Calcul matriciel : énoncés

Exercices CCP

1) Montrer que la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une projection, dont on déterminera les éléments.

2) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$?

3) Calculer, sans utiliser le déterminant, les rangs des matrices $\begin{pmatrix} 2-z & 2 & -1 \\ -1 & 1-z & 3 \\ 3 & -1 & 1-z \end{pmatrix}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

4) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de dimensions finies. On fixe une base $\mathcal{B}_1$ de E et une base $\mathcal{B}_2$ de F et on note $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

a) Montrer que $g : \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ v & \longmapsto & v \circ f \end{array}$ est linéaire et exprimer $\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*)$ en fonction de A.

b) Calculer le noyau de g et en déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Exercices Mines-Centrale

5) Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps. Montrer que l'on peut plonger $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{K}$ et résoudre l'équation $X^2 = -1$ dans $\mathbb{K}$.

6) Soient $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A_1 + \cdots + A_p$ est inversible et ${}^tA_iA_j = 0$ pour $i \neq j$.

Montrer que la somme des rangs des A_i est égale à n.

7) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles qu'il existe $\lambda \in K$ vérifiant : $\lambda AB + A + B = 0$. Montrer que A et B commutent.

8) Montrer qu'une matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

9) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices colonnes non nulles X et Y telles que $A = YX^\top$.

10) Montrer que $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ et } A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \,/\, \det(A) = \pm 1\}$.

11) Soit n un entier pair et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que :

$$\forall i, a_{i,i} = 0 \qquad \forall i \neq j, a_{i,j} = \pm 1$$

Montrer que A est inversible.

12) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où K est un corps commutatif infini. Montrer que si A et B commutent, les matrices $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ et $AD - BC$ ont même déterminant.

13) On fixe un entier $n \geq 1$. On note φ l'automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe $P(X+1)$ et A la matrice de φ dans la base canonique.

a) On suppose que $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de réels et on pose :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ v_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u_i.$$

Exprimer le vecteur $V = (v_0, v_1, \ldots, v_n)^\top$ en fonction de A et de $U = (u_0, u_1, \ldots, u_n)^\top$.

b) En déduire la formule d'inversion :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+k} \binom{k}{i} v_i.$$

14) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$, on note :

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

On définit par récurrence :

$$[a_1, \ldots, a_n] = \begin{cases} a_1 & \text{si } n = 1 \\ a_1 + \dfrac{1}{[a_2, \ldots, a_n]} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Montrer que $[a_1, \ldots, a_n] = \dfrac{D(a_1, \ldots, a_n)}{D(a_2, \ldots, a_n)}$ pour tout $n \geq 2$.

Exercices X-ENS

15) (L) Soit $H = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (H est le demi-plan de Poincaré). On note $SL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant 1. Pour une telle matrice M, on note $f_M :\ H \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application qui à $z \in H$ associe $\dfrac{az+b}{cz+d}$.

a) Soit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que f_M est à valeurs dans H.

b) Soient M et N dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Calculer $f_M \circ f_N$ et en déduire que f_M réalise une bijection de H sur lui-même.

c) Soit $z \in H$. Montrer qu'il existe $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\mathrm{Re}(f_M(z)) \in]-1/2, 1/2[$.

d) Soit $z \in H$ avec $|z| < 1$. Montrer qu'il existe $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $|f_M(z)| > 1$ et $\mathrm{Im}(f_M(z)) > \mathrm{Im}(z)$.

e) Soit $z \in H$. Montrer qu'il existe $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $|f_M(z)| \geq 1$ et $\mathrm{Re}(f_M(z)) \in]-1/2, 1/2]$.

16) (X) Soient A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(H) = 1$. Montrer que $\det(A+H)\,\det(A-H) \leq \det(A)^2$.

17) (P) Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de réels deux à deux distincts. Montrer que le déterminant $\left|\left(e^{a_i b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right|$ est non nul.

18) (P 2012) Calculer $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n)$ où $\mathcal{N}_n$ est l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes.

19) (X 2019) Soit $n \geq 2$. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

Calcul matriciel : corrigés

Exercices CCP

1) La recherche du noyau de $A - I_4$ conduit à la résolution du système homogène de rang 2 :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Une base de ce noyau est par exemple $(e_1, e_2) = \big((1,2,1,0),(1,2,0,1)\big)$.

