10
Suites et séries de fonctions

1. Par linéarité du passage à la limite, de l'intégration et de la dérivation, on sait calculer la limite, l'intégrale et la dérivée d'une somme *finie* de fonctions : il suffit d'effectuer ces opérations *terme à terme*.
On cherche ici à quelles conditions on peut également passer à la limite terme à terme dans une somme infinie de fonctions, intégrer terme à terme ou dériver terme à terme une somme infinie de fonctions.

2. En pratique, les fonctions considérées ici sont définies sur un intervalle Ω de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
Cependant, les résultats de ce chapitre s'appliquent aussi (lorsque cela a un sens) aux fonctions définies sur une partie Ω d'un espace vectoriel V de dimension finie et qui prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.

I

Convergence ponctuelle

3.1 ✍ *Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions* **converge simplement sur** Ω *lorsque, pour tout $x \in \Omega$, la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente.*
3.2 *Dans ce cas, la* **limite (simple)** *de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction f définie sur Ω par*

$$\forall\, x \in \Omega, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

On dit alors que **la suite de fonctions converge simplement sur** Ω **vers** f.

4. Exemples
4.1 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto x^n]$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle.
4.2 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto nx^n \ln x]$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction nulle.
4.3 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto \operatorname{Arctan} nx]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction constante, égale à $\pi/2$.
4.4 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto \operatorname{th} x/n]$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
4.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 & \text{pour } 0 < x \leqslant 1/n, \\ 1/x^2 & \text{pour } x \geqslant 1/n. \end{cases}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f = [x \mapsto 1/x^2]$.
4.6 La suite de terme général $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $[x \mapsto |x|]$.
4.7 La suite de terme général

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

converge simplement sur $]-1,1[$ vers $f(x) = 1/(1-x)$.

I.1 Propriétés conservées par convergence ponctuelle

5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur Ω vers une fonction f.
D'une manière générale, les propriétés des fonctions f_n qui ne touchent qu'un nombre *fini* de valeurs, dites ***propriétés ponctuelles***, sont conservées par la convergence simple.
5.1 Signe
Si f_n est une fonction positive (resp. négative) sur Ω pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est positive (resp. négative) sur Ω.
5.2 Monotonie
Si f_n est croissante (resp. décroissante) sur Ω pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur Ω.
5.3 Parité
Si f_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction paire (resp. impaire) sur $\Omega = \mathbb{R}$, alors f est paire (resp. impaire).
5.4 Périodicité
Si f_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors f est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
5.5 Convexité
Si f_n est une fonction convexe (resp. concave) sur Ω pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est convexe (resp. concave) sur Ω.

6. Fonctions uniformément bornées
6.1 *Suite de* **[4.5]** – Une fonction non bornée peut être la limite simple d'une suite de fonctions bornées.
6.2 ✍ *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **uniformément bornée sur** Ω *lorsque*

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega, \quad \big\|f_n(x)\big\|_E \leqslant M.$$

6.3 Si une suite de fonctions uniformément bornée converge simplement, alors sa limite simple est bornée.

7. Fonctions uniformément lipschitziennes
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions ***uniformément lipschitziennes*** lorsqu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, (x,y) \in \Omega^2, \quad \big\|f_n(x) - f_n(y)\big\|_E \leqslant K\|x-y\|_V.$$

1. *Suite de* **[4.3]** – Il existe une suite de fonctions lipschitziennes qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas lipschitzienne.
2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément lipschitziennes qui converge simplement vers une fonction f, alors f est lipschitzienne sur Ω.

I.2 Propriétés non conservées

8. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur Ω vers une fonction f.
Les propriétés qui reposent sur des inégalités *strictes* ou sur un nombre *infini* de valeurs ne sont en général pas conservées par convergence simple.
8.1 *Suite de* **[4.1]** – Si les fonctions f_n sont strictement positives, alors la fonction f est positive, mais n'est pas nécessairement strictement positive.
8.2 *Suite de* **[4.1]** – Si les fonctions f_n sont strictement croissantes, alors la fonction f est croissante, mais n'est pas nécessairement strictement croissante.
8.3 *Suite de* **[4.1]** – Si les fonctions f_n sont strictement convexes, alors la fonction f est convexe, mais n'est pas nécessairement strictement convexe.
8.4 *Suite de* **[4.5]** – Si les fonctions f_n sont intégrables sur Ω, la fonction f n'est pas nécessairement intégrable sur Ω.
8.5 *Suite de* **[4.3]** – Si les fonctions f_n sont continues sur Ω, la fonction f n'est pas nécessairement continue sur Ω.
8.6 *Suite de* **[4.6]** – Si les fonctions f_n sont dérivables sur Ω, la fonction f n'est pas nécessairement dérivable sur Ω.
8.7 *Suite de* **[4.2]** – Bien que les fonctions f_n convergent vers la fonction nulle, la suite de terme général

$$m_n = \min_{0<x\leqslant 1} f_n(x)$$

ne tend pas vers 0.
8.8 *Suite de* **[4.5]** – Toutes les fonctions f_n sont bornées, mais leur limite f n'est pas bornée.

I.3 Propriétés locales et propriétés globales

9. Nous dirons qu'une propriété est ***locale*** lorsqu'elle est vraie sur l'intervalle Ω si, et seulement si, elle est vraie sur tout segment $[A,B]$ contenu dans Ω.
Une propriété qui n'est pas locale sera dite ***globale***.

9.1 Exemples de propriétés locales

1. Les propriétés ponctuelles **[5]** sont des propriétés locales.
2. Une fonction est continue (resp. dérivable, resp. de classe $\mathscr{C}^n$, resp. continue par morceaux) sur un intervalle Ω si, et seulement si, elle est continue (resp. dérivable, resp. de classe $\mathscr{C}^n$, resp. continue par morceaux) sur tout segment $[A,B] \subset \Omega$.

9.2 Exemples de propriétés globales

1. Toute fonction continue sur $]0,1[$ est bornée sur tout segment $[A,B] \subset]0,1[$, sans être nécessairement bornée sur $]0,1[$.
2. Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ est lipschitzienne sur tout segment $[A,B] \subset]0,+\infty[$, sans être nécessairement lipschitzienne sur $]0,+\infty[$.
3. Toute fonction continue sur $]0,1[$ est intégrable sur tout segment $[A,B] \subset]0,1[$, mais n'est pas nécessairement intégrable sur $]0,1[$.

Entraînement

10. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[4.1]** – Étudier la convergence simple sur $[0,1]$.
2. *Suite de* **[4.3]** – Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$.

11. Fonction génératrice d'une loi sur $\mathbb{N}$
Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***loi de probabilité*** sur $\mathbb{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

alors sa ***fonction génératrice*** G, définie par

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$$

est positive, croissante et convexe sur $[0,1]$. →**[128]**

12. Suites de fonctions affines

1. Soit φ, une fonction affine sur Ω :

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \varphi(x) = ax + b.$$

Exprimer a et b en fonction de $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$, où x_1 et x_2 sont deux points distincts de Ω.

2. Une fonction φ est affine sur l'intervalle Ω si, et seulement si, elle est convexe et concave sur Ω.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions affines qui converge simplement sur Ω vers f. Alors la fonction f est une fonction affine.

13. Suites de fonctions polynomiales

13.1 *Suite de* **[4.7]** – Si une suite de fonctions polynomiales converge simplement vers f, la fonction f n'est pas nécessairement polynomiale.

13.2 Si on se restreint à des fonctions polynomiales de degré borné, alors le caractère polynomial est conservé par la convergence simple.

