et, en fonction de t, il est intégrable sur I (déjà justifié dans la partie **Définition**). La condition de domination est donc satisfaire sur $\mathcal{V}$.

❧ D'après le Théorème de continuité, la fonction F est continue sur $\mathcal{V}$.

❧ On en déduit que la fonction F est continue sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

✍ *On ne peut pas vérifier la condition de domination sur $\mathcal{V} = \Omega$. En effet, s'il existe une fonction g telle que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \Omega, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant g(t)$$

alors

$$\forall\, t \in I, \quad \frac{\cos t}{t} = \lim_{x \to 0} \left|f(x,t)\right| \leqslant g(t).$$

(Ce passage à la limite cache en fait un passage au sup, puisque $f(x,t)$ est une fonction décroissante de x.)

Mais $\cos t/t$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 (cette expression est équivalente à $1/t$), donc la fonction g n'est pas intégrable non plus au voisinage de 0 (théorème de comparaison).

Bien que la fonction F soit continue sur Ω, on ne peut donc pas appliquer le Théorème de continuité sur Ω : il était vraiment nécessaire de bien choisir les sous-intervalles $\mathcal{V}$.

2. Limite à l'infini

✍ *Lorsque x tend vers $+\infty$, le dénominateur $x+t$ tend vers $+\infty$, donc il est légitime de* ***conjecturer*** *que*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{\pi/2} 0\,dt = 0.$$

Il suffit d'adapter la démonstration précédente : on fait tendre x vers $+\infty$ (au lieu d'étudier la continuité au voisinage de $x = x_0 > 0$), on cherche donc principalement à établir la domination sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $+\infty$.

On a déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

était intégrable sur I (fonction continue sur un segment) ; il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

tend vers la fonction nulle sur I lorsque x tend vers $+\infty$; enfin, l'intervalle

$$\mathcal{V} = [2024, +\infty[$$

est un voisinage de $+\infty$ et

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V},\ \big|f(x,t)\big| \leqslant f(2024, t).$$

Ce majorant est indépendant de x et, on l'a déjà démontré, il est intégrable sur I en fonction de t.

D'après le Théorème de passage à la limite, la fonction F tend vers

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{\pi/2} \lim_{x\to+\infty} f(x,t)\,dt = 0.$$

Limite en 0

✍ *Lorsque x tend vers 0, le dénominateur $x+t$ tend vers t, donc il est légitime de* ***conjecturer*** *que*

$$F(x) \underset{x\to 0}{\approx} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

et comme on reconnaît l'intégrale généralisée d'une fonction positive et non intégrable, on devine alors que $F(x)$ tend vers $+\infty$.

❧ La fonction

$$g = \left[t \mapsto \frac{\cos t}{t}\right]$$

est continue et positive sur $J =]0, \pi/2]$. Par conséquent, la fonction

$$G = \left[x \mapsto \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\,dt\right]$$

est définie et décroissante sur J. En particulier, elle admet une limite (finie ou infinie) au voisinage de 0.

Par définition, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_0^{\pi/2} g(t)\,dt$$

est convergente si, et seulement si, la limite de G en 0 est finie.

D'autre part, comme g est <u>positive</u>, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\pi/2} g(t)\,dt$$

est convergente si, et seulement si, la fonction g est intégrable sur J.

Or la fonction g n'est pas intégrable au voisinage de 0 car

$$g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}.$$

Par conséquent, la fonction G ne tend pas vers une limite finie au voisinage de 0 et comme G est décroissante, elle tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt = +\infty \tag{46}$$

❧ Fixons $0 < a < \pi/2$ et notons $K_a = [a, \pi/2]$.
On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

est intégrable sur K_a. Cette propriété est encore vraie pour $x = 0$, puisque la fonction considérée est continue sur le segment K_a.
On sait aussi que, pour tout $t \in K_a$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et avec la propriété de monotonie déjà exploitée, la propriété de domination est satisfaite :

$$\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, t \in K_a, \quad \left|\frac{\cos t}{x+t}\right| \leqslant \frac{\cos t}{0+t}.$$

(On a remarqué plus haut que le majorant : $f(0,t)$ était une fonction continue sur le segment $K_a = [a, \pi/2]$, c'est donc une fonction intégrable sur K_a.)
Par conséquent, on peut appliquer le Théorème de continuité : la fonction

$$\left[x \mapsto \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, dt\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier

$$\forall\, 0 < a < \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, dt = \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt = G(a). \tag{47}$$

❧ Nous allons maintenant combiner les deux relations (1) et (2).
Soit $A > 0$.
D'après (1), l'expression $G(a)$ tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0, donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_0, \quad G(a) \geqslant A + 1. \tag{48}$$

D'après (2), il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_1, \quad \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, dt \geqslant G(a) - 1. \tag{49}$$

Posons donc $\alpha_2 = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$. Pour $0 < a \leqslant \alpha_2$, les deux relations (3) et (4) sont simultanément vraies, donc

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_2, \quad \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\, dt \geqslant A.$$

Mais puisque l'intégrande est une fonction <u>positive</u>,

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_2, \quad F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt \geqslant \int_a^{\pi/2} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

Bref : on a démontré que, pour tout $A > 0$, il existait un réel $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < a \leqslant \alpha_2, \quad F(x) \geqslant A.$$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = +\infty.$$

3. Équivalent à l'infini

✍ *Lorsque x tend vers $+\infty$, le dénominateur $x+t$ est peu différent de x (puisque t reste compris entre 0 et $\pi/2$). Par conséquent, il est légitime de **conjecturer** que*

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\approx} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x}\, dt = \frac{1}{x}.$$

Soit $x > 0$. Par inégalité triangulaire,

$$\left|F(x) - \frac{1}{x}\right| = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+t}\right) dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{t\cos t}{x(x+t)}\, dt.$$

Comme $x > 0$, le dénominateur est une fonction croissante de t. D'autre part, le numérateur est positif. Par conséquent,

$$\forall\, t \in [0, \pi/2],\ \forall\, x > 0, \qquad \frac{t\cos t}{x(x+t)} \leqslant \frac{t\cos t}{x(x+0)}.$$

Le majorant est en fait une fonction de t continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc c'est une fonction intégrable et on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \qquad \left|F(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{K}{x^2} \quad \text{où} \quad K = \int_0^{\pi/2} t\cos t\, dt.$$

On en déduit que

$$F(x) - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et en particulier

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Équivalent en 0

✍ *Je ne sais que dire : ce dernier calcul repose sur une astuce de vieux singe (ceux à qui on n'apprend pas à faire des grimaces).*

❧ Pour $t \in [0, \pi/2]$ et $x > 0$, on pose maintenant

$$g(x,t) = \frac{\cos t - 1}{t + x}.$$

Il est clair que, pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto g(x,t)]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale

$$G(x) = \int_0^{\pi/2} g(x,t)\, dt$$

est bien définie pour tout $x > 0$.

❧ Pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t - 1}{t+x} + \frac{1}{t+x}\, dt$$
$$= G(x) + \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \ln x.$$

On vient de décomposer $F(x)$ en somme de trois termes :
- — le dernier terme est celui que l'on cherche, c'est un infiniment grand (positif) ;
- — le second terme tend vers une limite finie lorsque x tend vers 0, c'est une quantité bornée, c'est-à-dire $\mathcal{O}(1)$;
- — il reste à étudier de près le premier terme et nous allons montrer que $G(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers 0.

En anticipant sur ce qui suit, on a donc démontré que

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} -\ln x + \mathcal{O}(1) = -\ln x + o(\ln x) \tag{50}$$

et donc que

$$F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x.$$

❧ D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on sait que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\cos t - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}.$$

✍ *Si φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\forall\, t \in [-a, a], \quad \big|\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0)\big| \leqslant \frac{t^2}{2}\|\varphi''\|_\infty$$

où $\|\varphi''\|_\infty = \max_{u\in[-a,a]} |\varphi''(u)|$.

Avec $\varphi = \cos$, *on a* $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ *et comme* $\varphi'' = -\cos$, *on a* $\|\varphi''\|_\infty \leqslant 1$, *quel que soit* $a > 0$.

❧ Pour tout $t \in I =]0, \pi/2]$,

$$\lim_{x\to 0} g(x,t) = \frac{\cos t - 1}{t} = \psi(t).$$

Il est clair que la fonction ψ est continue sur I et l'inégalité de Taylor-Lagrange nous montre que ψ tend vers 0 au voisinage de 0. Par conséquent, cette fonction ψ est intégrable sur I.

Enfin, quels que soient $x > 0$ et $t \in I$, d'après Taylor-Lagrange,

$$\big|g(x,t)\big| \leqslant \frac{t^2/2}{t+x} \leqslant \frac{t^2}{2t+0} = \frac{t}{2}.$$

Ce majorant est indépendant de x et évidemment intégrable sur $I =]0, \pi/2]$, donc la condition de domination est satisfaite.

Par conséquent,

$$G(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t - 1}{t}\, dt$$

et en particulier la fonction G est bornée au voisinage de 0. La propriété (5) est ainsi démontrée.

Solution 65 07-03

On considère ici $\Omega = \mathbb{R}$, $I =]-\infty, +\infty[$ et

$$\forall\, (x,t) \in \Omega \times I, \qquad f(x,t) = \exp\big[-(t+ix)^2\big].$$

❧ **Régularité.** Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω (même de classe $\mathscr{C}^\infty$!) et

$$\forall\, (x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2i(t+ix)\exp\big[-(t+ix)^2\big].$$

❧ **Intégrabilité.** Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$[t \mapsto f(x,t)] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

sont continues sur l'intervalle I. De plus,

$$\big|f(x,t)\big| = e^{x^2}.|e^{2itx}|.e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-t^2})$$

donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est bien intégrable sur I. De même,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(|t|.e^{-t^2}) \underset{t\to\pm\infty}{=} o(e^{-|t|})$$

donc $[t \mapsto \partial f/\partial x(x,t)]$ est aussi intégrable sur I.

❧ **Domination.** Pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in [-A,A],\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \\ &\big|f(x,t)\big| = e^{x^2}.e^{-t^2} \leqslant e^{A^2}.e^{-t^2} \\ &\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2\sqrt{t^2+x^2}\, e^{x^2}.e^{-t^2} \leqslant 2\sqrt{t^2+A^2}\, e^{A^2}.e^{-t^2}. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

On a trouvé des majorants indépendants de x et on a déjà démontré que ces majorants étaient, *en tant que fonction de* $t \in I$, des fonctions intégrables sur I.

D'après le Théorème de Leibniz **[23]**, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\bigcup_{A>0} [-A, A] =]-\infty, +\infty[$$

et

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -2i(t+ix)\exp\big[-(t+ix)^2\big]\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dt \\
&= \lim_{\substack{t_1 \to +\infty \\ t_0 \to -\infty}} \big[f(x,t)\big]_{t=t_0}^{t=t_1} = 0 && \text{(d'après } (\star))
\end{aligned}$$

► Puisque la dérivée de F est identiquement nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction F est constante et par conséquent **[35.3]**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = F(0) = \sqrt{\pi}$$

d'où finalement

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot e^{-2itx}\, dt = \sqrt{\pi} \cdot e^{-x^2}.$$

Solution 66 **07-04**

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on pose

$$f(x,t) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}.$$

❧ Pour $x > 0$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur $I =]0, +\infty[$; elle tend vers 1 lorsque t tend vers 0 (forme indéterminée bien connue) et est $\mathcal{O}(e^{-xt})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $x > 0$, la fonction

$$\big[t \mapsto e^{-xt}\big]$$

est intégrable sur I. Par conséquent, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I.

La fonction F est définie au moins sur $\Omega =]0, +\infty[$.