De même, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est élément du noyau de A si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

et la famille $(e_3, e_4) = \big((1,-1,1,0),(0,1,0,1)\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$.

On en déduit que A est la projection sur l'espace $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ parallèlement à l'espace $G = \mathrm{Vect}\,(e_3, e_4)$ (on sait que ces deux espaces sont en somme directe, puisque ce sont des sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes ; comme F et G sont de dimension 2, leur somme est de dimension 4, donc égale à K^4).

Autre méthode : un calcul direct montre que $A^2 = A$; A est donc une projection et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Tr}(A) = 2$. A est donc la matrice d'une projection sur le plan $P_1 = \mathrm{Im}(A)$ parallèlement au plan $P_2 = \mathrm{Ker}(A)$. P_1 est engendré par les vecteurs colonnes de A : comme les deux premières colonnes sont indépendantes, on a :

$$P_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

P_2 est défini par le système :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in P_2 \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

et admet pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2) Première méthode : la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la nouvelle base est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = P^{-1}\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seconde méthode : on note e'_i les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ et on a :

$$f(e'_1) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3,\ \ f(e'_2) = e_1 + 4e_2 \text{ et } f(e'_3) = e_1 + 5e_2 + 3e_3.$$

Le système $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 \\ e_2' = e_2 + e_3 \\ e_3' = e_1 + e_3 \end{cases}$ s'inverse en $\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}\left(e_1' - e_2' + e_3'\right) \\ e_2 = \frac{1}{2}\left(e_1' + e_2' - e_3'\right) \\ e_3 = \frac{1}{2}\left(-e_1' + e_2' + e_3'\right) \end{cases}$. On en déduit :

$$f(e_1') = 3e_2' + 2e_3',\ f(e_2') = \frac{1}{2}\left(5e_1' + 3e_2' - 3e_3'\right) \text{ et } f(e_3') = \frac{1}{2}\left(3e_1 + 7e_2' + e_3'\right)$$

et donc

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 3/2 \\ 3 & 3/2 & 7/2 \\ 2 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

3) On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-z & 2 & -1 \\ -1 & 1-z & 3 \\ 3 & -1 & 1-z \end{pmatrix} &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 4-3z+z^2 & 5-3z \\ -1 & 1-z & 3 \\ 0 & 2-3z & 10-z \end{pmatrix} && \begin{matrix} L_1 \to L_1 + (2-z)L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 + 3L_2 \end{matrix} \\
&= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4-3z+z^2 & 5-3z \\ 2-3z & 10-z \end{pmatrix} \\
&= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2+6z+z^2 & -25 \\ 2-3z & 10-z \end{pmatrix} && L_1 \to L_1 + 3L_2 \\
&= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2+6z+z^2 & -25 \\ 30-13z+4z^2-z^3 & 0 \end{pmatrix} && L_2 \to 25L_2 + (10-z)L_1 \\
&= \begin{cases} 3 & \text{si } 30-13z+4z^2-z^3 \neq 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

La matrice est donc de rang 3, sauf si $z \in \left\{3, \dfrac{1-i\sqrt{39}}{2}, \dfrac{1+i\sqrt{39}}{2}\right\}$, auquel cas elle est de rang 2.

4) a) la linéarité est évidente :

$$\forall v_1, v_2 \in F^*,\ \forall \lambda \in K,\ g(\lambda v_1 + v_2) = (\lambda v_1 + v_2) \circ f = \lambda v_1 \circ f + v_2 \circ f = \lambda g(v_1) + g(v_2).$$

Notons $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ et $B = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*) = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq p}}$. Nous avons :

$$\forall j \in \{1, \ldots, p\},\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j}\varepsilon_i$$

Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$, nous devons calculer les coordonnées de $g(\varepsilon_j^*)$ dans la base $\mathcal{B}_1^* = (e_1^*, \ldots, e_p^*)$. Il faut se souvenir des propriétés des bases duales :

$$\begin{cases} \forall i, j \in \{1, \ldots, q\},\ \varepsilon_j^*(\varepsilon_i) = \delta_{i,j} \\ \forall u \in E^*,\ u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u(e_i)e_i^* \end{cases}$$