1. Si $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$ est une famille de $(d+1)$ points deux à deux distincts de Ω, toute fonction f polynomiale de degré inférieur à d sur Ω vérifie

$$\forall\, x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{d} f(\alpha_k) L_k(x)$$

où $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$ est la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$.

2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge simplement sur Ω vers une fonction f et si

$$\exists\, d \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \deg f_n \leqslant d,$$

alors f est une fonction polynomiale de degré inférieur à d.

14. *Suite de* **[7]** –

1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément lipschitziennes qui converge simplement sur $[a,b]$ vers f, alors la convergence est uniforme sur $[a,b]$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad f_n(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \forall\, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad f_n(x) = \sqrt{n}x.$$

Les fonctions f_n sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}_+$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f qui n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

3. La suite des fonctions f_n définies par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 2^{-n}\cos(3^n x)$$

est une suite de fonctions lipschitziennes, qui ne sont pas uniformément lipschitziennes. Cette suite converge simplement vers une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

II

Convergences uniformes

15. La continuité n'est en général pas conservée par convergence simple **[8.5]**. La notion de convergence uniforme, plus restrictive que la convergence simple, sert à assurer la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues.

16. La ***convergence uniforme globale*** est une condition très restrictive pour que la limite d'une suite de fonctions continues soit continue, ce n'est en aucun cas une condition nécessaire.

16.1 Soit u, une fonction bornée sur Ω. Alors

$$\big(\forall\, x \in \Omega, \quad \|u(x)\|_E \leqslant \varepsilon\big) \iff \big(\sup_{x\in\Omega} \|u(x)\|_E \leqslant \varepsilon\big).$$

16.2 ✍ *Une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** Ω *lorsqu'il existe une fonction* f*, définie sur* Ω*, telle que*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \quad \sup_{x\in\Omega} \|f_n(x) - f(x)\|_E \leqslant \varepsilon.$$

On dit alors que f *est la* **limite uniforme sur** Ω **de la suite de fonctions** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

16.3 La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers la fonction f si, et seulement si, la suite de fonctions $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers la fonction nulle.

16.4 ➙ Condition nécessaire de convergence uniforme
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* Ω *vers* f*, alors elle converge simplement sur* Ω *vers* f.

16.5 Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ et uniformément sur $[b,c]$, alors elle converge uniformément sur $[a,c]$.

17. Convergence uniforme et borne uniforme
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur Ω vers une fonction f.
17.1 Les fonctions $f_n - f$ et $f_n - f_p$ sont toutes bornées à partir d'un certain rang, sans que f ou les f_n le soient nécessairement.
17.2 Si la fonction f est bornée sur Ω, alors, à partir d'un certain rang, les fonctions f_n sont uniformément bornées sur Ω.

18. Norme d'algèbre associée à la convergence uniforme
Lorsqu'on se restreint aux suites de fonctions bornées, la convergence uniforme peut être étudiée à l'aide d'une norme.
18.1 ✍ *Soit f, une fonction bornée sur Ω. La* **norme uniforme** *(ou* **norme infinie***) sur Ω de f est définie par*

$$N_\Omega^\infty(f) = \sup_{x\in\Omega} \big\|f(x)\big\|_E.$$

Cette quantité est aussi notée $\|f\|_\infty$.
18.2 La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers f si, et seulement si, à partir d'un certain rang, la différence $f_n - f$ est bornée sur Ω et

$$\lim_{n\to+\infty} N_\Omega^\infty(f_n - f) = 0.$$

18.3 ➙ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions bornées sur Ω qui converge uniformément sur Ω vers f. Alors les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées, la fonction f est bornée et*

$$N_\Omega^\infty(f) = \lim_{n\to+\infty} N_\Omega^\infty(f_n).$$

19. Caractérisation séquentielle
On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur Ω vers une fonction f. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers f si, et seulement si, quelle que soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω (convergente ou non), la suite de terme général

$$f_n(x_n) - f(x_n)$$

tend vers 0.

En pratique

20. Pour justifier la convergence uniforme sur Ω de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

— On identifie f, limite **[16.4]** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la convergence simple sur Ω ;

— On établit ensuite une **majoration uniforme par une suite de limite nulle** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on justifie l'existence d'une constante réelle M_n *indépendante* de $x \in \Omega$ telle que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \big\|f_n(x) - f(x)\big\|_E \leqslant M_n$$

et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = 0.$$

21. Convergence non uniforme
Pour justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur Ω, on vérifie *d'abord* **[16.4]** si cette suite converge simplement sur Ω vers une fonction f et, si c'est bien le cas :

— on vérifie que la limite simple f est bornée mais que les fonctions f_n ne sont pas uniformément bornées **[17]** ;

— on cherche une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω telle que la suite de terme général

$$u_n = f_n(x_n) - f(x_n)$$

ne tende pas vers 0 ;

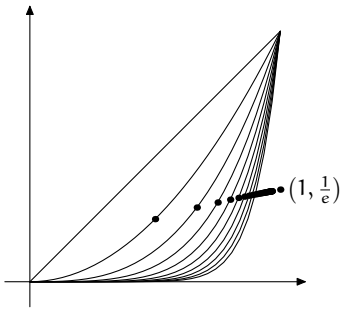
— on vérifie qu'un théorème d'interversion des limites (**[27.3]** ou **[32]**) ne peut pas s'appliquer.

22. Exemples et contre-exemples
22.1 *Suite de* **[4.6]** – La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $[x \mapsto |x|]$.
22.2 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto x^n \ell\mathrm{n}\, x]$ converge uniformément sur $\Omega =]0,1]$ vers la fonction nulle.
22.3 La suite des fonctions

$$f_n = \left[x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}\right]$$

converge uniformément sur $\Omega = \mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.
22.4 La suite des fonctions $f_n = \big[x \mapsto e^{-nx}\sin nx\big]$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Pour tout $a > 0$, elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$ mais elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ car $f_n(1/n)$ ne tend pas vers 0.
22.5 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto nxe^{-\sqrt{n}x}]$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle. Pour tout $a > 0$, elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$, mais elle ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
22.6 *Suite de* **[4.1]** – La suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\alpha]$ pour tout $0 < \alpha < 1$, mais ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ car

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n = e^{-1}.$$



22.7 La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto e^{-n^2x}]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle. Pour tout $a > 0$, elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$, mais elle ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

II.1 Opérations algébriques

23. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de fonctions qui convergent uniformément sur Ω vers f et g respectivement.
23.1 La suite de fonctions $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers $\lambda f + g$.
23.2 Si les fonctions f_n et g_n sont des fonctions bornées sur Ω, alors la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers fg.

24. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de fonctions continues sur Ω qui convergent uniformément sur Ω vers f et g respectivement. Alors la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de Ω vers fg. →**[26]**

25. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de I dans Ω qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \Omega$.
25.1 Quelle que soit la fonction $\psi : J \to I$, la suite de fonctions $(f_n \circ \psi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers $f \circ \psi$.
25.2 Si φ est uniformément continue sur Ω, alors la suite de fonctions $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\varphi \circ f$.

26. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in I = [0,+\infty[$, on pose

$$f_n(x) = x + 1/n.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction $f = [x \mapsto x]$. La suite de fonctions $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f^2, mais ne converge pas uniformément sur I.

II.2 Convergence uniforme et continuité

27. Le théorème **[27.2]** signifie que la convergence uniforme conserve la continuité, ce qu'on peut traduire comme la possibilité d'intervertir deux passages à la limite.