REMARQUE.— On *doit savoir* que la fonction $[t \mapsto f(0,t)]$ n'est pas intégrable sur I, bien que l'intégrale généralisée $F(0)$ soit convergente. Par ailleurs, on peut démontrer (mais ce n'est pas immédiat) que l'intégrale généralisée $F(x)$ est divergente pour tout $x < 0$.

❧ Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt} \sin t.$$

Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}\sin t]$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{O}(e^{-xt})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $x > 0$, la fonction

$$\big[t \mapsto -e^{-xt}\sin t\big]$$

est donc intégrable sur I.

Enfin, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, x \in [a, +\infty[\,,\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que fonction de t (puisque $a > 0$).

Donc, pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall\, x > a, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

et par conséquent la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega =]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t\, dt.$$

❧ Pour tout $x > 0$,
$$F'(x) = \mathfrak{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x+i)t}\,dt\right) = \mathfrak{Im}\left(\frac{1}{x+i}\right) = \frac{-1}{1+x^2}.$$
Comme Ω est un intervalle, on en déduit qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = K - \operatorname{Arctan} x.$$

Les variations de la fonction *sinus cardinal* étant bien connues, on sait que
$$\forall\, x \geqslant 1,\ \forall\, t \in I, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant e^{-t}.$$
Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que fonction de t. La condition de domination étant satisfaite pour $x \in [1, +\infty[$ (qui est un voisinage de $+\infty$), on en déduit que
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f(x,t)\,dt = 0.$$
Comme $\operatorname{Arctan} x$ tend vers $\pi/2$ lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit que $K = \pi/2$ et donc que
$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}.$$
REMARQUE.— On déduit de ce qui précède que
$$\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et que} \quad F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Solution 67 **07-05**

L'intervalle d'intégration est $I =]0, +\infty[$ et l'intervalle d'étude de F est $]-\infty, +\infty[$. Par imparité de Arctan, il est clair que $F(0) = 0$ et que F est une fonction impaire. Il suffit donc d'étudier F sur le sous-intervalle $\Omega = [0, +\infty[$.

On considère donc la fonction f, définie sur $\Omega \times I$ par
$$\forall\, (x,t) \in \Omega \times I, \quad f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}.$$

❧ Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I. De plus, pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$,
$$\lim_{t\to 0} f(x,t) = \frac{x}{1+t^2} \quad \text{et} \quad f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^3},$$
donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I et l'intégrale généralisée $F(x)$ est convergente.

❧ Comme Arctan est croissante sur Ω et que $xt \in \Omega$ pour tout $t \in I$ et tout $x \in \Omega$,
$$\forall\, t \in I,\ \forall\, 0 \leqslant x < y, \quad f(x,t) \leqslant f(y,t).$$
L'intégration conserve les inégalités, donc
$$\forall\, 0 \leqslant x < y, \qquad F(x) \leqslant F(y)$$
et la fonction F est croissante sur Ω.

❧ On démontrerait de manière analogue que F est concave sur Ω (en se fondant sur la concavité de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}_+$).

❧ D'après l'Inégalité des accroissements finis, la fonction Arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,
$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x, y \in \Omega, \qquad |\operatorname{Arctan}(xt) - \operatorname{Arctan}(yt)| \leqslant |xt - yt| = t|x-y|.$$
D'après l'inégalité triangulaire intégrale,
$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad \left|F(x) - F(y)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(x,t) - f(y,t)\right|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \times |x-y| = \frac{\pi}{2}|x-y|$$
et F est donc $\pi/2$-lipschitzienne sur Ω.

❧ Comme F est croissante sur Ω, elle tend vers une limite (finie ou infinie) au voisinage de $+\infty$.

✍ *Pour deviner le résultat, on peut conjecturer que*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f(x,t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

Cette intégrale est divergente (la fonction intégrande n'est pas intégrable au voisinage de 0), donc on devine que F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

*Problème : **aucun** théorème du cours ne permet de justifier qu'une intégrale tend vers une limite infinie...*

Nous allons démontrer que F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

Pour cela, nous fixons un seuil $A > 0$ arbitrairement grand.

⋆ La fonction g définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \qquad g(t) = \frac{1}{t(t^2+1)}$$

est continue et POSITIVE sur I. Comme elle est intégrable au voisinage de $+\infty$, elle est intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon, +\infty[$, mais comme elle n'est pas intégrable au voisinage de 0,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty.$$

Il existe donc un réel $\varepsilon_0 > 0$ assez petit pour que

$$\int_\varepsilon^{+\infty} g(t)\,dt \geqslant A+1.$$

⋆ Considérons l'intervalle $I_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$. On sait que la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I, donc elle est aussi intégrable sur I_ε.

Comme $t \geqslant \varepsilon > 0$ pour tout $t \in I_\varepsilon$, il est clair que

$$\forall\, t \in I_\varepsilon, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x,t) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{\pi}{2}\cdot g(t)$$

et on a déjà remarqué que la fonction g était intégrable sur I_ε.

Par croissance de la fonction Arctan, on a aussi

$$\forall\, t \in I_\varepsilon,\ \forall\, x > 0, \qquad \left|f(x,t)\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot g(t).$$

Le majorant est indépendant du paramètre x et intégrable sur l'intervalle I_ε et le quantificateur $\forall\, x > 0$ nous dit que x varie ici dans un voisinage de $+\infty$.

D'après le Théorème de convergence dominée (un de ses nombreux corollaires, en fait),

$$\lim_{x\to+\infty} \int_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_\varepsilon^{+\infty} g(t)\,dt \geqslant A+1.$$

Comme la limite est strictement supérieure à A, on en déduit qu'il existe un réel x_0 tel que

$$\forall\, x \geqslant x_0, \qquad \int_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt \geqslant A.$$

⋆ Comme la fonction $f(x,t) \geqslant 0$, il est clair que

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt \geqslant \int_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt.$$

En particulier,

$$\forall\, x \geqslant x_0, \qquad F(x) \geqslant \int_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)\,dt \geqslant A.$$

En résumé, nous avons démontré que : pour tout seuil $A > 0$, il existe un réel x_0 tel que, pour tout $x \geqslant x_0$, on ait $F(x) \geqslant A$. Autrement dit : la fonction F tend vers $+\infty$.

✍ *Il se trouve qu'on peut calculer explicitement $F(x)$ — même si on est absolument incapable de calculer des primitives de $[t \mapsto f(x,t)]$! C'est ce que nous allons faire maintenant, en appliquant le Théorème de Leibniz (dérivation sous le signe $\int$).*

❧ On sait que, pour tout $x \in \Omega = [0, +\infty[$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $I =]0, +\infty[$.
Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Il est alors évident que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I : elle est continue sur I, elle tend vers une limite finie au voisinage de $t = 0$ et elle est $\mathcal{O}(1/t^4)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Par décroissance en fonction de $x \in \Omega$, la domination est satisfaite :

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in I, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{(1+0)(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2}.$$

(Le majorant est indépendant du paramètre x et intégrable sur I.)

On en déduit que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

mais aussi dérivable à droite en $x = 0$ avec

$$F'_d(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

✍ *On a appliqué le Théorème de dérivation sur l'intervalle fermé $\Omega = [0, +\infty[$, mais la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur Ω), donc on n'a pas étudié la dérivabilité de F en 0, mais seulement la dérivabilité à droite en 0.*

❧ On sait que F est une fonction impaire et l'expression

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est clairement une fonction paire de x. Par symétrie, on a donc en fait démontré que F était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

❧ Pour $x \in \Omega \setminus \{1\}$, on peut décomposer facilement en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right).$$

✍ *Pour $x = 1$, la fonction intégrande est déjà un élément simple. Voir plus bas pour le calcul des primitives dans ce cas.*

On en déduit alors que, pour $x \in \Omega \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{x^2-1}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{(\frac{1}{x})^2+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\,dt && \text{(définition des intégrales convergentes)}\\
&= \frac{1}{x^2-1}\lim_{A\to+\infty}\Big[x\operatorname{Arctan}(xt) - \operatorname{Arctan} t\Big]_0^A && \text{(Théorème fondamental)}\\
&= \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2(1+x)}.
\end{aligned}$$

On a démontré que F était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, il est clair que $\frac{\pi}{2(1+x)}$ est l'expression d'une fonction continue sur Ω. Par conséquent, l'égalité qui a été démontrée pour $x \in \Omega \setminus \{1\}$ est en fait vraie pour $x = 1$ aussi.

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}.$$

✍ *Comme F est impaire et dérivable, sa dérivée est paire et donc*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}.$$

✍ *Si on n'aime pas les raisonnements par densité, il faut aimer les intégrations par parties ! En effet, on peut calculer $F'(1)$ de la manière suivante (qui ne s'invente pas, il faut retenir la méthode).*

Comme

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{1+t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{1+t^2} = 0,$$

la formule d'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} &= (0-0) - \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - 2F'(1) \qquad \text{(astuce taupinale)}\end{aligned}$$

et on retrouve bien $F'(1) = \pi/4$.

La connaissane d'une expression simple pour $F'(x)$ nous confirme que F est $\pi/2$-lipschitzienne (en précisant que $\pi/2$ est la constante de Lipschitz optimale, puisque c'est le maximum de la dérivée) et nous donne une expression explicite de $F(x)$:

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad F(x) = \frac{\pi}{2}\,\ell n(1+x)$$

(par calcul de primitive) et

$$\forall\, x \leqslant 0, \qquad F(x) = -\frac{\pi}{2}\,\ell n(1-x)$$

(par symétrie : $F(x) = -F(-x)$ par imparité).

✍ *Cette expression nous confirme que F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.*

Solution 68 **07-06**

1. On considère ici $\Omega = \mathbb{R}$, $I = [0, +\infty[$ et

$$\forall\, (x,t) \in \Omega \times I, \qquad f(x,t) = \frac{\ell n(1+x^2t^2)}{1+t^2}.$$

❧ **Régularité.** Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω (même de classe $\mathscr{C}^\infty$!) et

$$\forall\, (x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

❧ **Intégrabilité.** Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$[t \mapsto f(x,t)] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

sont continues sur l'intervalle I. De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$\bigl|f(x,t)\bigr| = \frac{\ell n(t^2) + \ell n(x^2 + \frac{1}{t^2})}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2\,\ell n\, t}{t^2} = o\Big(\frac{1}{t\sqrt{t}}\Big)$$

donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est bien intégrable sur I. De même,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \underset{t\to\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$$

donc $[t \mapsto \partial f/\partial x(x,t)]$ est aussi intégrable sur I.

D'autre part, il est clair que $[t \mapsto f(0,t)]$ et $[t \mapsto \partial f/\partial x(0,t)]$ sont intégrables sur I (identiquement nulles !).

❧ **Domination.** Pour tout $A > 0$,

$$\forall\, x \in [-A, A],\ \forall\, t \in I, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant \big|f(A,t)\big|$$

(on reconnaît une fonction croissante de x), donc la fonction F est continue sur chaque segment $[-A, A]$ et donc sur

$$\mathbb{R} = \bigcup_{A>0} [-A, A].$$

2. Quels que soient $0 < A < B$,

$$\forall\, x \in [A, B],\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2Bt^2}{(1+t^2)(1+A^2t^2)}$$

(comme d'habitude, on majore le numérateur et on minore le dénominateur) et il est clair que le majorant, indépendant de x, est intégrable sur I. La fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{0<A<B} [A, B]$$

et

$$\forall\, x > 0, \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt.$$

Par symétrie (puisque la fonction F est évidemment paire), la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

❧ **Calcul de $F'(x)$.**

Pour $x > 0$ différent de 1, on décompose en éléments simples pour calculer l'intégrale qui exprime $F'(x)$.