La i-ème coordonnée de $g(\varepsilon_j^*)$ dans la base $\mathcal{B}_1^*$ est donc :

$$b_{i,j} = \left(g(\varepsilon_j^*)\right)(e_i) = \varepsilon_j^*(f(e_i)) = a_{j,i}$$

ce qui donne $B = A^\top$.

b) On a $v \in \mathrm{Ker}(g)$ si et seulement si $v \circ f = 0$, i.e. si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

Fixons une base $(\delta_1, \ldots, \delta_r)$ de $\mathrm{Im}(f)$, complétée en $(\delta_1, \ldots, \delta_q)$ base de F. F^* est alors isomorphe à K^q, par l'application :

$$v \longmapsto (v(\delta_1), \ldots, v(\delta_q))$$

et par cet isomorphisme, $\mathrm{Ker}(g)$ est identifié à $\{0\}^r \times K^{q-r}$. On peut aussi voir les choses matriciellement : un élément de F^* est identifié à une matrice ligne (sa matrice dans la base $(\delta_1, \ldots, \delta_q)$ et dans la base (1) de K) et $v \in \mathrm{Ker}(g)$ si et seulement si les r premier termes de la matrice de g sont nuls).

On en déduit que $\mathrm{Ker}(g)$ est de dimension $q - r$, puis, avec la formule du rang :

$$\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(g) = q - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = r = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A).$$

Exercices Mines-Centrale

5) Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, notons $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$. On montre facilement :

- $M(1, 0) = I_2 \in \mathbb{K}$;
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{C},\ M(a, b) - M(c, d) = M(a - c, b - d)$;
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{C},\ M(a, b)M(c, d) = M(ac - b\overline{d}, ad + b\overline{c})$;
- $\forall (a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\},\ M(a, b) \in GL_2(\mathbb{C})$ et $M(a, b)^{-1} = M\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2+|b|^2}, -\frac{\overline{b}}{|a|^2+|b|^2}\right)$.

On en déduit que $\mathbb{K}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que tout élément non nul de $\mathbb{K}$ admet un inverse dans $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}$ est donc un corps.

L'application $a \longmapsto M(a, 0)$ est un morphisme d'anneau injectif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{K}$: on peut donc plonger le corps $\mathbb{C}$ dans le corps $\mathbb{K}$ (en identifiant un complexe a à l'élément aI_2 de $\mathbb{K}$, $\mathbb{C}$ devient un sous-corps de $\mathbb{K}$).

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$\left(M(a, b)\right)^2 = -I_2 \iff \left(a^2 - |b|^2 = -1 \text{ et } b(a + \overline{a}) = 0\right) \iff \begin{cases} b = 0 \text{ et } a = \pm i \\ \quad \text{ou} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ a = i\alpha \text{ et } |b|^2 = 1 - \alpha^2 \end{cases}$$

Les solutions $(b = 0, a = \pm i)$ se retrouvent dans le second cas, avec $\alpha = \pm 1$. Les solutions sont donc les matrices $M(i\alpha, \sqrt{1 - \alpha^2}e^{i\theta})$, avec $\alpha \in [-1, 1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{K}$, le polynôme $X^2 + 1$ a une infinité de racines, bien qu'il soit de degré 2 : ce n'est pas en contradiction avec le cours, car $\mathbb{K}$ est un corps non commutatif.

Remarque : $\mathbb{K}$ est le corps des quaternions, que l'on définit habituellement comme une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, muni d'une base $(1, i, j, k)$, le produit interne étant défini par les conditions :

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$;
- $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$ et $ik = -j$.

On retrouve la construction proposée dans l'exercice en utilisant les identifications $1 \equiv M(1, 0)$, $i \equiv M(i, 0)$, $j \equiv M(-1, 0)$ et $k \equiv M(0, -i)$.

6) Nous allons montrer que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(A_i)$.

On a tout d'abord $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(A_1 + \cdots + A_p) \subset \mathrm{Im}(A_1) + \cdots + \mathrm{Im}(A_p)$.