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\Big)$$

27.1 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathcal{V}\subset\Omega$ vers la fonction f. Quels que soient x et y dans $\mathcal{V}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$\big\|f(x)-f(y)\big\|_E \leqslant 2N_{\mathcal{V}}^{\infty}(f-f_n)+\big\|f_n(x)-f_n(y)\big\|_E.$$

27.2 ➙ *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur Ω converge uniformément sur $\mathcal{V}$, voisinage de x_0 dans Ω, vers f, alors f est continue au point x_0.*

27.3 ➙ *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur l'intervalle Ω converge uniformément sur Ω vers f, alors la fonction f est continue sur Ω.*

28. Convergence uniforme locale

Pour démontrer la continuité de la limite f d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues, il suffit de vérifier que la fonction f est continue en chaque point de son ensemble de définition.

Il n'est donc pas nécessaire de prouver **[27.3]** la convergence uniforme sur $\mathcal{V}=\Omega$: il suffit de l'établir sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, pour chaque point x_0 de Ω.

28.1 Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω, alors elle converge uniformément sur toute partie $K\subset\Omega$.

28.2 Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[A,B]\subset]a,b[$, alors elle converge simplement sur $]a,b[$.

28.3 ➙ *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur l'intervalle Ω converge uniformément sur tout segment $[A,B]\subset\Omega$ vers f, alors la fonction f est continue sur Ω.*

29. Composition de limites et limite uniforme

29.1 Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers f, alors

$$\big\|f(x)-f_n(y)\big\|_E \leqslant \big\|f(x)-f(y)\big\|_E + N_{\Omega}^{\infty}(f-f_n)$$

pour tous x et y dans Ω et tout $n\in\mathbb{N}$.

29.2 ➙ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur Ω vers f. Si la fonction f est continue en $x\in\Omega$, alors*

$$f_n(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui converge vers x.

29.3 Si la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers la fonction nulle, alors

$$R_n(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω.

Théorème d'interversion des limites

30. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $]a,b[$ dont les bornes a et b sont réelles ou infinies.
On cherche à généraliser le théorème **[27.2]** pour obtenir une conclusion de la forme

$$\lim_{x\to\omega}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to\omega} f_n(x)\Big)$$

avec $\omega=a$ ou $\omega=b$.

31. On se place sous les hypothèses du théorème **[32]**.

31.1 Quels que soient n et p,

$$\|\ell_n-\ell_p\|_E \leqslant N_I^{\infty}(f_n-f_p).$$

Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, c'est un ***espace complet*** et l'encadrement précédent prouve que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite de Cauchy***. Cette suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un vecteur $\ell\in E$.

31.2 Quels que soient $n\in\mathbb{N}$ et $w_n\in I$,

$$\big\|f_n(w_n)-\ell\big\|_E \leqslant \big\|f(w_n)-\ell\big\|_E + N_I^{\infty}(f_n-f).$$

31.3 Quelle que soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui tend vers ω,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(w_n) = \lim_{n\to+\infty}\ell_n.$$

32. ➙ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a,b[$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E.*
Hypothèses
1. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n au voisinage de $\omega=a$ (resp. $\omega=b$);*
2. *Il existe un intervalle $I=]a,\alpha[$ (resp. $I=]\beta,b[$) sur lequel la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Conclusion
1. *La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge;*
2. *La fonction f admet une limite finie au voisinage de ω et*
3. $$\lim_{x\to\omega} f(x) = \lim_{n\to+\infty}\ell_n.$$

33. Le théorème d'interversion des limites **[32]** s'applique également aux fonctions "de plusieurs variables", c'est-à-dire aux fonctions définies sur une partie Ω d'un espace vectoriel V de dimension finie.
Là encore, on considère un point ω qui peut être aussi bien un point de V adhérent à l'ensemble de définition Ω qu'un point à l'infini.

34. ▷ *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions définies sur une partie Ω de V, à valeurs dans E* **[2]** *et ω, un point de V ou un point à l'infini admettant Ω pour voisinage.*
Hypothèses
1. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie $\ell_n\in E$ au voisinage de ω;*
2. *Il existe un voisinage $\mathcal{V}_\omega$ de ω relatif à Ω sur lequel la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.*

Conclusion
1. *La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge;*
2. *La fonction f admet une limite finie au voisinage de ω et*
3. $$\lim_{x\to\omega} f(x) = \lim_{n\to+\infty}\ell_n.$$

II.3 Convergence uniforme et intégration

35. Passage à la limite sous $\int$

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un intervalle Ω.

35.1 Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers la fonction f, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |b-a|\,N_{\Omega}^{\infty}(f-f_n)$$

quels que soient a et b dans Ω.

35.2 ➙ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

36. ➙ **Primitives**

Soient Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$; x_0, un point de Ω et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues sur Ω qui converge uniformément sur (tout segment de) Ω vers une fonction f. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x\in\Omega,\quad F_n(x)=\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad et \quad F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de Ω vers F.

II.4 Convergence uniforme et dérivation

37. On cherche à quelles conditions on peut intervertir la limite et la dérivation, c'est-à-dire arriver à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big] = \lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x}\Big].$$

ou plus généralement **[39]**, **[40]** à

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big] = \lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{\mathrm{d}^k f_n(x)}{\mathrm{d}x^k}\Big].$$

38. ⇝ Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
Soient Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.
Hypothèses
1. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω vers une fonction f ;*
2. *La suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées converge uniformément sur tout segment de Ω vers une fonction g.*

Conclusion
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de Ω, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et $f' = g$.

39. ⇝ Fonctions de classe $\mathscr{C}^p$
Soient Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) sur Ω.
Hypothèses
1. *Pour tout $0 \leqslant k < p$, la suite des dérivées k-ièmes converge simplement sur Ω vers une fonction φ_k ;*
2. *La suite des dérivées p-ièmes converge uniformément sur tout segment de Ω vers une fonction φ_p.*

Conclusion
La fonction φ_0 est de classe $\mathscr{C}^p$ sur Ω et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \varphi_0^{(k)} = \varphi_k.$$

40. ⇝ Fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$
Soient Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω.
Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées k-ièmes converge uniformément sur tout segment de Ω vers une fonction φ_k, alors la fonction φ_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_0^{(k)} = \varphi_k.$$

Entraînement

41. Questions pour réfléchir
1. Soit X, un ensemble fini. Une suite de fonctions converge uniformément sur X si, et seulement si, elle converge simplement sur X.
2. Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions décroissantes sur I qui converge simplement sur I vers la fonction nulle. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur I ?
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur Ω vers f. Condition sur g pour que la suite de fonctions $(f_n g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers fg.
4. Soit φ, une fonction continue et bornée sur $\Omega = \mathbb{R}_+$.
4.a La suite des fonctions $f_n = [x \mapsto \varphi(x/n)]$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.
4.b Cette suite de fonctions ne converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ que si φ est constante.
5. Soit φ, une fonction continue sur $\Omega = \mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie ℓ au voisinage de $+\infty$.
5.a Pour tout $a > 0$, la suite des fonctions $f_n = [x \mapsto \varphi(nx)]$ converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
5.b Cette suite de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, φ est constante.
6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions uniformément continues sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f. La fonction f est uniformément continue sur I.
7. Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $\Omega =]a, b[$ converge uniformément sur $]A, B[\subset \Omega$ vers une fonction f, alors f est continue sur $]A, B[$.
8. Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $\Omega =]a, b[$ converge uniformément sur $[A, B] \subset \Omega$ vers une fonction f, alors f n'est pas nécessairement continue sur $[A, B]$. Cependant, la restriction $f_{|[A,B]}$ est continue.
9. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\Omega =]a, b[$ vers f. Si la fonction f admet une limite à gauche finie ℓ_b en b, alors

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_b$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui converge vers b.
10. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux sur Ω qui converge uniformément sur Ω vers une fonction intégrable f. Si Ω est un intervalle borné, alors la convergence est dominée : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur Ω vers f et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}t.$$

11. *Suite de* **[39]** – Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant p$, la suite des dérivées k-ièmes converge uniformément sur tout segment de Ω vers φ_k, fonction de classe $\mathscr{C}^{p-k}$ sur Ω telle que

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant (p-k), \quad \varphi_k^{(i)} = \varphi_{k+i}.$$

42. Soit f, une fonction strictement positive, continue, intégrable et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} f\big(x/n\big).$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle, mais la convergence n'est pas dominée.

43. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1, 1[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n(1-x^2)} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[A, B] \subset]-1, 1[$ vers la fonction nulle.
2. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[A, B] \subset]-1, 1[$ vers la fonction nulle, mais elle ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$.

44. Pour démontrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément, il faut établir qu'une propriété (fonction bornée, fonction continue...), qui devrait être conservée par convergence uniforme, n'est pas conservée.
44.1 La suite des fonctions

$$f_n = \left[x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{3k+2}\right]$$

converge simplement, mais pas uniformément, sur $[0, 1[$.
44.2 Les fonctions

$$f_n = \left[x \mapsto \frac{1-x^n}{1-x}\right]$$

sont bornées sur $\Omega = [0, 1[$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω, uniformément sur $[0, a]$ pour tout $0 < a < 1$, mais pas uniformément sur Ω.

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I =]-\infty, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f qui n'est pas continue sur I : la convergence n'est donc pas uniforme sur I.
2. Pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $J_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ vers f.
3. La fonction f est continue sur $I_0 =]0, +\infty[$, mais la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I_0 vers f.

46. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$, on pose

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. Elle converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

47. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $f_n(0) = 0$ et

$$\forall\, x \neq 0, \quad f_n(x) = x^2 \sin\frac{1}{nx}.$$

Pour tout $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-a, a]$ vers la fonction nulle, mais elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

48. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$. Si la dérivée seconde f'' est bornée sur $\mathbb{R}$, alors la dérivée f' est lipschitzienne et la suite des fonctions g_n définies par

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = n\big[f(x + 1/n) - f(x)\big]$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f'.

49. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I = [0, \pi/2]$, on pose

$$f_n(x) = n \sin x \cos^n x.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I et uniformément sur tout segment $[a,b]$ contenu dans $J =]0, \pi/2]$ vers la fonction nulle.
2. Comme la suite de terme général

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

ne tend pas vers 0, la convergence n'est pas dominée. Est-elle uniforme sur J ?

III

Approximation uniforme

50. On considère des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$.

50.1 ✍ *On note $\mathscr{L}^\infty(I)$, l'ensemble des applications continues par morceaux et bornées de I dans E.*

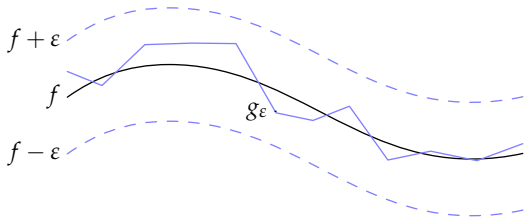
50.2 ➙ *L'ensemble $\mathscr{L}^\infty(I)$ est un sous-espace de $\mathscr{A}(I,E)$.*

50.3 La ***norme uniforme sur*** I d'une fonction $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ a été définie au **[18]** et est notée ici $\|f\|_\infty$, puisqu'on se limite à étudier la convergence uniforme sur I.

51.1 ✍ *Soit $A \subset \mathscr{L}^\infty(I)$. Une fonction $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ est* **approchée uniformément sur** *I par des éléments de A lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, g_\varepsilon \in A, \quad \|f - g_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

51.2 La définition **[51.1]** signifie que $g_\varepsilon(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à ε près pour tout $x \in I$.



51.3 En pratique
La fonction $f \in \mathscr{L}^\infty(I)$ est approchée uniformément sur I par des éléments de A si, et seulement si, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à A qui converge uniformément sur I vers f.

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - g_n\|_\infty = 0$$

52. ➙ **Approximation des fonctions continues par morceaux**
Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est approchée uniformément sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier. →**[153.8]**

III.1 Approximation polynomiale

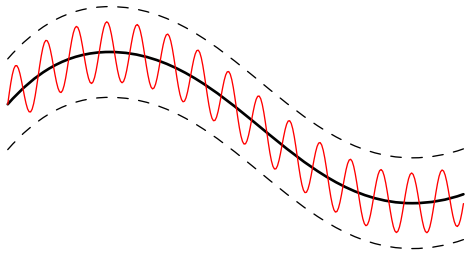
53. Nous nous intéressons ici à l'*approximation* de fonctions au moyen de fonctions polynomiales, ce qui n'a rien à voir avec l'*interpolation* de fonctions au moyen de fonctions polynomiales (au sens de Lagrange). →**[153.4]**

54. Théorème de Weierstrass
Le théorème **[54.1]**, que nous admettrons, résout *théoriquement* le problème de l'approximation polynomiale.

54.1 ➙ *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, une fonction continue. Il existe une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.*

54.2 On peut même *expliciter* une approximation polynomiale de toute fonction continue sur un segment. →**[142]**

55. Approximation simultanée
La convergence uniforme est une manière d'approcher les valeurs d'une fonction continûment dérivable f qui ne garantit pas qu'on approche en même temps les valeurs de la dérivée f'.
Autrement dit, même si la différence $(f - g_\varepsilon)$ est une fonction de *faible amplitude*, elle peut néanmoins présenter de *grandes variations*.



55.1 Soient f et g, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\|f - g\|_\infty \leqslant \big|f(x_0) - g(x_0)\big| + (b-a)\|f' - g'\|_\infty$$

pour tout $x_0 \in [a,b]$.

55.2 ➙ *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^1$. Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f et telle que la suite des dérivées $(g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f'.*

III.2 Raisonnement par densité

56. ***Raisonner par densité*** consiste à étendre le domaine de validité d'une propriété par une sorte de passage à la limite.

56.1 Si deux fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et si

$$\forall\, x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[,\quad f(x)=g(x),$$

alors $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

56.2 Si f est continue sur $[a,b]$ et positive sur $]a,b[$, alors f est positive sur $[a,b]$.

56.3 Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad xyf(x,y)=0,$$

alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2$.

56.4

$$\forall\, t\in[-1,1],\quad \operatorname{Arctan} t=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

56.5 Si f est continue et additive sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y),$$

alors $f(x)=xf(1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

56.6 Soient $]a,b[$, un intervalle ouvert borné et f, une application lipschitzienne sur $]a,b[$. Il existe un, et un seul, prolongement de f continu sur $[a,b]$ et ce prolongement est lipschitzien sur $[a,b]$.

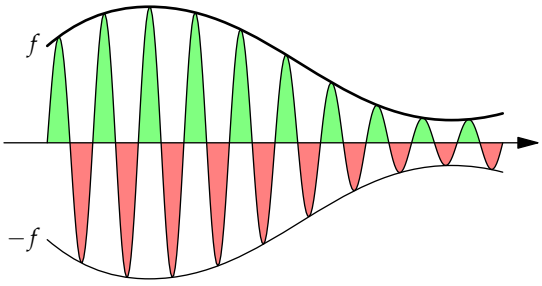
Lemme de Riemann–Lebesgue

57. Le résultat suivant est un exemple typique de raisonnement par densité. On le démontre d'abord sous une forme restreinte aux fonctions continûment dérivables avant de l'étendre aux fonctions continues par morceaux **[60]**.