Comme

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2}\right),$$

on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{1+x}.$$

Or F' est continue sur $]0, +\infty[$, de même que $\left[x \mapsto \frac{\pi}{1+x}\right]$, et ces deux fonctions sont égales sur $]0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$, donc ces deux fonctions sont égales sur $]0, +\infty[$. On a donc

$$\forall\, x > 0, \qquad F'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$

3. ❧ **Calcul de $F(x)$.** Il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) = \pi\,\ell n(1+x) + K.$$

Or F est continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$F(0) = 0 = \lim_{x\to 0} F(x) = K$$

et

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad F(x) = \pi\,\ell n(1+x).$$

Par parité,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \pi\,\ell n(1+|x|).$$

En particulier, $F(x) \sim \pi|x|$ au voisinage de $x = 0$: le graphe de F présente donc deux demi-tangentes obliques à l'origine ($y = \pm\pi x$), ce qui prouve que F n'est pas dérivable en $x = 0$.

Solution 69 **07-07**

On pose ici $\Omega = [0, 1]$ (défini par l'énoncé !) et $I =]0, \pi]$ (ouvert en 0 pour des raisons qu'on verra en temps voulu). On considère la fonction f définie par

$$f(x, t) = \frac{t \sin t}{1 - x \cos t}.$$

❧ Pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto f(x, t)]$$

est continue sur l'intervalle semi-ouvert I et même sur le segment $[0, \pi]$ pour $x > 0$. Pour $x = 1$, $f(1, 0)$ n'est pas défini (division par zéro !) mais lorsque t tend vers 0,

$$f(1, t) = \frac{t \sin t}{1 - \cos t} \sim \frac{t^2}{t^2/2} \xrightarrow[t \to 0]{} 2.$$

Puisque la fonction $[t \mapsto f(1, t)]$ tend vers une limite finie au voisinage de 0, elle est intégrable au voisinage de 0 et donc sur I.

La fonction F est donc définie sur le segment Ω.

❧ Pour tout $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x, t)]$$

est continue sur Ω. (Comme l'intervalle I est ouvert en 0, le $\cos t$ est toujours strictement inférieur à 1 et le dénominateur ne s'annule jamais.)

❧ Pour justifier la continuité de F, il reste à établir la propriété de domination et pour majorer $|f(x, t)|$, on va étudier précisément le sens de variation en fonction de x.

▶ Pour $t \in]0, \pi/2]$, on a $\cos t \geqslant 0$, donc la fonction

$$[x \mapsto f(x, t)]$$

est croissante et donc

$$\forall\, 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2},\ \forall\, x \in [0, 1], \quad 0 \leqslant f(x, t) \leqslant f(1, t).$$

▶ Pour $t \in]\pi/2, \pi]$, on a $\cos t \leqslant 0$, donc la fonction

$$[x \mapsto f(x, t)]$$

est décroissante et donc

$$\forall\, \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi,\ \forall\, x \in [0, 1], \quad 0 \leqslant f(x, t) \leqslant f(0, t).$$

▶ Comme $f(x, t) \geqslant 0$ quels que soient x et t, on déduit des deux encadrements précédents que

$$\forall\, 0 < t \leqslant \pi,\ \forall\, x \in [0, 1], \quad 0 \leqslant f(x, t) \leqslant f(0, t) + f(1, t).$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que somme de deux fonctions intégrables sur I : la propriété de domination est ainsi établie.

Par conséquent, la fonction F est bien continue sur le segment $\Omega = [0, 1]$.

Solution 70 **07-08**

L'énoncé impose de prendre $\Omega =]0, +\infty[$. Les bornes de l'intégrale sont 0 et $+\infty$ et, comme nous le verrons, rien ne s'oppose à ce que nous choisissions $I = [0, +\infty[$.

On considère alors

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in I, \quad f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1 + t^2}.$$

▶ Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$ (alias *Théorème de Leibniz*) en vérifiant les trois conditions d'application.

❧ **Régularité.** Pour tout $t \in I$ fixé, la fonction

$$\left[x \mapsto f(x, t) = Ae^{-Bt}\right]$$

est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, (x, t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = A.(-B)^n.e^{-Bt}.$$

❧ **Intégrabilité.** Pour tout $x \in \Omega$ fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}\right]$$

est continue sur I.

✍ *Par convention, la dérivée partielle $\partial^0 f/\partial x^0$ est en fait la fonction f elle-même.*

De plus, lorsque t tend vers $+\infty$, comme $x > 0$,

$$\frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt} = \frac{(-t)^n e^{-xt/2}}{1+t^2} \cdot e^{-xt/2} = o(e^{-xt/2})$$

donc les fonctions

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right]$$

sont bien toutes intégrables sur I.

✍ *Il s'agit ici de prouver qu'un produit est intégrable. La première écriture ne permet pas de conclure, puisqu'elle fait apparaître le produit d'une fonction intégrable (e^{-xt}) par une fonction qui n'est pas bornée. Une astuce classique sur l'exponentielle nous permet de réécrire cette expression comme le produit d'une fonction intégrable ($e^{-xt/2}$) par une fonction bornée (car de limite nulle) : on sait qu'un tel produit est intégrable.*

❧ **Domination.** Soient $a > 0$ et $\mathcal{V} = [a, +\infty[$. Comme les expressions

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| = \frac{t^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}$$

sont visiblement des fonctions *décroissantes* de x, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\,(x,t) \in \mathcal{V} \times I, \qquad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,t)\right|.$$

Le majorant est visiblement indépendant de $x \in \mathcal{V}$. D'autre part, on a déjà démontré que ce majorant était intégrable sur I.

✍ *On rappelle la méthode pour établir la propriété de domination.*
— *On cherche d'abord un majorant indépendant du paramètre x. Pour cela, il est intéressant de connaître le sens de variation des expressions concernées en fonction de la variable x (s'il s'agit, comme ici, de fonctions monotones de x, alors il est facile de trouver un majorant. Ce majorant sera même le meilleur possible : ce sera la borne supérieure !*
— *On cherche ensuite à vérifier si le majorant trouvé est bien intégrable sur I. S'il arrivait que ce ne soit pas le cas, il suffirait probablement de mieux choisir le sous-intervalle $\mathcal{V}$.*

► D'après le Théorème de dérivation sous le signe $\int$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, +\infty[, \quad F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}\, dt.$$

Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$\Omega = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0, \quad F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-t)^n}{1+t^2} \cdot e^{-xt}\, dt.$$

Solution 71 **07-09**

1. La fonction $\psi = [t \mapsto e^{-t}/t]$ est continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

✍ *Par conséquent, d'après le cours, la fonction ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.*

❧ Lorsque t tend vers 0, il est clair que $\psi(t) \sim 1/\sqrt{t}$ et (critère de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$) la fonction $[t \mapsto 1/\sqrt{t}]$ est intégrable au voisinage de 0. Donc la fonction ψ est intégrable au voisinage de 0.
❧ Lorsque t tend vers $+\infty$, il est clair que $\psi(t) = o(e^{-t})$ et la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de référence). Donc la fonction ψ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
❧ Ainsi, la fonction ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et, en particulier, l'intégrale généralisée I est convergente.

✍ *Il s'agit d'une question de cours, puisque $I = \Gamma(1/2)$.*

2. a. Pour tout $x \in \Omega = \mathbb{R}_+$ et tout $t \in J =]0, +\infty[$, on pose

$$f(x, t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)}.$$

Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert J. De plus,

$$f(x, t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}} \qquad \text{et} \qquad f(x, t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^{3/2}}\Big).$$

Or (critère de Riemann) la fonction $\big[t \mapsto 1/t^{1/2}\big]$ est intégrable au voisinage de 0 (puisque $1/2 < 1$) et la fonction $\big[t \mapsto 1/t^{3/2}\big]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (puisque $3/2 > 1$), donc la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur J et par conséquent l'intégrale généralisée $F(x)$ est convergente.
2. b. Nous allons appliquer le Théorème de continuité.
❧ **Intégrabilité**
On a démontré que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur J.
❧ **Régularité**
Il est clair que, pour tout $t \in J$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est continue sur Ω (de la forme Ae^{-Bx}).
❧ **Domination**
L'expression $f(x, t)$ est positive et décroît en tant que fonction de x. Par conséquent,

$$\forall\, t \in J,\ \forall\, x \in \Omega, \qquad \big|f(x, t)\big| \leqslant f(0, t).$$

On a ici un majorant indépendant de $x \in \Omega$ et on a déjà démontré que ce majorant était intégrable sur J.
❧ Par conséquent, la fonction F est continue sur Ω.
2. c. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sur le sous-intervalle $\Omega_a = [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, ce qui permettra de conclure sur $\Omega^* =]0, +\infty[$.
❧ **Intégrabilité**
On a déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega^*$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ était intégrable sur J.
❧ **Régularité**
Il est clair que, pour tout $t \in J$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω^* et

$$\forall\, (x, t) \in \Omega^* \times J, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{(1+t)}.$$

❧ **Intégrabilité (bis)**
Il est clair que, pour tout $x \in \Omega^*$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{(1+t)}\right]$$

est continue sur l'intervalle <u>fermé</u> $J_0 = [0, +\infty[$. Par ailleurs, pour tout $x \in \Omega^*$,

$$\frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{(1+t)} = \frac{\sqrt{t}}{1+t} \cdot e^{-xt} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-xt})$$

et comme $x > 0$, on sait que $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, pour tout $x \in \Omega^*$, la fonction considérée est intégrable sur l'intervalle J_0 et a fortiori, la fonction $[t \mapsto \partial f/\partial x(x, t)]$ est intégrable sur le sous-intervalle J.

❧ **Domination**
Pour $a > 0$, il est clair que

$$\forall\, t \in J,\ \forall\, x \in \Omega_a, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\right|$$

(par monotonie en fonction de x). On a un majorant indépendant de $x \in \Omega_a$ et ce majorant est intégrable (déjà vérifié !).
❧ Par conséquent, on peut appliquer le Théorème de dérivation sur le sous-intervalle Ω_a pour tout $a > 0$. On en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}e^{-tx}}{1+t}\,dt$$

sur l'intervalle

$$\Omega^* = \bigcup_{a>0} \Omega_a.$$

❧ Pour tout $x > 0$, on a donc

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,e^{-tx}}{t(1+t)}\,dt \quad\text{et}\quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{t}\,e^{-tx}}{(1+t)}\,dt.$$

✍ *C'est le moment de penser "décomposition en éléments simples" !*

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

On en déduit que

$$F(x) = F'(x) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt$$

et le changement de variable affine $u = xt$ nous donne alors

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) - F'(x) = \frac{I}{\sqrt{x}}. \tag{E}$$

2. d. On calcule $F(0)$ avec le changement de variable usuel $t = x^2$.

$$F(0) = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

❧ On détermine la limite de F au voisinage de $+\infty$ par convergence dominée.
Avec les notations précédentes, on sait déjà que :
⋆ pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur J ;
⋆ l'expression $|f(x,t)|$ est dominée pour $x \in \Omega$ et $t \in J$, où Ω est un voisinage de $+\infty$;
et il est par ailleurs clair que
⋆ pour tout $t \in J$, l'expression $f(x,t)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Par conséquent, la fonction F tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0.$$

3. On a démontré que F était une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad y'(x) - y(x) = \frac{-I}{\sqrt{x}}.$$

On sait résoudre cette équation différentielle : il existe donc une constante K telle que

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) = \left(K - I\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\right)e^x.$$

✍ *La solution générale de l'équation homogène est de la forme Ke^x. On obtient une solution particulière de l'équation complète en faisant varier la constante, c'est-à-dire en cherchant une solution de la forme $K(x)e^x$ en supposant que K est de classe $\mathscr{C}^1$. On conclut par superposition.*

❧ On a calculé $F(0)$ et démontré que la fonction F était continue sur $[0, +\infty[$, donc

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = \pi.$$

On a également démontré (dès la première question) que la fonction ψ était intégrable au voisinage de 0. Par conséquent (reste d'une intégrale convergente),

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = 0.$$

On déduit alors de l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ que

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = K = \pi.$$

❧ On a en fait démontré que la fonction ψ était intégrable sur $]0, +\infty[$. On déduit alors de la relation de Chasles que

$$\int_0^x \psi(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \psi(t)\, dt - \int_x^{+\infty} \psi(t)\, dt = I - \int_x^{+\infty} \psi(t)\, dt$$

et donc que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \left(K - I^2 + \int_x^{+\infty} \psi(t)\, dt\right)e^x = (K - I^2)e^x + e^x \int_x^{+\infty} \psi(t)\, dt.$$

❧ On sait que ψ est continue sur l'intervalle J et il est clair que $\psi(t) = o(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Or la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$, donc

$$\int_x^{+\infty} \psi(t)\, dt \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt\right)$$

(intégration des relations de comparaison, cas intégrable).