Soit d'autre part $(Y_1, \ldots, Y_p) \in \mathrm{Im}(A_1) \times \ldots \mathrm{Im}(A_p)$ avec $Y_1 + \cdots + Y_p = 0$. Il existe $X_1, \ldots, X_p \in \mathbb{R}^n$ tels que $Y_i = A_i X_i$ pour tout i. On a ensuite :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ 0 = A_i^\top(Y_1 + \cdots + Y_p) = A_i^\top(A_1 X_1 + \cdots + A_p X_p) = A_i^\top A_i X_i$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $A^\top X = 0$, on a $X^\top AAX = 0$, soit $\|AX\|^2 = 0$ (où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$), d'où $AX = 0$. Nous avons ainsi démontré que $Y_i = A_i X_i = 0$ pour tout i : la somme est directe.

On en déduit que $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{Im}(A_i)) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(A_i)$.

7) Si $\lambda = 0$, on a $B = -A$ et $AB = BA$. Sinon, on peut écrire $(\lambda A + I_n)(\lambda B + I_n) = \lambda^2 AB + \lambda A + \lambda B + I_n = I_n$. On en déduit que les matrices $\lambda A + I_n$ et $\lambda B + I_n$ sont inverses l'une de l'autre, puis $(\lambda B + I_n)(\lambda A + I_n) = I_n$, soit $\lambda^2 BA + \lambda A + \lambda B = 0 = \lambda^2 AB + \lambda A + \lambda B$, ce qui donne $BA = AB$ en simplifiant par λ^2.

8) Montrons le résultat par récurrence sur la taille n de la matrice.

- Le résultat est évident quand $n = 1$, puisque que la matrice nulle est la seule matrice de trace nulle.

- Soit $n \geq 1$ et supposons le résultat démontré au rang $n-1$. Fixons une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ de trace nulle et notons f l'endomorphisme de K^n qui admet M pour matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Si M possède un coefficient $M_{i,j}$ non nul, avec $i \neq j$, la famille $(e_i, f(e_i))$ est libre. En la complétant en une base $\mathcal{B}'$, la matrice $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ a un coefficient nul en position $(1,1)$. Nous pouvons donc l'écrire $A' = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(K)$. A et A' sont semblables : elles ont donc même trace et $0 + \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A) = 0$. Ainsi, B est de trace nulle et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ tel que $Q^{-1}BQ$ a une diagonale nulle. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ est alors inversible et :

$$P^{-1}A'P = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{1-}BQ \end{pmatrix} = A''$$

  A est donc semblable à A'' qui a une diagonale nulle : le résultat est démontré au rang n.

9) Supposons que $A = YX^\top$ avec $X, Y \in K^n$. Chaque colonne est colinéaire à Y, donc $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Vect}(Y)$: A est de rang au moins et, X et Y étant non nuls, a est non nulle, donc de rang 1.

Supposons réciproquement que A est de rang 1 et fixons une base Y de son image. Pour tout j, la j-ième colonne de A s'écrit $x_j Y$ avec $x_j \in K$; en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $A = YX^\top$ avec X et Y non nuls (sinon, A serait nulle).

10) Si $A = YX^\top$ avec $X, Y \in \mathbb{K}^n$ non nuls, on a $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Vect}(Y)$ (la j-ième colonne de A est $x_j Y$. Comme A est non nulle, elle est de rang 1.

Supposons réciproquement que A est de rang 1. En fixant une base Y de son image, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne de A est colinéaire à Y, donc elle s'écrit $x_j Y$ avec $x_j \in K$: on pose $X = (x_1, \ \ldots, \ x_n)^\top$ et on a $A = YX^\top$, avec X et Y non nuls puisque A est non nulle.

11) Première méthode : comme les termes $a_{i,i}$ sont nuls, on peut écrire

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in D_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

où D_n désigne l'ensemble des dérangements de $\{1, \ldots, n\}$ (un dérangement est un permutation sans point fixe). Pour un dérangement σ, $\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$ vaut 1 ou -1 : si on montre que $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$ est impair quand n est pair, on aura démontré que $\det(A)$ est non nul (ce sera un entier impair). En utilisant la relation classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

il est possible de démontrer que d_k est de parité inverse de celle de k.