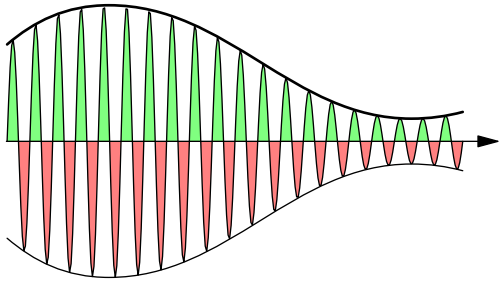
58. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=0.$$

59. Les figures suivantes montrent pourquoi l'intégrale de **[58]** tend vers 0.



Plus la fréquence du signal modulé en amplitude est élevée, plus chaque arche compense exactement l'arche précédente, de telle sorte que l'aire totale se rapproche de 0.



60. Pour toute fonction $f\in\mathscr{C}^{0,m}([a,b])$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=0.$$

Problème des moments

61. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, une fonction continue.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, le ***moment d'ordre*** k de f est défini par

$$m_k=\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans quelle mesure la fonction f est-elle caractérisée par la suite des moments $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

61.1 Problème des moments partiels

1. Si f change p fois de signe sur $[a,b]$, il existe une fonction polynomiale g de degré p telle que fg soit une fonction continue et de signe constant.
2. Si $m_k=0$ pour tout $0\leqslant k\leqslant n$, alors la fonction f s'annule au moins $(n+1)$ fois sur $[a,b]$.
3. Qu'en déduire lorsque $m_k=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$?

61.2 Raisonnement par densité

4. Si f et g sont continues sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\|f-g\|_\infty\|f\|_1+\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\right|.$$

5. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ telle que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

alors f est identiquement nulle.

Entraînement

62. Questions pour réfléchir

1. Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge en moyenne sur $[a,b]$ vers f.
2. Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, existe-t-il une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et affines par morceaux qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f ?
3. La fonction
$$f=[x\mapsto\sin 1/x]$$
est continue sur $I=]0,1]$. Il n'existe aucune suite de fonctions en escalier $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur I vers f. (On rappelle qu'une fonction en escalier n'a qu'un nombre fini de marches.)
4. Quel est l'intérêt d'approcher une fonction par des fonctions polynomiales ?
5. La fonction $f=[x\mapsto 1/x]$ est continue sur $I=]0,1]$. Existe-t-il une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur I vers f ?

63. Variante du théorème de Weierstrass [54.1]

63.1 Soit φ, une fonction affine sur $[a,b]$ telle que $|\varphi(a)|\leqslant\varepsilon$ et $|\varphi(b)|\leqslant\varepsilon$. Alors $\|\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

63.2 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, une fonction continue. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction polynomiale f_ε telle que

$$f_\varepsilon(a)=f(a),\quad f_\varepsilon(b)=f(b)\quad\text{et}\quad\|f-f_\varepsilon\|_\infty\leqslant\varepsilon.$$

64. Convergence faible

Soient E, un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de formes linéaires sur E. On suppose que ces formes linéaires sont uniformément lipschitziennes :

$$\exists\, K>0,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, f\in E,\quad |T_n(f)|\leqslant K\|f\|.$$

S'il existe un sous-espace F dense dans E tel que

$$\forall\, f\in F,\quad\lim_{n\to+\infty}T_n(f)=0,$$

alors

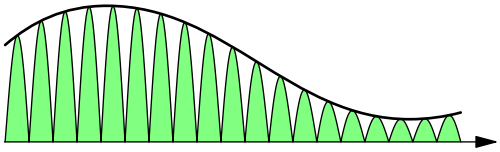
$$\forall\, f\in E,\quad\lim_{n\to+\infty}T_n(f)=0.$$

On dit alors que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge faiblement vers*** 0.
Faire le lien avec le théorème de Riemann–Lebesgue **[60]**.

65. Une variante du théorème de Riemann-Lebesgue

1.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi/n} \sin nt \,\mathrm{d}t = \frac{2}{n}.$$

2. Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)|\sin nt| \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$



En considérant les points $x_k = {}^{k\pi}/_n$, on pourra intégrer par parties dans le cas où f est continûment dérivable et conclure par densité.

66. *Suite de* **[8.88.5]** – En s'inspirant du théorème **[58]**, on prouve que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \sin xt \,\mathrm{d}t$$
tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

67. Intégrale de Dirichlet
On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et par
$$\forall\, t \neq 0, \quad f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}.$$

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-{}^{\pi}/_2, {}^{\pi}/_2]$ et
$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(t)\sin kt \,\mathrm{d}t = 0.$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\forall\, 0 < s < \pi, \quad 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos ks = \frac{\sin \frac{(2n+1)s}{2}}{\sin(s/2)}$$
et donc
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

3. Par conséquent,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$
ce qui nous donne la valeur de l'intégrale de Dirichlet :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

68. Densité des fonctions à support compact
Une fonction f définie sur I est ***à support compact*** lorsqu'il existe un segment $[A,B] \subset I$ tel que
$$\forall\, t \notin [A,B], \quad f(t) = 0.$$

1. L'ensemble $\mathscr{C}^0_K(I)$ des fonctions à support compact et continues sur I est un espace vectoriel.
2. Une fonction continue à support compact est bornée.
3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues à support compact qui converge uniformément sur I vers f, alors la fonction f est continue sur I. Condition pour que f soit une fonction à support compact.

4.a Toute fonction continue sur I et à support compact est intégrable sur I.

4.b Soit $f \in \mathscr{L}^1(I)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue g à support compact telle que $\|f-g\|_1 \leqslant \varepsilon$.

69. *Suite de* **[8.131]** – On suppose que f est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $g(x) \sim {}^1/_x$ au voisinage de 0.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{x\to 0} x\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(n+1)xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1},$$
donc, d'après le théorème de Weierstrass **[54.1]**,
$$\lim_{x\to 0} x\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\varphi(e^{-xt})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$
pour toute fonction φ continue sur $[0,1]$.

2. Pour tout $A > 0$,
$$\frac{1}{A}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{e^{-1}}^1 f(-A\,\ell\mathrm{n}\,u)\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

3.a Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ_ε, positive et continue sur $[0,1]$, telle que
$$\forall\, u \in [e^{-1},1], \quad \varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \int_0^1 \varphi_\varepsilon(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 1+\varepsilon.$$

3.b Il existe une constante $M > 0$ telle que
$$\forall\, A, \varepsilon > 0, \quad \left|\int_0^{e^{-1}} \varphi_\varepsilon(u)\big[1 - f(-A\,\ell\mathrm{n}\,u)\big]\,\mathrm{d}u\right| \leqslant M\varepsilon.$$

3.c Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall\, A \geqslant A_\varepsilon, \quad \left|\int_0^1 f(-A\,\ell\mathrm{n}\,u)\varphi_\varepsilon(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \varphi_\varepsilon(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \varepsilon.$$

3.d Par conséquent,
$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \sim A$$
lorsque A tend vers $+\infty$.

IV

Modes de convergence d'une série de fonctions

70. On considère une suite de fonctions $u_n : \Omega \to E$ et les fonctions $S_n : \Omega \to E$ définies par

$$\forall\, x \in \Omega, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

70.1 La ***série de fonctions*** $\sum u_n$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étudiée du point de vue des fonctions u_n. On dit alors que u_n est le ***terme général de la série*** et S_n est sa n-ième ***somme partielle***.
70.2 Comme plus haut **[2]**, les résultats qui suivent s'appliquent aux fonctions définies sur une partie Ω d'un espace vectoriel réel ou complexe V de dimension finie et qui prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel réel ou complexe E de dimension finie.
70.3 Ces hypothèses servent essentiellement à démontrer les théorèmes **[74]** et **[80]**.