On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \int_x^{+\infty} \psi(t)\, dt = 0$$

et comme on sait que $F(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} (K - I^2)e^x = 0.$$

Il n'y a qu'une seule possibilité : $I^2 = K$ et donc

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{K} = \sqrt{\pi}.$$

✍ *On a démontré que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ en cours, d'une manière assez similaire.*

Solution 72 07-10

1. On commence par justifier que $F_\alpha(x)$ est bien définie sur Ω et on étudiera la continuité de F_α ensuite.

❧ On pose $I = [1, +\infty[$ et

$$\forall\, (x, t) \in \Omega \times I, \quad f(x, t) = \frac{x}{t^\alpha(1 + tx^2)}.$$

Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert I.

De plus, pour tout $x \in \Omega$,

$$f(x, t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{xt^{1+\alpha}}.$$

Comme $\alpha > 0$, on a bien $1 + \alpha > 1$, ce qui prouve que $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison avec une fonction de Riemann). Par conséquent, $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur I, quel que soit $x \in \Omega$.

La fonction F_α est bien définie sur Ω.

❧ Nous allons maintenant appliquer le Théorème de continuité.

Nous venons de vérifier que $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$.

Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est continue sur Ω.

✍ *Comme $t > 0$, en tant que fonction de x, il s'agit d'une fonction rationnelle qui n'a pas de pôle réel.*

Soient $0 < a < b$ et $V_{a,b} = [a, b]$. Il est clair que

$$\forall\, x \in V_{a,b},\ \forall\, t \in I, \qquad \left|f(x,t)\right| \leqslant \frac{b}{t^\alpha(1+a^2t)}.$$

✍ *En substituant le segment $V_{a,b}$ à l'intervalle ouvert Ω, on peut très facilement majorer le numérateur et minorer le dénominateur (qui sont tous les deux des fonctions décroissantes de x).*

On obtient ainsi un majorant indépendant de $x \in V_{a,b}$ et, en tant que fonction de $t \in I$, ce majorant est intégrable sur I (pour les mêmes raisons que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I).

Comme $\Omega = \cup_{0<a<b} V_{a,b}$, chaque point $x_0 \in \Omega$ admet un voisinage de la forme $V_{a,b}$, donc la fonction F_α est continue en chaque point $x_0 \in \Omega$ et par conséquent elle est continue sur Ω.

2. ✍ *Le Théorème de convergence dominée nous permet de calculer la limite d'une intégrale lorsque le paramètre x tend vers $+\infty$.*

Pour obtenir un équivalent comme ici, il faut interpréter l'équivalent comme une limite — autrement dit, revenir à la définition de l'équivalent !

Pour étudier la limite de $xF_\alpha(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on considère la fonction g définie par

$$\forall\, (x,t) \in \Omega \times I, \qquad g(x,t) = \frac{x^2}{1+tx^2} \cdot \frac{1}{t^\alpha} = xf(x,t).$$

❧ **Intégrabilité**

Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I, donc la fonction $[t \mapsto g(x,t) = xf(x,t)]$ est intégrable sur I.

❧ **Limite pour** $x \to +\infty$

Pour tout $t \in I$, il est clair que $g(x,t)$ tend vers $\varphi(t) = 1/t^{1+\alpha}$ lorsque x tend vers $+\infty$. La fonction φ ainsi définie est évidemment intégrable sur $I = [1, +\infty[$ (puisque $1 + \alpha > 1$).

❧ **Domination**

Pour tout $t \in I$ et tout $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant g(x,t) \leqslant \frac{x^2}{0+tx^2} \cdot \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{1+\alpha}} = \varphi(t).$$

✍ *Une fois de plus, on a majoré un quotient en majorant le numérateur et en minorant le dénominateur.* On a ainsi obtenu un majorant indépendant de $x \in [1, +\infty[$ et intégrable sur I en fonction de t. Autrement dit, on a établi la domination sur l'intervalle $[1, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$.

D'après l'extension du Théorème de continuité, le produit

$$xF_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} g(x,t)\,dt$$

tend vers

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}.$$

Autrement dit,

$$F_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha x}.$$

3. ✍ *Autant on pouvait deviner l'équivalent précédent en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'intégrale :*

$$\forall\, t \in I, \qquad \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{t^\alpha \cdot tx^2} = \frac{1}{x \cdot t^{1+\alpha}},$$

autant la situation est embrouillée lorsque x tend vers 0 : le numérateur est infiniment petit et le dénominateur évoque une fonction non intégrable et donc une intégrale infiniment grande...

❧ **Cas** $\alpha = 1/2$

Pour $\alpha = 1/2$, un changement de variable classique apparaît :

$$F_{1/2}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x\,dt}{\sqrt{t}(1+x^2t)} = 2\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

Pour aller directement au résultat, on pose en fait $u = x\sqrt{t}$, ce qui nous donne

$$du = x \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}}, \qquad \text{d'où} \qquad F_{1/2}(x) = 2\int_x^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\Big).$$

Par conséquent, $F_{1/2}(x)$ tend vers π lorsque x tend vers 0.

❧ **Cas** $0 < \alpha < 1/2$

On commence par changer de variable pour y voir plus clair : avec $u = xt$ et donc $du = x\,dt$, on obtient

$$F_\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{du}{(u/x)^\alpha(1+xu)} = x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha(1+xu)}.$$

✍ *Je peux seulement justifier la suite du calcul en indiquant : j'ai tenté, ça a marché...*

❧ *J'ai conjecturé (selon l'énoncé) que $F_\alpha(x)$ tendait vers $+\infty$, ce qui demandait de minorer $F_\alpha(x)$. Rien de plus facile que de minorer l'intégrale d'une fonction positive : il suffit de réduire l'intervalle d'intégration !*

❧ *Pour minorer un quotient (de réels strictement positifs...), on minore le numérateur et on majore le dénominateur.*

Nous allons faire tendre x vers 0, donc nous pouvons supposer que $0 < x < 1$.
Comme $F_\alpha(x)$ est l'intégrale d'une fonction *positive*,

$$F_\alpha(x) \geqslant x^\alpha \int_x^{1/x} \frac{du}{u^\alpha(1+xu)}.$$

Avec $0 < x < 1$, on intègre avec $x \leqslant u \leqslant 1/x$, donc $0 < 1 + x^2 \leqslant 1 + xu \leqslant 2$ et par conséquent,

$$F_\alpha(x) \geqslant x^\alpha \int_x^{1/x} \frac{du}{2u^\alpha} = \frac{x^{2\alpha-1} - x}{2(1-\alpha)}.$$

Comme $0 < \alpha < 1/2$, le dénominateur est strictement positif et l'exposant $2\alpha - 1$ est strictement négatif. Par conséquent, on a minoré $F_\alpha(x)$ par une quantité qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. On a ainsi démontré que $F_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 pour tout $0 < \alpha < 1/2$.

Solution 73 — 07-11

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in I =]0, 1[$, on pose

$$f(x, t) = \frac{t-1}{\ell n\, t}\, t^x = \frac{t-1}{\ell n\, t}\, e^{x\,\ell n\, t}.$$

Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I.

❧ De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x, t) \underset{t\to1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} \cdot 1 \quad \text{et} \quad f(x, t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{t^x}{\ell n\, t} = o(t^x).$$

Par conséquent, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable au voisinage de 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$ et intégrable au voisinage de 0 au moins pour $x > -1$.

La fonction F est donc définie au moins sur Ω.

❧ Pour $x = -1$, on a $f(t) \sim \frac{1}{t\,\ell n\, t}$ lorsque t tend vers 0. Or

$$\forall\, 0 < a < \frac{1}{2}, \quad \int_a^{1/2} \frac{dt}{t\,\ell n\, t} = \big[\ell n|\ell n\, t|\big]_a^{1/2} = \ell n\,\ell n\, 2 - \ell n|\ell n\, a|$$

donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t\,\ell n\, t}$$

est divergente. Comme la fonction $\big[t \mapsto \frac{1}{t\,\ell n\, t}\big]$ est de signe constant sur l'intervalle $]0, 1/2]$, on en déduit que cette fonction n'est pas intégrable au voisinage de 0 et, par comparaison, la fonction $[t \mapsto f(-1, t)]$ n'est pas non plus intégrable au voisinage de 0.

❧ Enfin, pour $x < -1$, il est clair que

$$\frac{1}{t\,\ell n\, t} \underset{t\to0}{=} o\Big(\frac{t^x}{\ell n\, t}\Big),$$

ce qui prouve que $[t \mapsto f(x, t)]$ n'est pas intégrable au voisinage de 0.

❧ En conclusion, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I si, et seulement si, le réel x appartient à $\Omega =]-1,+\infty[$.

2. On considère $x \in V_\infty = [0,+\infty[$. On a démontré que $[t \mapsto f(x,t)]$ était intégrable sur I pour tout $x \in V_\infty$. De plus, il est clair que

$$\forall\, t \in I =]0,1[\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{t-1}{\ell n\, t}\, t^x = 0$$

(et la limite $[t \mapsto 0]$ est évidemment continue sur I). Enfin,

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in V_\infty, \quad \big|f(x,t)\big| = \left|\frac{t-1}{\ell n\, t}\right| e^{x\,\ell n\, t} \leqslant \left|\frac{t-1}{\ell n\, t}\right| = \big|f(0,t)\big|$$

où le majorant trouvé est indépendant de $x \in V_\infty$ et intégrable sur I en fonction de t.

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^1 0\,dt = 0.$$

3. On a déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ était intégrable sur I. Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\forall\, (x,t) \in \Omega \times I, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\left[t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$ est intégrable sur I (différence de deux fonctions intégrables de référence !).

Enfin, pour tout $a > -1$, il est clair que

$$\forall\, x \in [a,+\infty[\,,\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = (1-t)t^x \leqslant t^a$$

où le majorant est indépendant de x et intégrable sur I (puisque $a > -1$).

On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$: la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert

$$\Omega = \bigcup_{a>-1} [a,+\infty[$$

et

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^1 t^{x+1} - t^x\,dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

✍ *Nous allons calculer les primitives de F', donc il faut laisser cette expression développée !*

4. D'après ce qui précède, il existe une constante K telle que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = K + \ell n\,\frac{x+2}{x+1}.$$

Mais on a démontré que F tendait vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc $K = 0$.

❧ Pour tout $x \in \Omega$, on sait que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I. Comme la fonction $[t \mapsto u = -\ell n\, t]$ réalise une bijection (décroissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de $I =]0,1[$ sur $J =]0,+\infty[$, on déduit du Théorème de changement de variable que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u}\cdot (e^{-u})^x \cdot e^{-u}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1)u} - e^{-(x+2)u}}{u}\,du$$

et finalement que

$$\forall\, x > -1, \quad F(x) = \ell n\,\frac{x+2}{x+1} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1)u} - e^{-(x+2)u}}{u}\,du.$$

Solution 74 **07-12**

1.
2.