Seconde méthode : comme on le comprend dans la preuve précédente, le résultat est obtenu en travaillant sur la parité de $\det(A)$, c'est-à-dire en travaillant dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous pouvons écrire, en notant $\overline{k}$ la classe modulo 2 d'un entier k et $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{1\leq i,j\leq n}$:

$$\overline{\det(A)} = \det(\overline{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

En ajoutant toutes les lignes à la première, on obtient (car n est pair) :

$$\overline{\det(A)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il suffit ensuite d'ajouter la première ligne à chacune des autres lignes :

$$\overline{\det(A)} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{vmatrix} = 1$$

où **1** (resp. **0**) est le vecteur ligne (resp. colonne) de taille $n-1$ ne contenant que des 1 (resp. que des 0). On a ainsi démontré que A est inversible, puisque son déterminant est un entier impair.

12) Supposons que A est inversible. On peut alors faire des opérations sur les lignes en utilisant la matrice inversible A comme un pivot :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -BA^{-1}C + D \end{pmatrix}$$

ce qui donne, en prenant le déterminant (et en utilisant que A et B commutent) :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & -BA^{-1}C + D \end{vmatrix} = \det(A)\det(-BA^{-1}C + D) = \det(-ABA^{-1}C + AD) = \det(AD - BC),$$

Si A n'est pas inversible, on peut appliquer le résultat en remplaçant A par $A - \lambda I_n$, à condition que λ ne soit pas une valeur propre de A ($A - \lambda I_n$ et B commutent). Nous avons donc :

$$\forall \lambda \in K \setminus \mathrm{Sp}(A), \quad \underbrace{\begin{vmatrix} A - \lambda I_n & C \\ B & D \end{vmatrix}}_{=F(\lambda)} = \underbrace{\det((A - \lambda I_n)D - BC)}_{=G(\lambda)}.$$

Comme F et G sont des applications polynomiales qui coïncident sur la partie infinie $K \setminus \mathrm{Sp}(A)$ (K est infini et A a au plus n valeurs propres), elles sont égales : on a donc $\det(M) = F(0) = G(0) = \det(AD - BC)$.

13) a) Comme $\varphi(X^k) = (X+1)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$, on a directement $V = AU$.

b) L'application φ est bijective, d'inverse $\psi : \; P \longmapsto P(X-1)$. On en déduit que A est inversible et on peut écrire :

$$U = A^{-1}V = \mathrm{Mat}(\psi, \mathcal{B})V$$

Comme $\psi(X^k) = (X-1)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}X^i$, on obtient :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}v_i.$$

14) La preuve est élémentaire pas récurrence sur n.

Si $n=2$, on a $\frac{D(a_1,a_2)}{D(a_2)} = \frac{a_1a_2+1}{a_2} = a_1 + \frac{1}{a_2} = [a1, a2]$.

Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat démontré au rang n. Pour $a_1,\ldots,a_{n+1} > 0$, on a en développant $D(a_1,\ldots,a_{n+1})$ par rapport à la première colonne :

$$D(a_1,\ldots,a_{n+1}) = a_1D(a_2,\ldots,a_{n+1}) - \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n+1} \end{pmatrix} = a_1D(a_2,\ldots,a_{n+1}) + D(a_3,\ldots,a_{n+1})$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à la suite $(a_2,\ldots a_{n+1})$, on obtient :

$$\frac{D(a_1,\ldots,a_{n+1})}{D(a_2,\ldots,a_{n+1})} = a_1 + \frac{D(a_3,\ldots,a_{n+1})}{D(a_2,\ldots,a_{n+1})} = a_1 + \frac{1}{[a_2,\ldots,a_{n+1}]} = [a_1,\ldots,a_{n+1}].$$

Exercices X-ENS

15) a) Remarquons que f_M est définie sur H, car si $z \in H$ et $cz+d=0$, $c=0$ (car Im$z \neq 0$) puis $d=0$, ce qui contredit $ad-bc=1$.