IV.1 Convergence simple

71. ✍ *La série de fonctions* $\sum u_n$ **converge simplement** *sur* Ω *lorsque, pour tout* $x \in \Omega$, *la série* $\sum u_n(x)$ *converge dans* E.
Sa **somme** *est alors la fonction* $S : \Omega \to E$ *définie par*

$$\forall\, x \in \Omega, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

et son **reste d'ordre** $n \in \mathbb{N}$ *est la fonction* $R_n : \Omega \to E$ *définie par*

$$\forall\, x \in \Omega, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

72. Exemples
72.1 La série $\sum x^n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
72.2 La série $\sum {}^{x^n}/_{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{C}$.

IV.2 Convergence absolue

73. ✍ *On dit que la série de fonctions* $\sum u_n$ **converge absolument sur** Ω *lorsque, pour tout* $x \in \Omega$, *la série numérique de terme général positif*

$$\sum \|u_n(x)\|_E$$

converge.
Si $E = \mathbb{R}$ *(resp.* $E = \mathbb{C}$*), alors* $\|\cdot\|_E$ *désigne la valeur absolue (resp. le module).*

74. ➙ *Si une série de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie* E *converge absolument sur* Ω, *alors cette série de fonctions converge simplement sur* Ω.

IV.3 Convergence uniforme

75. La norme de la convergence uniforme sur Ω est définie en fonction de la norme choisie sur E.
75.1 ✍ *Pour toute fonction bornée* $g : \Omega \to E$, *on pose*

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \|g(x)\|_E.$$

75.2 Pour une suite de fonctions, la convergence uniforme implique la convergence simple **[16.4]**.
En revanche, pour une série de fonctions, la convergence uniforme suppose au préalable la convergence simple.
75.3 ✍ *Une série de fonctions* **converge uniformément sur l'ensemble** Ω *lorsque la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de ses sommes partielles converge uniformément sur* Ω *vers sa somme* S.

76. ➙ *On suppose qu'une série de fonctions* $\sum u_n$ *converge simplement sur* Ω.
Alors cette série converge uniformément sur Ω *si, et seulement si, la suite* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des restes converge uniformément sur* Ω *vers la fonction nulle.*

77. Méthode
En pratique, pour démontrer qu'une série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur Ω, on commence par établir la convergence simple et on cherche une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega, \quad \Big\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \Big\|_E \leqslant \varepsilon_n.$$

En pratique

78. Cas particuliers de convergence uniforme
Pour prouver la convergence uniforme d'une série de fonctions, il faut pouvoir majorer le reste de cette série, ce qui est une tâche difficile en général, mais pas toujours.
78.1 Cas d'une série télescopique
La série de fonctions $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge uniformément sur Ω si, et seulement si, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω.
78.2 Cas d'une série alternée
On considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions à valeurs *réelles* et on suppose que :

— Pour tout $x \in \Omega$, la *suite réelle* $\big(v_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant ;

— La *suite de fonctions* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω.

Dans ces conditions, la *série de fonctions* $\sum(-1)^n v_n$ converge uniformément sur Ω.
78.3 On verra plus loin **[85]** une condition suffisante simple pour établir la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Passage à la limite terme à terme

79. La conclusion du théorème **[80]** peut être comprise sous la forme suivante :

$$\lim_{x\to\omega}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\lim_{x\to\omega} u_n(x)\Big)$$

propriété qui est fausse en général. →**[6.111]**

80. ➙ *On rappelle que l'espace d'arrivée* E *est un espace vectoriel, réel ou complexe, de dimension finie* **[70]** *et que les fonctions* u_n *sont définies sur* Ω.
Hypothèses
1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* u_n *tend vers* $\ell_n \in E$ *au voisinage de* ω ;
2. *La série de fonctions* $\sum u_n$ *converge uniformément sur un voisinage* $\mathcal{V}_\omega$ *de* ω *(relatif à* Ω*).*

Alors la série $\sum \ell_n$ *converge dans* E, *la somme* S *de la série de fonctions* $\sum u_n$ *tend vers une limite finie au voisinage de* ω *et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \lim_{x\to\omega} S(x).$$

81. Convergence non uniforme
Les résultats suivants sont souvent utilisés pour démontrer que la convergence d'une série de fonctions n'est pas uniforme.
81.1 *Suite de* **[19]** – Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur Ω et s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω telle que la suite

$$\big(R_n(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

ne tende pas vers 0, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur Ω.
81.2 *Suite de* **[80]** – Si chaque fonction u_n admet une limite (finie) $\ell_n \in E$ au voisinage de ω :
1. Si la série $\sum \ell_n$ converge et que sa somme est différente de la limite de S au voisinage de ω, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge uniformément sur aucun voisinage de ω.
2. Si la série $\sum \ell_n$ diverge, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge uniformément sur aucun voisinage de ω.

82. Exemples

82.1 La série de fonctions $\sum xe^{-nx}$ converge simplement sur le segment $\Omega = [0,1]$. Elle converge uniformément sur $[a,1]$ pour tout $0 < a < 1$ sans converger uniformément sur Ω.

82.2 Fonction ζ de Riemann

La série de fonctions $\sum 1/n^x$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ et uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 1$, sans converger uniformément sur $]1,+\infty[$. →**[114]**

82.3 Fonction ζ alternée

Soit $\Omega =]0,+\infty[$. La série de fonctions $\sum (-1)^n/n^x$ converge simplement sur Ω et uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, sans converger uniformément sur Ω. →**[114]**

82.4 La série de fonctions $\sum x^n/(3n+2)$ converge simplement sur $\Omega = [-1,1[$. Elle converge uniformément sur $[-1,a]$ pour tout $0 < a < 1$ sans converger uniformément sur Ω.

IV.4 Convergence normale

83. ✍ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions bornées sur Ω. La série de fonctions $\sum u_n$* **converge normalement sur** Ω *lorsque la série numérique $\sum N_\Omega^\infty(u_n)$ converge.*

84.1 ➙ *La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur Ω si, et seulement si, il existe une série numérique $\sum M_n$ (absolument) convergente telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega, \quad \big\|u_n(x)\big\|_E \leqslant M_n.$$

84.2 Si $\sum u_n$ est une série de fonctions qui converge normalement sur Ω et si v est une fonction bornée sur Ω, alors la série de fonctions $\sum(u_n v)$ converge normalement sur Ω.

85. ➙ Convergence normale et convergence uniforme [70]

Si une série de fonctions bornées converge normalement sur Ω, alors elle est converge absolument et uniformément sur Ω.

86. Exemples

86.1 La série $\sum 1/(n^2+x^2)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

86.2 La série $\sum (-1)^n/(n+x^2)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

86.3 La série de fonctions

$$\sum \frac{1}{n+1}\mathbb{1}_{[n,n+1[}$$

converge uniformément et absolument sur $\mathbb{R}$, mais ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

87. Convergence normale des séries entières

Les ***séries entières*** $\sum a_n x^n$ seront traitées en détail dans un chapitre ultérieur.

87.1 ➙ *La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur le segment $[-R,R]$ si, et seulement si, la série numérique $\sum a_n R^n$ converge absolument.*

87.2 La série de fonctions $\sum x^n/n^2$ converge normalement sur le segment $[-1,1]$.

87.3 La série de fonctions $\sum n^2 x^n$ converge normalement sur le segment $[-a,a]$ pour tout $0 < a < 1$, mais ne converge pas normalement sur le segment $[-1,1]$.

87.4 La série de fonctions $\sum x^n/n!$ converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$, mais elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{C}$.

88. Convergence normale des séries trigonométriques

88.1 La série de fonctions $\sum a_n \cos nx$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la série numérique $\sum a_n$ converge absolument.