Solution 75 **07-13**

1. a.
1. b.
2.

Solution 76 07kh-01

1.
2.
3.

Solution 77 07kh-02

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose

$$\varphi(a,x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}.$$

Il est clair que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $[x \mapsto \varphi(a,x)]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est intégrable sur ce segment et l'intégrale $F(a)$ est bien définie.

2.

❧ **Intégrabilité**
On a déjà justifié que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $[x \mapsto \varphi(a,x)]$ était intégrable sur $[0,1]$.

❧ **Régularité**
Il est tout aussi évident que, pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $[a \mapsto \varphi(a,x)]$ est continue sur $\mathbb{R}$.

❧ **Domination**
Enfin, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \varphi(a,x) \leqslant \frac{x^2}{\sqrt{1+0}} = x^2.$$

Le majorant trouvé est indépendant du paramètre $a \in \mathbb{R}$ et, en tant que fonction de x, c'est une fonction intégrable sur $[0,1]$ (fonction continue sur ce segment).

❧ On peut donc appliquer le Théorème de continuité : la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

❧ En particulier,

$$\lim_{a \to 0} F(a) = F(0) = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

3. À la question précédente, on a établi la domination pour $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire en particulier pour a variant dans un voisinage de $+\infty$.

En outre, en distinguant le cas particulier $x = 0$ du cas général $0 < x \leqslant 1$, on vérifie que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \lim_{a \to +\infty} \varphi(a,x) = 0.$$

On peut donc appliquer le Théorème de passage à la limite sous le signe $\int$:

$$\lim_{a \to +\infty} F(a) = \int_0^1 0 \, dx = 0.$$

4. Comme $a > 0$, on peut effectuer le changement de variable affine $u = a^2x$ (avec $du = a^2\,dx$) :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}\,dx = \int_0^{a^2} \frac{u^2/a^4}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{a^2} = \frac{1}{a^6}\int_0^{a^2} \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\,du.$$

✍ *On peut expliciter cette dernière intégrale :*

$$\int_0^{a^2} \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \frac{\sqrt{a^4+1}}{2a^4} + \frac{\ell n(\sqrt{a^4+1} - a^2)}{2a^6}$$

au moyen d'un changement de variable ($u = \operatorname{sh} t$ ou $u = \tan\theta$, au choix). Mais c'est fastidieux et inutile !

On considère ici deux fonctions :

$$f(u) = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{et} \quad g(u) = u.$$

Il est clair que g est une fonction positive, NON intégrable au voisinage de $+\infty$ et que $f(u) \sim g(u)$ lorsque u tend vers $+\infty$. D'après le Théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\int_0^x f(u)\,du \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_0^x g(u)\,du = \frac{x^2}{2}$$

et donc
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+a^4x^2}}\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^6}\cdot\frac{(a^2)^2}{2} = \frac{1}{2a^2}.$$

✍ *Les esprits inquiets peuvent se rassurer : on passe de la relation*
$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} G(x) \quad \text{à} \quad F(a^2) \underset{a\to+\infty}{\sim} G(a^2)$$
par composition de limites
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = 1 \implies \lim_{a\to+\infty} \frac{F(a^2)}{G(a^2)} = 1$$
(et non pas par une — hasardeuse — composition d'équivalents).

Solution 78 07kh-03

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note
$$\varphi(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+ixt)}$$
et on remarque pour commencer que $1+ixt$ ne s'annule jamais (la partie réelle, égale à 1, n'est jamais nulle) et que
$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad |1+ixt| \geqslant |\mathfrak{Re}(1+ixt)| = 1. \tag{$\star$}$$
On déduit de $(\star)$ que
$$\forall\,t \in \mathbb{R}, \quad \big|\varphi(x,t)\big| = \frac{1}{(1+t^2)|1+ixt|} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \tag{$\star\star$}$$

❧ **Intégrabilité**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ est donc continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (par comparaison à la dérivée de la fonction Arctan, fonction intégrable de référence).

❧ **Régularité**
Il est clair que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ est continue sur $\mathbb{R}$.

❧ **Domination**
Dans $(\star\star)$, on a trouvé un majorant indépendant du paramètre $x \in \mathbb{R}$ et ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$ en fonction de t.
On peut donc déduire du Théorème de continuité que F est continue sur $\mathbb{R}$.

✍ *En remarquant que*
$$\frac{1}{(1+t^2)(1+ixt)} = \frac{1-ixt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$
et en trouvant la décomposition en éléments simples, on peut calculer une expression de $F(x)$ au moyen des fonctions usuelles pour $x \neq \pm 1$:
$$F(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)} + i\frac{x\,\ell n|x|}{1-x^2}.$$

Solution 79 07Kh-51

1. Pour $t \in I =]0, \pi/2]$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(x\sin t)}{\sin t}.$$
Il est clair que, pour tout $x \in \Omega = \mathbb{R}$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert I. De plus, pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$,
$$f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(x\sin t)}{x\sin t}\cdot x$$
et comme on sait que
$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} u}{u} = 1,$$
on déduit du Théorème de composition des limites que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ tend vers une limite finie, égale à x, lorsque t tend vers 0.

✍ *Même si on a dû traiter à part le cas $x = 0$ (pour ne pas diviser par 0 !), la conclusion est la même pour tous les $x \in \Omega$, y compris pour $x = 0$.*

On en déduit que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable au voisinage de 0 et donc qu'elle est intégrable sur I pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

❧ Par imparité de la fonction Arctan,

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in I, \quad f(-x,t) = -f(x,t)$$

et par conséquent $F(-x) = -F(x)$. La fonction F est donc impaire.

2. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sur Ω.

❧ **Intégrabilité**
On a déjà justifié que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ était intégrable sur I.

❧ **Régularité**
Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω (puisque $f(x,t)$ est de la forme $A\operatorname{Arctan}(Bx)$) et

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{AB}{1+(Bx)^2} = \frac{1}{1+x^2\sin^2 t}.$$

❧ **Intégrabilité (bis)**
Pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{1}{1+x^2\sin^2 t}\right]$$

est continue sur le segment $I_0 = [0, \pi/2]$. Par conséquent, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur le sous-intervalle $I \subset I_0$, quel que soit le paramètre $x \in \Omega$.

❧ **Domination**
Quels que soient $x \in \Omega$ et $t \in I$,

$$\left|\frac{1}{1+x^2\sin^2 t}\right| \leqslant 1.$$

On a un majorant indépendant de $x \in \Omega$ et ce majorant est, en tant que fonction de t, intégrable sur I.

✍ *Toute fonction constante est intégrable sur un intervalle borné.*

Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+x^2\sin^2 t}.$$

❧ Sur l'expression de $F'(x)$ qu'on vient de trouver, on peut considérer que l'intervalle d'intégration est en fait $J = [0, \pi/2[$. La fonction tan réalise une bijection (croissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de J sur $[0, +\infty[$, ce qui rend légitime le changement de variable suivant :

$$u = \tan t, \quad du = (1+\tan^2 t)\,dt, \quad \frac{du}{1+u^2} = dt, \quad \frac{u^2}{1+u^2} = \sin^2 t.$$

On en déduit que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+x^2\sin^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(1+x^2)u^2}.$$

✍ *Il n'est pas nécessaire d'étudier la convergence de cette intégrale généralisée, puisque c'est le Théorème de changement de variable lui-même qui nous assure qu'on intègre ici une fonction intégrable.*

Le changement de variable affine $v = \sqrt{1+x^2}\,u$ nous ramène à la dérivée de la fonction Arctan et on en déduit finalement que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

3. Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F(0) = 0$ (par imparité), on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x F'(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

On reconnaît une dérivée bien connue :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{Arg\,sh} x.$$

✍ *On sait que la fonction* sh *réalise une bijection de classe* $\mathscr{C}^1$ *de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *et donc du segment* $[0 \leftrightarrow x]$ *sur le segment* $[0 \leftrightarrow \operatorname{Arg\,sh} x]$*. On peut donc légitimement poser :*

$$t = \operatorname{sh} u, \quad dt = \operatorname{ch} u\, du, \quad \sqrt{1+t^2} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{ch} u$$

(puisque ch *est à valeurs positives). On en déduit que*

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^{\operatorname{Arg\,sh} x} du = \operatorname{Arg\,sh} x.$$

Évidemment, il vaut mieux connaître les dérivées des fonctions usuelles (même celles qui ne sont pas si usuelles que ça).

Solution 80 **07Kh-52**

1. On note $I =]0, +\infty[$ et $\Omega = \mathbb{R}$. Pour $(x,t) \in \Omega \times I$, on pose

$$f(x,t) = t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt}.$$

Il est clair que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I.

✍ *Par conséquent, cette fonction est intégrable sur* I *si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de* 0 *et au voisinage de* $+\infty$*.*

De plus, pour tout $x \in \Omega$,

$$f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}} \quad \text{et} \quad \big|f(x,t)\big| = t^{\alpha-1} e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t/2}).$$

Or $\big[t \mapsto 1/t^{1-\alpha}\big]$ est intégrable au voisinage de 0 puisque $\alpha > 0$ (critère de Riemann) et $\big[t \mapsto e^{-t/2}\big]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de référence), donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'intégrale généralisée $F(x)$ est donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sur Ω.

❧ **Intégrabilité**

Nous avons déjà démontré que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ était intégrable sur I.

❧ **Régularité**

Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω puisque $f(x,t)$ est de la forme Ae^{Bx}. On a donc

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = it \cdot t^{\alpha-1} e^{-t} e^{ixt} = it^{\alpha} e^{-t} e^{ixt}.$$

❧ **Intégrabilité (bis)**

On a démontré que $[t \mapsto f(x,t)]$ était intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$ en supposant que $\alpha > 0$. En remplaçant α par $\alpha + 1$, on en déduit que

$$\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$.

✍ *Le facteur (constant !)* i *est sans effet sur l'intégrabilité.*

❧ **Domination**

Pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \in I$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t^{\alpha} e^{-t}.$$

On a, sans aucun calcul !, un "majorant" indépendant du paramètre x et on a *déjà* justifié que ce "majorant" est intégrable sur I en tant que fonction de t.

D'après le Théorème de dérivation, la fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} it^{\alpha} e^{(ix-1)t}\, dt.$$

❧ Les fonctions

$$u = [t \mapsto it^{\alpha}] \qquad \text{et} \qquad v = \left[t \mapsto \frac{e^{(ix-1)t}}{(ix-1)}\right]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert I.

✍ *Le dénominateur $ix - 1$ est différent de 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque sa partie réelle, égale à -1, n'est jamais nulle.*

On a démontré plus haut que le produit uv' était intégrable sur I.

De plus, le produit $u(t)v(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 (puisque $\alpha > 0$) et aussi lorsque t tend vers $+\infty$ par croissances comparées :

$$\left|u(t)v(t)\right| = \frac{t^{\alpha}e^{-t}}{|ix-1|}.$$

✍ *Quel que soit l'exposant α, la puissance t^{α} est négligeable devant e^{t}. (Et le dénominateur est constant, c'est t qui varie !)*

On déduit de la formule d'intégration par parties que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt$$

est convergente et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt = (0-0) - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = \frac{i\alpha}{1-ix}F(x).$$

3. Le résultat précédent nous dit que F est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - \frac{i\alpha}{1-ix}y(x) = 0.$$

Par conséquent, il existe une constante K (complexe !) telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = K\exp A(x) \quad \text{où} \quad A(x) = \int_0^x \frac{i\alpha}{1-it}\,dt.$$

Il suffit de transformer un peu l'expression pour en trouver les primitives :

$$\frac{i\alpha}{1-it} = \frac{\alpha(-t+i)}{1+t^2} = \frac{-\alpha}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2} + i\alpha\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) = \frac{-\alpha}{2}\,\ell n(1+x^2) + i\alpha \operatorname{Arctan} x$$

et enfin

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = K\frac{e^{i\alpha \operatorname{Arctan} x}}{(1+x^2)^{\alpha/2}}.$$

❧ Il reste à constater que $K = F(0) = \Gamma(\alpha)$ pour conclure.