Pour $z \in H$, on a $Im(f_M(z)) = Im\left(\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\,\mathrm{Im}(z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$ donc f_M est à valeurs dans H.

b) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$ et $z \in \mathbb{H}$. On a :

$$f_N \circ f_M(z) = \frac{a'(az+b)+b'(cz+d)}{c'(az+b)+d'(cz+d)} = \frac{(a'+b'c)z+a'b+b'd}{(c'a+d'c)z+c'b+d'd} = f_{NM}(z).$$

Comme $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, M^{-1} est également élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ et on a $f_M \circ f_{M^{-1}} = f_{M^{-1}} \circ f_M = f_{I_2} = Id_H$. On en déduit que f_M est une permutation de H, d'inverse $f_{M^{-1}}$.

c) Soit $z = x+iy \in H$. On peut choisir $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|z+n| > 2$.

On a ensuite $\left|-\frac{1}{z+n}\right| < \frac{1}{2}$, donc $\left|\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{z+n}\right)\right| \leq \left|-\frac{1}{z+n}\right| < \frac{1}{2}$, donc $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$ est une solution du problème.

d) Avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $f_M(z) = -\frac{1}{z} = z'$, donc $|z'| = \frac{1}{|z|} > 1$ et $\mathrm{Im}(z') = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2} > \mathrm{Im}(z)$.

e) Notons $\mathcal{O} = \{f_M(z),\ z \in M \in SL_2(\mathbb{Z})\}$: c'est l'orbite de z sous l'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$. Nous allons montrer que $\mathcal{O}$ contient un élément de partie imaginaire maximale. Soit $z' = f_M(z) \in \mathcal{O}$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $\mathrm{Im}(z') \geq \mathrm{Im}(z)$. On a

$$\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Im}(z') = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

donc $|cz+d|^2 \leq 1$. Or pour z fixé, il n'existe qu'un nombre fini de couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz+d|^2 \geq 1$.

On en déduit que $\{\mathrm{Im}(z'),\ z' \in \mathcal{O}\}$ a un maximum, puisque $\{\mathrm{Im}(z'),\ z' \in \mathcal{O}\} \cap [\mathrm{Im}(z), +\infty[$ est fini et non vide.

Soit donc $z' = f_N(z)$ un élément de $\mathcal{O}$ de partie imaginaire maximale. Il existe ensuite $n \in \mathbb{Z}$ tel que la partie réelle de $z'' = z' + n$ appartienne à $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On a $z'' \in \mathcal{O}$ et $\mathrm{Im} z'' = \mathrm{Im}(z')$. D'après la question d), on a $|z''| \geq 1$ car dans le cas contraire, $\mathcal{O}$ contiendrait un élément de partie imaginaire strictement plus grande que celle de z'. La matrice $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $z'' = f_M(z)$ répond donc à la question.

16) Comme H est de rang 1, ils existent $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}HQ = J$, où J est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf $J_{1,1}$ qui vaut 1. En posant $P^{-1}AQ = B$, nous avons :

$$\det(A+H)\det(A-H) = \det{}^2(P)\det(B+J)\det(B-J)\det{}^2(Q^{-1}).$$

En notant B_j et J_j les colonnes des matrices B et J et BC la base canonique de $\mathbb{R}^n$, nous avons :

$$\begin{cases} \det(B+J) = \det_{BC}(B_1 + J_1, B_2, \ldots, B_n) = \det(B) + \det_{BC}(J_1, B_2, \ldots, B_n) \\ \det(B-J) = \det_{BC}(B_1 - J_1, B_2, \ldots, B_n) = \det(B) - \det_{BC}(J_1, B_2, \ldots, B_n) \end{cases}$$

Nous avons donc :

$$\det(B+J)\det(B-J) = \det{}^2(B) - \alpha^2 \leq \det{}^2(B)$$

avec $\alpha = \det_{BC}(J_1, B_2, \ldots, B_n)$. Nous obtenons finalement :

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq \det{}^2(P)\det{}^2(B)\det{}^2(Q^{-1}) = \det{}^2(A).$$

17) Si $n = 1$, le résultat est clair. Soit $n \geq 2$ et supposons la propriété vérifiée au rang $n-1$. Soient alors $(a_1, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts, $(b_1, \ldots, b_n)$ deux à deux distincts et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que :

$$\forall\, i,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{a_i b_j} = 0.$$