88.2 Pour tout $(a_n,b_n) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\varphi_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\,\cos(nx+\varphi_n).$$

88.3 ➙ *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *La série de fonctions $\sum(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*
2. *La série numérique $\sum\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ converge.*
3. *Les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.*

Entraînement

89. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[71]** – On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur Ω.

1.a Sa somme est aussi la limite simple de la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.b Ses sommes partielles S_n, sa somme S et ses restes R_n sont liés par la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega, \quad S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

et la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω vers la fonction nulle.

2. Les normes uniformes sur $\mathscr{B}(\Omega,E)$ associées à différentes normes sur E sont équivalentes.

3. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur Ω. Condition sur la fonction v pour que la série de fonctions $\sum(u_n v)$ converge uniformément sur Ω ?

4. On choisit une base $\mathscr{B} = (u_1,\dots,u_d)$ de E et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_{1,n}$, $f_{2,n}$, …, $f_{d,n}$, les composantes de la fonction f_n relatives à la base $\mathscr{B}$:

$$\forall\, x \in \Omega, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{d} f_{k,n}(x)\cdot u_k.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément ; resp. normalement) sur Ω si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, la série de fonctions $\sum f_{k,n}$ converge simplement (resp. uniformément ; resp. normalement) sur Ω.

5. Condition sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$?

90. L'espace $\mathscr{B} = \mathscr{L}^\infty(X,E)$ des applications bornées de X dans E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme sur X.

$$\forall\, f \in \mathscr{B}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \big\|f(x)\big\|_E$$

90.1 Une série de fonctions bornées $\sum u_n$ converge normalement sur X si, et seulement si, la série de vecteurs $\sum u_n$ converge absolument dans $\mathscr{B}$.

90.2 Si l'espace E est un espace vectoriel de dimension finie, alors l'espace $\mathscr{B}$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$: si la série de vecteurs $\sum u_n$ converge absolument dans $\mathscr{B}$, alors il existe un vecteur $S \in \mathscr{B}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right\|_\infty = 0.$$

91. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0,\pi], \quad f_n(x) = \cos^n x \sin x.$$

Pour $0 < \theta < \pi/2$:

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[\theta,\pi-\theta]$, mais pas sur $[0,\theta]$, ni sur $[\pi-\theta,\pi]$.
2. Elle converge uniformément sur $[\theta,\pi]$, mais pas sur $[0,\theta]$.

V

Étude de la somme

92. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que cette série de fonctions converge simplement sur une partie Ω d'un espace vectoriel V de dimension finie et on note S, sa somme.

V.1 Continuité

93. Le théorème suivant est un cas particulier du Théorème de passage à la limite terme à terme **[80]** dans lequel le point ω appartient à l'ensemble de définition Ω.

94. ↣ Théorème de continuité [92]
Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues sur Ω qui converge uniformément sur un voisinage de x_0 dans Ω, alors sa somme S est continue au point x_0.

95. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

est continue sur $]0,+\infty[$, tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

96. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ et tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

97. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ell\mathrm{n}\Big(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\Big)$$

est paire et continue sur $\mathbb{R}$. Elle tend vers $\ell\mathrm{n}({}^2/_\pi)$ au voisinage de $\pm\infty$ **[6.32]**.

98. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, $S(x) \sim {}^1/_x$ au voisinage de 0.

99. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big)$$

est croissante et continue sur $]-1,+\infty[$.
Pour tout $x > -1$,

$$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$$

et $S(x) \sim {}^{-1}/_{(1+x)}$ lorsque x tend vers -1.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a $S(n) = H_n$ et $S(x) \sim \ell\mathrm{n}\, x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

100. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$$

est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
Le produit $xS(x)$ tend vers ${}^{\pi^2}/_6$ lorsque x tend vers $+\infty$ et

$$S(x) \sim \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \sim -\ell\mathrm{n}\, x$$

lorsque x tend vers 0.

101. Soit $\alpha > 0$. La fonction f, définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha x},$$

est strictement décroissante et continue sur $]0,+\infty[$. Elle tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et comme elle tend vers $+\infty$ au voisinage de 0, la série ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.
Lorsque x tend vers 0,

$$f(x) \sim \frac{\Gamma({}^1/_\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}}.$$

102. La fonction S_0 définie par

$$\forall\, x > 0, \quad S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}\Big)$$

est continue sur $]0,+\infty[$, tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et $S(1) = e - 1$ par **[145]**.
On déduit de la relation fonctionnelle

$$\forall\, x > 0, \quad xS_0(x) - S_0(x+1) = 1$$

que $S_0(x) \sim {}^e/_x$ au voisinage de 0 et que $S_0(x) \sim {}^1/_x$ lorsque x tend vers $+\infty$. →**[126]**

103. Variante
Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite u_n par

$$\forall\, 0 \leqslant p \leqslant n, \quad u_n(p) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, p > n, \quad u_n(p) = (1 - {}^n/_p)^{p\alpha},$$

de telle sorte que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p) = \sum_{n=0}^{p} \Big(1 - \frac{n}{p}\Big)^{p\alpha}.$$

1. $$\forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leqslant u_n(p) \leqslant e^{-n\alpha}.$$

2. Considérée comme une série de fonctions définies sur $\Omega = \mathbb{N}$, la série $\sum u_n$ converge normalement sur Ω. En particulier,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n(p) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}.$$

104. La fonction définie par

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}$$

est continue de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$. Elle tend vers $+\infty$ au voisinage de $(0,0)$.

V.2 Intégration terme à terme (version uniforme)

105. La convergence uniforme sur un segment permet d'intégrer terme à terme la somme d'une série de fonctions. On applique souvent les théorèmes **[105.1]** et **[105.2]** en vérifiant que la série converge normalement sur $[a,b]$.

105.1↣ *Suite de* **[92]** *– Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a,b]$, alors la somme de la série de fonctions est continue sur $[a,b]$, la série numérique*

$$\sum \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

105.2➙ *Suite de* **[92]** – *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues et intégrables sur l'intervalle borné $]a,b[$, qui converge uniformément sur $]a,b[$. Alors la somme de la série de fonctions est intégrable sur $]a,b[$, la série numérique*

$$\sum \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

106. Comparatif des théorèmes d'intégration terme à terme
On dispose ainsi de trois théorèmes pour justifier une intégration terme à terme :

1. la version uniforme du théorème d'intégration terme à terme **[105]** ;
2. la version lebesguienne du théorème d'intégration terme à terme **[8.123]** ;
3. et le théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles **[8.126.2]**.

106.1 On doit commencer par essayer d'utiliser le théorème lebesguien **[8.123]**, qui s'applique sur un intervalle quelconque (borné ou non).
106.2 Si les hypothèses du théorème **[8.123]** ne sont pas satisfaites :

1. Sur un intervalle borné, et *seulement* sur un intervalle borné, on peut essayer d'utiliser le théorème **[105]** en cherchant à vérifier
   - 1.a si la convergence est normale
   - 1.b ou, à défaut, si la convergence est uniforme ;
2. Sur un intervalle quelconque, on ne peut qu'essayer d'utiliser le théorème de convergence dominée.

107. Le théorème **[105.1]** démontre que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)},$$

tandis que, dans ce cas, le théorème lebesguien **[8.123]** ne peut pas s'appliquer.

108. La fonction Ψ définie par

$$\forall\, x \in]0,1[\,, \quad \Psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\Big)$$

est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1 \Psi(x)\,\mathrm{d}x = \ell\mathrm{n}\,2$.

109. *Suite de* **[8.145]** – Les séries de fonctions

$$\sum \frac{\sin nt}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\cos nt}{n}$$

ne convergent pas uniformément sur $]0,2\pi[$.