Solution 81 **07Kh-53**

1. Pour $(x,y) \in \Omega$ et $t \in I = [0, \pi/2]$, on pose

$$g(x,y,t) = x^2\cos^2 t + y^2\sin^2 t \qquad \text{et} \qquad f(x,y,t) = \ell n\big[g(x,y,t)\big].$$

❧ Soit $(x,y) \in \Omega$, fixé.

La fonction $[t \mapsto g(x,y,t)]$ est continue et π-périodique.

Comme $g(x,y,t)$ est la somme de deux réels positifs, c'est un réel positif et s'il était nul, alors on aurait

$$x^2\cos^2 t = y^2\sin^2 t = 0$$

et donc $\cos^2 t = \sin^2 t = 0$ (puisque $x > 0$ et $y > 0$ par hypothèse), ce qui est absurde (puisque $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, quel que soit t).

❧ Quel que soit $(x,y) \in \Omega$, la fonction intégrande $[t \mapsto f(x,y,t)]$ est donc continue sur le segment $[0, \pi/2]$ comme composée de fonctions continues :

$$\begin{array}{ccccc} [0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\ell n} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(x,y,t) & \longmapsto & f(x,y,t) \end{array}$$

et par conséquent, elle est intégrable sur ce segment.

La fonction F est donc définie sur Ω.

✍ *L'intégrale $F(x,y)$ n'est même pas une intégrale généralisée !*

❧ Pour $x = y = y_0 > 0$, l'intégrande se simplifie considérablement !

$$F(y_0, y_0) = \int_0^{\pi/2} \ell n(y_0^2)\, dt = \pi \ell n\, y_0.$$

2. On applique le Théorème de continuité non pas sur Ω tout entier (il serait impossible de justifier la domination), mais sur les compacts K_r définis par

$$\forall\, r > 1, \qquad K_r = [1/r, r] \times [1/r, r] \qquad \text{si bien que} \qquad \Omega = \bigcup_{r>0} K_r.$$

✍ *Il serait judicieux de faire une figure pour bien s'en convaincre.*

❧ **Intégrabilité**

On a déjà vérifié que, pour tout $(x,y) \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,y,t)]$ était intégrable sur l'intervalle I.

❧ **Continuité**

Pour tout $t \in I$, la fonction

$$\Big[(x,y) \mapsto g(x,y,t) = x^2\cos^2 t + y^2 \sin^2 t\Big]$$

est continue (elle est polynomiale) et ne s'annule pas (comme on l'a justifié plus haut). Par composition de fonctions continues :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\ell n} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y,t) & \longmapsto & f(x,y,t), \end{array}$$

la fonction $[(x,y) \mapsto f(x,y,t)]$ est continue sur Ω.

✍ *L'encadrement qui va établir la domination explique le choix de K_r : si $0 < a < 1 < b$, alors*

$$\forall\, t \in [a,b], \quad -\ell n\, a \leqslant \ell n\, t \leqslant \ell n\, b \quad \textit{et donc} \quad |\ell n\, t| \leqslant \max\{-\ell n\, a, \ell n\, b\}$$

avec $\ell n\, a < 0 < \ell n\, b$.

❧ **Domination**

Pour tout $(x,y) \in K_r$, on a $1/r^2 \leqslant x^2, y^2 \leqslant r^2$, donc

$$\frac{1}{r^2} \leqslant x^2\cos^2 t + y^2 \sin^2 t \leqslant r^2$$

et par conséquent

$$\forall\, (x,y) \in K_r,\ \forall\, t \in I, \qquad \big|f(x,y,t)\big| \leqslant 2\,\ell n\, r.$$

On a ainsi obtenu un majorant de $|f(x,y,t)|$ qui est indépendant du couple (x,y) et qui, en tant que fonction de t, est intégrable sur le segment I.

❧ D'après le Théorème de continuité, la fonction F est continue sur tout compact contenu dans l'ouvert Ω et par conséquent elle est continue sur Ω.

3. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation à la fonction $[(x,t) \mapsto f(x,y_0,t)]$.

❧ **Intégrabilité**

On sait déjà que, pour tout $x \in V =]0, +\infty[$, la fonction $[t \mapsto f(x,y_0,t)]$ est intégrable sur I.

❧ **Régularité**

Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,y_0,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\begin{array}{ccccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\ell n} & \\ x & \longmapsto & g(x,y_0) & \longmapsto & f(x,y_0,t) \end{array}$$

On en déduit que
$$\forall\,(x,t)\in J\times I,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0,t)=\frac{2x\cos^2 t}{x^2\cos^2 t+y_0^2\sin^2 t}.$$

✍ *On l'a déjà dit (sous une forme plus générale) : la fonction* $[x\mapsto g(x,y_0,t)]$ *est polynomiale et strictement positive.*

❧ **Intégrabilité (bis)**
Soit $t\in I$. Puisque $g(x,y_0,t)$ ne s'annule pas, la fonction
$$\left[t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0,t)\right]$$
est continue sur le segment I (c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas), donc elle est intégrable sur I.

❧ **Domination**
Soit $r>0$. On pose alors $J_r=[r,+\infty[$. Pour tout $x\in J_r$ et tout $t\in I$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0,t)\right|=\frac{2x\cos^2 t}{x^2\cos^2 t+y_0^2\sin^2 t}\leqslant\frac{2x\cos^2 t}{x^2\cos^2 t+0}=\frac{2}{x}\leqslant\frac{2}{r}.$$
On a trouvé un majorant indépendant de $x\in J_r$ et ce majorant, en tant que fonction (constante !) de t, est intégrable sur le segment I.

❧ D'après le Théorème de dérivation, la fonction $[x\mapsto F(x,y_0)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]r,+\infty[\subset J$ pour tout $r>0$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $J=]0,+\infty[$ et
$$\forall\,x\in J,\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y_0)=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0,t)\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{2x\cos^2 t}{x^2\cos^2 t+y_0^2\sin^2 t}\,dt.$$

✍ *(Retour au calcul différentiel) On démontrerait de même que* $[y\mapsto F(x_0,y)]$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0,+\infty[$ *et que*
$$\forall\,y\in J,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y)=\int_0^{\pi/2}\frac{2y\sin^2 t}{x^2\cos^2 t+y_0^2\sin^2 t}\,dt.$$

❧ *En appliquant (deux fois) le Théorème de continuité, on en déduit que les deux dérivées partielles*
$$\left[(x,y)\mapsto\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right]\qquad\textit{et}\qquad\left[(x,y)\mapsto\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right]$$
sont continues sur Ω*, ce qui démontre que la fonction* F *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur l'ouvert* Ω.

❧ *En outre, on déduit de l'expression des deux dérivées partielles que*
$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\int_0^{\pi/2}2\,dt=\pi.$$

4. On suppose toujours que $y=y_0>0$ est *fixé*.

❧ On sait que la fonction tan réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle semi-ouvert $I_0=[0,\pi/2[$ sur l'intervalle semi-ouvert $[0,+\infty[$. On peut donc effectuer le changement de variable $u=\tan t$, sachant que
$$du=(1+\tan^2 t)\,dt,\quad \frac{du}{1+u^2}=dt,\quad \cos^2 t=\frac{1}{1+u^2},\quad \sin^2 t=\frac{u^2}{1+u^2}.$$

✍ *Comme d'habitude, il vaut mieux connaître ces formules. Mais à défaut, il suffit de savoir les retrouver rapidement.*

On en déduit que, pour tout $x>0$,
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y_0)=\frac{2x}{y_0^2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\big((x/y_0)^2+u^2\big)(1+u^2)}.$$
On peut effectuer une décomposition en éléments simples lorsque $x\neq y_0$.
$$\frac{1}{\big((x/y_0)^2+u^2\big)(1+u^2)}=\frac{y_0^2}{y_0^2-x^2}\left(\frac{1}{(x/y_0)^2+u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right).$$

On peut alors calculer les primitives et en déduire que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y_0) = \frac{2x}{y_0^2} \cdot \frac{y_0^2}{y_0^2 - x^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{y_0}{x} - 1\right) = \frac{\pi x}{y_0^2 - x^2} \cdot \frac{y_0 - x}{x} = \frac{\pi}{x + y_0}$$

pour tout $x > 0$ différent de y_0.

❧ Les deux fonctions

$$\left[x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, y_0)\right] \qquad \text{et} \qquad \left[x \mapsto \frac{\pi}{x + y_0}\right]$$

sont continues sur $]0, +\infty[$: on l'a déjà démontré pour la première et c'est évident pour la seconde. Or ces deux fonctions sont égales pour $x \neq y_0$, donc elles sont en fait égales pour tout $x > 0$.

❧ On déduit alors du Théorème fondamental et du calcul de $F(y_0, y_0)$ que, pour tout $y_0 > 0$,

$$\begin{aligned} F(x, y_0) = F(y_0, y_0) + \int_{y_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial x}(u, y_0)\,du &= \pi \ln y_0 + \int_{y_0}^{x} \frac{\pi}{u + y_0}\,du \\ &= \pi \ln y_0 + \pi \ln \frac{x + y_0}{2y_0} = \pi \ln \frac{x + y_0}{2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall\,(x, y) \in \Omega, \qquad F(x, y) = \pi \ln \frac{x + y}{2}.$$

✍ *Si on est prêt à appliquer le Théorème de continuité pour démontrer que* F *est en fait continue sur* $\Omega_0 = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \setminus \{(0, 0)\}$ *(cela demande de travailler sur des intégrales généralisées, on ne peut plus intégrer sur le segment* $[0, \pi/2]$*), on peut en déduire que*

$$\forall\,(x, y) \in \Omega_0, \qquad F(x, y) = \pi \ln \frac{x + y}{2}.$$

On peut alors retrouver le résultat classique

$$\int_0^{\pi/2} \ln \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t\,dt = \frac{-\pi \ln 2}{2}$$

en considérant $F(x, 0)$ *ou* $F(0, y)$*.*

(On peut démontrer ce résultat de manière élémentaire avec de la trigonométrie.)

Solution 82 — 07Kh-54

✍ *Commençons par remarquer qu'il faudrait un miracle pour que la limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

soit intégrable au voisinage de 0*. Puisqu'on ne peut pas espérer appliquer un théorème du cours directement, il faut transformer l'intégrale pour la mettre sous une forme plus agréable.*

Pour $h > 0$, on effectue le changement de variable affine $x = ht,\ dx = h\,dt$, qui nous donne

$$I(h) = \int_0^{1/h} \frac{h^2}{h^2 + h^2 t^2} f(ht)\,dt = \int_0^{1/h} \frac{f(ht)}{1 + t^2}\,dt.$$

✍ *Cette fois, on peut espérer que*

$$\lim_{h \to 0} I(h) = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1 + t^2}\,dt$$

et c'est une tâche naturellement dévolue au Théorème de convergence dominée.

On considère une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui tend vers 0 et la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0, +\infty[,\ \varphi_n(t) = \frac{f(h_n t)}{1 + t^2} \cdot \mathbb{1}_{[0, 1/h_n]}(t).$$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, il est clair que les fonctions φ_n sont continues par morceaux sur $I = [0, +\infty[$ et comme elles sont identiquement nulles sur un voisinage de $+\infty$, elles sont intégrables sur I.