La fonction dérivable

$$f:\ x \longmapsto \lambda_n + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j e^{x(b_j - b_n)}$$

s'annule donc en les n réels distincts $a_1, \ldots, a_n$. Le théorème de Rolle permet donc d'affirmer que f' s'annule en $n-1$ points distincts $c_1, \ldots, c_{n-1}$, ce qui s'écrit :

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\},\ \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j e^{c_i(b_j - b_n)} = 0$$

Comme les c_i d'une part et les $b_i - b_n$ d'autre part sont deux à deux distincts, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. Les égalités initiales donne ensuite $\lambda_n = 0$, ce qui achève la preuve par récurrence.

18) Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice p, sa seule valeur propre (complexe) est 0 (si $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $0 = N^p X = \lambda^p X$, donc $\lambda = 0$). On en déduit que N est de trace nulle. L'ensemble des matrice nilpotente est donc contenu dans l'hyperplan $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, nous allons commencer par démontrer le lemme classique :

Pour tout corps commutatif K et tout entier $n \geq 1$, toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Ceci se fait par récurrence sur n :

- Si $n = 1$, une matrice de trace nulle est nulle, donc elle est semblable à elle-même et sa diagonale est nulle.

- Soit $n \geq 1$ et supposons le résultat démontré au rang $n-1$. Fixons une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ de trace nulle et notons f l'endomorphisme de K^n qui admet M pour matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Si M possède un coefficient $M_{i,j}$ non nul, avec $i \neq j$, la famille $(e_i, f(e_i))$ est libre. En la complétant en une base $\mathcal{B}'$, la matrice $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$ a un coefficient nul en position $(1,1)$. Nous pouvons donc l'écrire $A' = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(K)$. A et A' sont semblables : elles ont donc même trace et $0 + \mathrm{Tr}(B) =$ A' = A $= 0$. Ainsi, B est de trace nulle et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ tel que $Q^{-1}BQ$ a une diagonale nulle. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ est alors inversible et :

$$P^{-1}A'P = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{1-}BQ = A'' \end{pmatrix}$$

  A est donc semblable à A'' qui a une diagonale nulle : le résultat est démontré au rang n.

Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$, où les coefficients $B_{i,i}$ sont tous nuls. En notant N^{inf} et N^{sup} les matrices de taille n définies par :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ N^{inf}_{i,j} = \begin{cases} B_{i,j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} et N^{sup}_{i,j} = \begin{cases} B_{i,j} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

N^{inf} et N^{sup} sont nilpotentes (l'une est triangulaire inférieur stricte et l'autre est triangulaire supérieure stricte) et $N^{inf} + N^{sup} = B$. On en déduit que $A = PN^{inf}P^{-1} + PN^{sup}P^{-1}$ avec $PN^{inf}P^{-1}, PN^{sup}P^{-1} \in \mathcal{N}_n$: A est donc élément de $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n)$.

Nous avons donc démontré que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

19) Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice non nulle $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que :

$$\forall M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n},\ M \in \mathcal{H} \iff \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} m_{i,j} = 0 \iff \mathrm{Tr}(A^\top M) = 0$$

On reconnaît ici le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ < A, B >= \mathrm{Tr}(A^\top B)$$

et $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de la droite engendrée par A : $\mathcal{H} = A^\perp$.

Si B est une matrice équivalente à A, avec $B = P^{-1}AQ$ où $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \in A^\perp \iff \mathrm{Tr}((Q^{-1})^\top B^\top P^\top M) = 0 \iff \mathrm{Tr}(B^\top P^\top M (Q^{-1})^\top) = 0 \iff P^\top M (Q^{-1})^\top \in B^\perp$$

Comme M est inversible si et seulement si $P^\top M (Q^{-1})^\top$ l'est, nous avons $A^\perp \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ si et seulement si $B^\perp \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Si A est de rang $k < n$, on choisit $B = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; si A est inversible, on choisit $B = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans tous les cas, B est équivalente à A et a une diagonale nulle (cela marche dans le second cas car $n \geq 2$) : $B^\perp \cap GL_n(\mathbb{R})$ contient donc la matrice identité I_n et $\mathcal{H}$ contient une matrice inversible.