✍ *Lorsque t tend vers $1/h_n$ par valeurs inférieures, $\varphi_n(t)$ tend vers $h_n^2 f(1)/(1+h_n^2)$ alors que la limite à droite en $1/h_n$ de φ_n est évidemment nulle. À moins que $f(1)=0$, la fonction φ_n est discontinue en $t=1/h_n$, mais elle admet bien une limite à gauche finie et une limite à droite finie en ce point. Elle est donc bien continue par morceaux sur I.*

Convergence simple

Pour tout $t\in I$ fixé, le produit $h_n t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et comme f est continue en 0, on déduit du théorème de composition des limites que

$$\forall\, t\in I, \qquad \lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t)=\frac{f(0)}{1+t^2}.$$

Il est clair que cette limite est une fonction continue et intégrable sur I.

Domination

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée sur ce segment. On en déduit que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, t\in I, \qquad \left|\varphi_n(t)\right|\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{1+t^2}.$$

Ce majorant est indépendant de $n\in\mathbb{N}$ et il est intégrable sur I.

On peut donc déduire du Théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi_n(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{f(0)}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi f(0)}{2}.$$

Par caractérisation séquentielle de la limite, on a en fait démontré que

$$\lim_{h\to0}\int_0^{1/h}\frac{f(ht)}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi f(0)}{2} \qquad \text{et donc que} \qquad \lim_{h\to0}\int_0^1\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\,dx=\frac{\pi f(0)}{2}.$$

Solution 83 rms130-1375

1. Pour $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction

$$\varphi_x=\left[t\mapsto\frac{t^x}{1+t}\right]$$

est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[0,1]$, donc l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

Pour $x<0$, la fonction φ_x est continue seulement sur l'intervalle $]0,1[$. Lorsque t tend vers 0, on a $\varphi_x(t)\sim t^x$ et on sait que $[t\mapsto t^x]$ est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $x>-1$.

Par conséquent, l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ au sens propre et pour tout $x>-1$ en tant qu'intégrale généralisée.

2. La fonction $u=\left[t\mapsto\sqrt{t}\right]$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et avec $u=\sqrt{t}$, on a

$$du=d(\sqrt{t})=\frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

D'après la formule du changement de variable, pour tout $z\in]0,+\infty[$,

$$\int^z\frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt=\int^z\frac{2t}{1+t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\int^{\sqrt{z}}\frac{2u^2}{1+u^2}\,du.$$

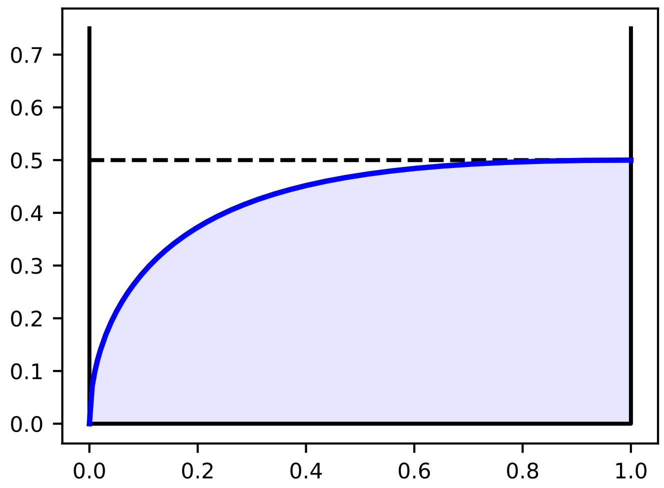
Appliquons l'Astuce taupinale :

$$\begin{aligned}\int^{\sqrt{z}}\frac{2u^2}{1+u^2}\,du=2\int^{\sqrt{z}}\frac{(1+u^2)-1}{1+u^2}\,du&=2\Big(\int^{\sqrt{z}}du-\int^{\sqrt{z}}\frac{du}{1+u^2}\Big)\\&=2\big(\sqrt{z}-\operatorname{Arctan}\sqrt{z}\big).\end{aligned}$$

3. Comme $\varphi_{1/2}$ est continue sur $[0,1]$,

$$F(1/2)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1\frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt=\lim_{\varepsilon\to0}2\big[\sqrt{z}-\operatorname{Arctan}\sqrt{z}\big]_{z=\varepsilon}^{z=1}=2-\frac{\pi}{2}.$$

✍ *Comme $\pi/2\approx1{,}57$, la valeur de $F(1/2)$ est de l'ordre de $0{,}43$. Il est facile de vérifier que la fonction $\varphi_{1/2}$ est croissante sur $[0,1]$ et de <u>voir</u> que l'aire calculée est effectivement inférieure à $1/2$ et assez proche de $1/2$.*



Solution 84 **rms130-1399**

1. Comme x est *réel*,

$$\frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{(x+i)(x-i)} = \frac{x-i}{1+x^2}$$

et donc

$$\mathfrak{Re}\,\frac{1}{x+i} = \frac{x}{1+x^2}, \qquad \mathfrak{Im}\,\frac{1}{x+i} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

2. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre : on connaît une formule pour cela !

D'après la question précédente, une primitive de $\frac{1}{x+i}$ est

$$\frac{1}{2}\,\ell n(1+x^2) - i\,\mathrm{Arctan}\,x$$

donc y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda\, \exp\Big[\frac{-1}{4}\,\ell n(1+x^2) + \frac{i}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x\Big] = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{1+x^2}}\, \exp\Big(\frac{i\,\mathrm{Arctan}\,x}{2}\Big).$$

✍ *On peut remarquer que $\lambda = y(0)$.*

3. Pour $x \in \Omega = \mathbb{R}$ et $t \in I =]0, +\infty[$, on pose

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $x \in \Omega$, il est clair que $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I ; que

$$\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t}) \quad \text{et que} \quad \varphi(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Par comparaison à des fonctions intégrables, on a démontré que $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ était intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$ et donc que l'intégrale $f(x)$ était bien définie sur $\Omega = \mathbb{R}$.

4. Il est clair que, pour tout $t \in I$, l'application $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{ixt}e^{-t}.$$

Il est tout aussi clair que l'application

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\Big]$$

est continue sur l'intervalle ouvert I et que

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \qquad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}e^{-t}.$$

Le majorant étant une fonction intégrable de référence sur I (cf cours sur la fonction Γ), on en déduit que, pour tout $x \in \Omega$, l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I. Mieux, le majorant étant indépendant de $x \in \Omega$ (condition de domination), on peut appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$: la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega = \mathbb{R}$ et

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{ixt}\,dt.$$

5. Nous allons intégrer par parties : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{i\sqrt{t}}{ix-1}\,e^{(ix-1)t}\right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) + \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}.$$

L'expression

$$\left|\frac{i\sqrt{t}}{ix-1}\,e^{(ix-1)t}\right| = \sqrt{\frac{t}{1+x^2}}\,e^{-t}$$

tend vers 0 lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$. De plus, l'application $\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial (}x,t)\right]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}\,dt$$

est convergente et

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad 0 = f'(x) + \int_0^{+\infty} \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}\,dt = f'(x) + \frac{i}{2(ix-1)}f(x) = f'(x) + \frac{1}{2(x+i)}f(x).$$

La fonction f est bien une solution de (E).

❧ Le scalaire λ est égal à $f(0) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, donc

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\,\exp\left(\frac{i\,\text{Arctan}\,x}{2}\right).$$

6. Nous allons à nouveau appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Pour tout $t \in I =]0,+\infty[$ et tout $\alpha \in \Omega = \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\psi(\alpha,t) = \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $\alpha \in \Omega$, l'application $[t \mapsto \psi(\alpha,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I. Comme

$$\psi(\alpha,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-\alpha t}) \quad \text{et} \quad \psi(\alpha,t) \underset{t\to 0}{\sim} \sqrt{t},$$

l'application $[t \mapsto \psi(\alpha,t)]$ est bien intégrable sur I et l'application J est donc bien définie sur I.

Avec le changement de variable affine $u = \alpha t$,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin(u/\alpha)}{\sqrt{u}}\,du$$

et par linéarité de l'intégrale,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathfrak{Im}\big(f(1/\alpha)\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+\alpha^2}}\sin\frac{\text{Arctan}(1/\alpha)}{2}.$$

Comme $0 < \text{Arctan}\,1/\alpha < \pi/2$, le sinus est positif et $I(\alpha)$ est donc (strictement) positif pour tout $\alpha > 0$.

✍ *On peut aussi exprimer $I(\alpha)$ comme la somme d'une série convergente à l'aide de la relation de Chasles.*

$$I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\alpha(u+k\pi)}\sin(u+k\pi)}{\sqrt{u+k\pi}}\,du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-k\alpha\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\alpha u}\sin u}{\sqrt{u+k\pi}}\,du.$$

On vérifie sans peine que

$$e^{-k\alpha\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\alpha u}\sin u}{\sqrt{u+k\pi}}\,du$$

tend vers 0 en décroissant quand k tend vers $+\infty$. Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées étant vérifiées, on sait que la somme $I(\alpha)$ est du signe du premier terme et donc positive.

Solution 85 **rms130-1402**

1. La fonction $f = \big[t \mapsto (e^{-1/t})/t\big]$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. De plus, on sait que ue^{-u} tend vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$ et ${}^1\!/_t$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. Par conséquent, en posant $f(0) = 0$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

L'intégrale $h(x)$ est donc bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et, d'après le Théorème fondamental, la fonction h ainsi définie est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$: c'est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. La méthode est bien connue.

❧ On vérifie sans peine que $y_0 = [x \mapsto \exp({}^1\!/_x)]$ est une solution de l'équation homogène sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ et qu'une fonction y_H est une solution de cette équation si, et seulement si, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in I, \qquad y_H(x) = C.y_0(x) = C.\exp({}^1\!/_x).$$

❧ On fait alors "varier la constante" : on cherche une solution de l'équation complète de la forme $y_p(x) = C(x).e^{1/x}$ où C est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Cette fonction y_p est solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\forall\, x \in I, \qquad x^2.C'(x)\exp({}^1\!/_x) = x$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in I, \qquad C'(x) = \frac{1}{x}\exp\Big(\frac{-1}{x}\Big).$$

On déduit de la question précédente que la fonction y_p définie par

$$\forall\, x \in I, \qquad y_p(x) = h(x)e^{1/x}$$

est une solution particulière de l'équation complète.

❧ D'après le principe de superposition, une fonction $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ est une solution de l'équation complète si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall\, x > 0, \qquad y(x) = y_p(x) + \lambda y_0(x) = h(x)e^{1/x} + \lambda e^{1/x}.$$

3. Comme $x > 0$, il est clair que la fonction

$$\psi = \Big[u \mapsto t = \frac{x}{1+xu}\Big]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. D'après le Théorème de la bijection monotone, l'application ψ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]0,x]$.

✍ *Il suffit de calculer $\psi(0)$ et la limite de ψ au voisinage de $+\infty$ pour déterminer l'intervalle image de cette bijection.*

On vérifie ensuite que

$$e^{1/x}e^{-1/t} = e^{1/x-1/t} = e^{-u} \quad \text{et que} \quad dt = \frac{-x^2\,du}{(1+xu)^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{dt}{t} = \frac{-x\,du}{1+xu}.$$

D'après la formule du changement de variable,

$$e^{1/x}\int_0^x e^{-1/t}\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{x\,du}{1+xu} = x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{1+xu}\,du.$$

4. Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(x, u) = \frac{e^{-u}}{1 + xu}.$$

Régularité —
Il est clair que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, la fonction $[x \mapsto \varphi(x, u)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et on vérifie par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, (x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, u) = \frac{(-1)^n n! u^n e^{-u}}{(1 + xu)^{n+1}}.$$

Domination —
Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, u)\right| = n! \cdot \frac{u^n e^{-u}}{(1 + xu)^{n+1}} \leqslant n \cdot u^n e^{-u}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *L'étude de la fonction Γ a montré que $[u \mapsto u^n e^{-u}]$ était intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Intégrabilité —
Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[u \mapsto \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, u)\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, d'après la propriété de Domination qu'on vient de justifier, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

❧ On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous $\int$, ce qui prouve que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{(1 + xu)^{n+1}}\, du.$$

✍ *On a résolu l'équation différentielle complète sur $\mathbb{R}_+^*$.*
On déduit de ce qui précède que le produit $[x \mapsto xg(x) = h(x)e^{1/x}]$ est une solution de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ (et pas seulement sur $\mathbb{R}_+^*$) de l'équation complète.
Comme $e^{1/x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, on en déduit que cette fonction est la seule solution de l'équation complète qui soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et aussi la seule qui reste bornée au voisinage de 0.

Solution 86 rms132-628

Tout d'abord, l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

❧ Pour $x > 0$ (ce qui n'est pas une restriction, puisqu'on étudie $x \to +\infty$), on peut effectuer le changement de variable linéaire $u = tx$:

$$xF(x) = \int_0^{xa} g\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u}\, du.$$

❧ On considère donc la fonction φ définie par

$$\forall\, 0 \leqslant u \leqslant xa, \quad \varphi(x, u) = g\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall\, u > xa, \quad \varphi(x, u) = 0.$$

▶ **Intégrabilité —** On a déjà justifié que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$[u \mapsto \varphi(x, u)]$$

était intégrable sur $I = [0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, u)\, du = xF(x).$$

▶ **Convergence simple —** Comme g est continue en 0,

$$\forall\, u \in I, \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x, u) = g(0)e^{-u}$$

et la fonction $[u \mapsto g(0)e^{-u}]$ est continue sur I (et bien entendu intégrable sur cet intervalle).

▶ **Domination** — Comme g est continue sur le compact $[0, a]$, elle est bornée. Par conséquent,

$$\forall\, u \in I,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\varphi(x,u)\right| \leqslant \|g\|_\infty\, e^{-u}.$$

La majorant trouvé est indépendant de $x > 0$ et intégrable sur I en tant que fonction de u.

Par conséquent, d'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_I \varphi(x,u)\, du = \int_I g(0)e^{-u}\, du = g(0).$$

Comme $g(0) \neq 0$, on peut en déduire que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}.$$

✍ *Si $g(0) = 0$, on a seulement démontré que $F(x) = o(1/x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on n'a pas trouvé d'équivalent.*

Solution 87 **rms132-1228**

1. Posons $I = [0, +\infty[$ et $\Omega =]0, +\infty[$, ainsi que

$$\forall\, (t,x) \in I \times \Omega, \quad \varphi(t,x) = \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

❧ Soit $x \in \Omega$ (fixé). Il est clair que la fonction

$$[t \mapsto \varphi(t,x)]$$

est continue sur l'intervalle I. Il est clair que

$$\varphi(t,x) \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-xt})$$

et comme $x > 0$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable sur I.

Par conséquent, la fonction $[t \mapsto \varphi(t,x)]$ est intégrable sur I et la fonction F est donc bien définie sur Ω.

2. Soient $0 < x < y$. Pour tout $t \in I$, il est clair que $t \geqslant 0$ et donc que

$$0 \leqslant \frac{e^{-yt}}{1+t} \leqslant \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

En intégrant bornes croissantes (pour $t \in I$), on en déduit que

$$0 \leqslant F(y) \leqslant F(x),$$

ce qui prouve que F est positive et décroissante sur Ω.

❧ En particulier, la fonction F tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$. Il reste à déterminer la valeur de cette limite (positive).

Il est clair que

$$\forall\, (t,x) \in I \times \Omega, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{1+t} \leqslant e^{-xt}$$

et comme $x > 0$, on en déduit par intégration bornes croissantes que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ ***Variante***

On sait que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t,x)]$ est intégrable sur I.

Il est clair que, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(t,x) = 0.$$

(C'est faux pour $t = 0$, mais c'est sans importance.)

Enfin, il est tout aussi clair que

$$\forall\, x \geqslant 1,\ \forall\, t \in]0, +\infty[, \quad \left|\varphi(t,x)\right| \leqslant e^{-t}$$

où le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en fonction de t : la condition de domination est donc vérifiée pour $x \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire au voisinage de $+\infty$.

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \varphi(t,x)\,dt = 0.$$

3. **Régularité** — Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto \varphi(t,x)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = \frac{-te^{-xt}}{1+t}.$$

Intégrabilité — On a justifié plus haut que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t,x)]$ est intégrable sur I. De même, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\right]$$

est continue sur I et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-xt}.$$

Comme $x > 0$, on en déduit que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\right]$$

est intégrable sur I.

Domination — Soient $a > 0$ et $\mathcal{V} = [a, +\infty[$. Alors

$$\forall\,(t,x) \in I \times \mathcal{V}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de x et intégrable sur I en fonction de t, donc la condition de domination est satisfaite.

D'après le Théorème de Leibniz sur les intégrales fonctions d'un paramètre, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{V}$ pour tout $a > 0$ (et donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω) et

$$\forall\, a > 0,\ \forall\, x > a, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t}\,dt.$$

❧ On en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$$

et donc que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x}.$$

On a démontré que la fonction F était de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

❧ HR : Supposons que F soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω. La relation précédente nous dit alors que F' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω et donc que F est en fait de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur Ω.

On a ainsi démontré par récurrence que F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω pour tout $n \geqslant 1$ et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

4. Commençons par remarquer que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)+x}}{1+t}\,dt = e^x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{1+t}\,dt.$$

Posons alors $u = x(1+t)$ (changement de variable affine avec $du = x\,dt$, licite car $x > 0$). On a donc

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dt}{1+t}$$

(si tant est qu'une telle égalité ait vraiment un sens mathématique !) et on en déduit que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

✍ *Cette nouvelle expression de* $F(x)$ *permet de prouver que* F *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* Ω *en appliquant le Théorème fondamental seulement (sans avoir à justifier l'application du Théorème de dérivation comme on l'a fait plus haut).*

❧ Il est clair que
$$\frac{e^{-u}}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u}$$
et que la fonction $[u \mapsto 1/u]$ est positive et **non** intégrable au voisinage de 0. D'après le Théorème d'intégration des relations de comparaison,
$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{u}\,du = -\ell n\, x.$$

✍ *On aura remarqué qu'il s'agit ici d'infiniment grands.*

D'après la relation de Chasles, pour tout $x > 0$,
$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\,du + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du}_{\text{Cte}}$$
et d'après l'équivalent précédent,
$$F(x) = \underbrace{e^x}_{\sim 1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x\to 0}{\sim} -\ell n\, x.$$

❧ En particulier, la fonction F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

Solution 88 **rms134-1513**

1. Pour $x \in \Omega =]-1, +\infty[$ et $t \in I =]0, \pi/2]$, on pose
$$\varphi(t, x) = \sin^x t = \exp(x\,\ell n \sin t).$$

❧ **(Régularité)**
Pour tout $t \in I$, il est clair que $[x \mapsto \varphi(t, x)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω (voir l'expression exponentielle de φ) et
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) = (\ell n \sin t)^k \varphi(x, t).$$

❧ **(Intégrabilité** pour $k = 0$)
Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est continue sur l'intervalle I.
Pour $x > 0$, cette fonction tend vers 0 au voisinage de 0, donc elle est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur I.
Pour $x = 1$, cette fonction tend vers 1 au voisinage de 0 donc (même raisonnement) elle est intégrable sur I.
Pour $-1 < x < 0$,
$$\varphi(t, x) = \frac{\sin^x t}{t^x} \cdot t^x = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^x \cdot t^x \underset{t\to 0}{\sim} t^x$$
donc la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est bien intégrable au voisinage de $t = 0$ et donc intégrable sur I.
❧ **(Intégrabilité** pour $k \geqslant 1$)

✍ *On doit savoir que* $\ell n \sin t \sim \ell n\, t$ *lorsque* t *tend vers* 0.

Pour tout $x > -1$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \underset{t\to 0}{\sim} (\ell n \sin t)^k \cdot t^x \sim \ell n^k\, t \cdot t^x$$
et donc, pour tout $-1 < y < x$,
$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x) \underset{t\to 0}{=} o(t^y),$$
ce qui prouve l'intégrabilité sur I.
❧ **(Domination)**
Pour $t \in I$, le facteur $\ell n \sin t$ est strictement négatif, donc la fonction $[x \mapsto \varphi(t, x)]$ est décroissante et positive. Par conséquent,
$$\forall\, a > -1, \forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, t \in I, \quad |\varphi(t, x)| \leqslant \varphi(t, a)$$
et, pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$\forall\, a > -1, \forall\, x \in [a, +\infty[, \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x)\right| \leqslant |\ell n \sin t|^k \cdot \varphi(t, a).$$

On a trouvé un majorant indépendant du paramètre x et intégrable sur I.

✍ *Le majorant trouvé dépend du paramètre k, mais c'est sans importance.*

On peut donc appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$: quel que soit $a > -1$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \geqslant a, \quad F^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t, x)\, dt.$$

On en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$\Omega = \bigcup_{a > -1} [a, +\infty[$$

et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x > -1, \quad F^{(k)}(x) = \int_0^1 (\ell n \sin t)^k \sin^x t\, dt.$$

2. Soit $x \geqslant 0$. On a donc $x + 2 \geqslant 2 \geqslant 0$ et, comme x et $x + 2$ sont positifs, on peut intégrer par parties et

$$\begin{aligned} F(x+2) &= \int_I \sin^x t . \sin^2 t\, dt \\ &= \int_I \sin^x t . (1 - \cos^2 t)\, dt \\ &= F(x) - \int_I \sin^x t . \cos t \times \cos t\, dt \\ &= F(x) - \left[\frac{\sin^{x+1} t}{x+1} \times \cos t\right]_0^{\pi/2} + \int_I \frac{\sin^{x+1} t}{x+1} \times (-\sin t)\, dt \\ &= F(x) - \frac{1}{x+1} F(x+2), \end{aligned}$$

ce qui nous donne bien

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x).$$

❧ En particulier,

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)F(n+1)F(n+2) &= (n+2)F(n+1)\frac{n+1}{n+2}F(n) \\ &= (n+1)F(n)F(n+1) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite de terme général

$$(n+1)F(n)F(n+1)$$

est constante. Elle est donc égale à son premier terme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)F(n)F(n+1) = F(0)F(1) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Comme $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ pour tout $t \in I$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$$

donc la suite de terme général $F(n)$ est décroissante et positive. On en déduit d'une part que

$$(n+1)F(n)^2 \geqslant (n+1)F(n)F(n+1) = \frac{\pi}{2}$$

et d'autre part que

$$nF(n)^2 \leqslant nF(n-1)F(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $F(n) \geqslant 0$, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant F(n) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et donc que

$$F(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

✍ *Il reste à passer de la variable entière n à la variable réelle x. Il suffit essentiellement de savoir que*

$$x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil \leqslant x + 1,$$

ce qui donne en particulier

$$1 \leqslant \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leqslant \frac{x}{x-1} \quad \textit{et} \quad \frac{x}{x+1} \leqslant \frac{x}{\lceil x \rceil} \leqslant 1$$

pour tout $x > 1$.

❧ La fonction F est décroissante et positive (même justification que pour la suite de terme général $F(n)$, cf ci-dessus), donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(\lceil x \rceil) \leqslant F(x) \leqslant F(\lfloor x \rfloor).$$

D'après ce qui précède,

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, F(\lfloor x \rfloor) = \sqrt{\frac{x}{\lfloor x \rfloor}}\, \sqrt{\frac{2\lfloor x \rfloor}{\pi}}\, F(\lfloor x \rfloor) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

par produit et composition de limites. De même,

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, F(\lceil x \rceil) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

et nous pouvons maintenant conclure :

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$