110. On *admet* que

$$\forall\, 0 < \alpha \leqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi\alpha}{\mathrm{sh}\,\pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$

En intégrant cette égalité sur $]0,1]$, on obtient

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1+\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}.$$

V.3 Dérivation terme à terme

111. La convergence uniforme locale permet de dériver terme à terme la somme d'une série de fonctions. On applique souvent les théorèmes **[112]** et **[113]** en vérifiant que la série converge normalement sur tout segment de l'intervalle Ω. Il arrive parfois que la convergence soit normale sur Ω tout entier.

112. ➙ *Suite de* **[92]** –
On suppose ici que Ω est un intervalle de $V = \mathbb{R}$.
Si $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω qui converge simplement sur Ω et si la série dérivée $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de Ω, alors la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\forall\, x \in \Omega, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

113. ➙ *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur l'intervalle Ω telle que, pour tout entier $k \leqslant p$, la série*

$$\sum u_n^{(k)}$$

converge uniformément sur tout segment de Ω, alors la somme S est de classe $\mathscr{C}^p$ sur Ω et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p,\ \forall\, x \in \Omega, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x).$$

114. Les fonctions de Riemann
Les fonctions de Riemann sont définies par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \zeta_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

114.1

$$\forall\, x > 1, \quad \zeta_a(x) = (2^{1-x}-1)\zeta(x)$$

114.2 La fonction ζ est décroissante, convexe et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. La fonction ζ_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
114.3 Les deux fonctions ζ et ζ_a tendent respectivement vers 1 et vers -1 au voisinage de $+\infty$.
Pour une étude plus précise de ζ, voir **[6.36]**.

115. La fonction S définie par

$$S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\Big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et de période 1. Elle est strictement décroissante sur $]0,1[$ et n'est pas intégrable sur $]0,1[$.

116. *Suite de* **[96]** – La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

117. *Suite de* **[98]** – La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $S(x) \sim {}^1\!/_{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

V.4 Applications

118. On considère ici une algèbre associative unitaire E de dimension finie, munie d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$.
Dans la pratique, cette algèbre E est l'algèbre $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ des matrices carrées ou l'algèbre $\mathrm{L}(V)$ des endomorphismes d'un espace V de dimension finie et la norme $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée à une norme quelconque sur $\mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{K})$ ou sur V.

Série géométrique

119. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, u \in E, \quad f_n(u) = u^n.$$

119.1 Les fonctions f_n sont continues sur E et, pour tout $0 < r < 1$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur la boule fermée $B_f(0_E, r)$.
119.2 L'application

$$F = \big[u \mapsto (1_E - u)^{-1}\big]$$

est continue sur la boule unité ouverte $[\|u\| < 1]$.

120. Soit $u \in E$, fixé non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = t^n \cdot u^n$$

et on considère l'intervalle ouvert

$$I = \left]-\frac{1}{\|u\|}, \frac{1}{\|u\|}\right[.$$

120.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_n'(t) = nt^{n-1} \cdot u^n.$$

120.2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et la série dérivée $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment $[-r, r]$ contenu dans l'intervalle ouvert I.
120.3 Pour tout $u \in E$, l'application

$$F_u = \left[t \mapsto (1_E - tu)^{-1}\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert I et

$$\forall\, t \in I, \quad F_u'(t) = u(1_E - t \cdot u)^{-2} = (1_E - t \cdot u)^{-2}u.$$

Série exponentielle

121. ➙ *L'application*

$$\exp = \left[u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}u^n\right]$$

est continue sur E.

122. ➙ *Pour tout $u \in E$ fixé, l'application $[t \mapsto \exp(tu)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et*

$$\frac{\mathrm{d}\exp(tu)}{\mathrm{d}t} = u\exp(tu) = \exp(tu)u.$$

123. ▷ *Soient $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{K})$. La fonction X définie par*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA)X_0$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t).$$

124. Propriété de morphisme
Soient u et v, deux vecteurs de E qui commutent :

$$uv = vu.$$

124.1 La fonction f définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(tu) \cdot \exp(-tu)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est identiquement nulle.
124.2 Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\exp(tu)$ et v commutent.
124.3 La fonction g définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \exp(tu) \cdot \exp(tv) \cdot \exp[-t(u+v)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est identiquement nulle.
124.4➙ *Si deux vecteurs u et v de E commutent, alors*

$$\exp(u) \cdot \exp(v) = \exp(u+v) = \exp(v) \cdot \exp(u).$$

Entraînement

125. Questions pour réfléchir
1. Condition suffisante pour que la somme d'une série de fonctions soit continue sur Ω.
2. Si la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $]-1,1[$, alors les deux séries $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$ convergent.
3. *Suite de* **[105.2]** – Soit $\sum u_n$, une série de fonctions continues et intégrables sur l'intervalle $I =]0,1[$, qui converge uniformément sur tout segment contenu dans I.
La somme S de cette série de fonctions est continue sur I, mais elle n'est pas nécessairement intégrable sur I.
4. Soit $I =]a,b[$, un intervalle ouvert borné. Si $\sum u$ est une série de fonctions continues sur I qui converge normalement sur I, alors les hypothèses du théorème lebesguien d'intégration terme à terme **[8.123]** sont satisfaites.
5. *Suite de* **[106]** – Si la série numérique

$$\sum \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

est semi-convergente, quels théorèmes d'intégration terme à terme peut-on appliquer ?
6. *Suite de* **[119.2]** – Quelle que soit la norme sur E, la fonction F est continue sur un voisinage de 0_E.
7. *Suite de* **[120.3]** – Quelle que soit la norme sur E, la fonction F_u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de 0.

126.1 La fonction S_1 définie par

$$\forall\, x > 0, \quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
126.2 Lorsque x tend vers 0,

$$S_1(x) \sim \frac{1}{x}.$$

126.3 La fonction S_1 tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et comme

$$\forall\, x > 0, \quad xS_1(x) - S_1(x+1) = \frac{1}{e}$$

alors $S_1(x) \sim 1/ex$ au voisinage de $+\infty$.
126.4 *Suite de* **[102]** – On déduit de **[145]** que $S_1(1) = 1 - e^{-1}$ ainsi que

$$\forall\, x > 0, \quad S_1(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e}S_0(x).$$

127. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}(1+n^2x^2)}{n^3}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

128. Fonction génératrice d'une loi de probabilité [11]
128.1 La fonction G est croissante, continue et convexe sur le segment $[0,1]$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$.
128.2 Si la série numérique $\sum np_n$ converge, alors la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\forall\, x \in [0,1], \quad G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)p_{n+1}x^n.$$

129. On étudie les fonctions S et U définies par

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ell\mathrm{n}\,n\,x^n \quad\text{et}\quad U(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ell\mathrm{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-\frac{1}{n}\right]x^{n+1}.$$

129.1

$$\forall\, x\in\,]-1,1[\,,\quad \ell\mathrm{n}(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

129.2 La série $\sum \ell\mathrm{n}\,n\,x^n$ converge absolument sur $]-1,1[$.
129.3 La fonction S est définie et continue sur $]-1,1[$ et

$$S(x)=\mathcal{O}(x^2)$$

pour x voisin de 0. Comme

$$\forall\, x\in[0,1[\,,\quad S(x)\geqslant\frac{x}{1-x},$$

la fonction S n'est pas intégrable sur $[0,1[$.
129.4 La fonction U est définie et continue sur $[-1,1]$.
129.5 Il existe un réel ℓ tel que

$$(1-x)S(x)=-x\,\ell\mathrm{n}(1-x)+\ell+o(1)$$

lorsque x tend vers 1.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

130. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de suite de fonctions bornées qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas bornée.
2. Exemple de suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction bornée sans être uniformément bornée.
3. Exemple de suite de fonctions polynomiales qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas polynomiale.
4. Exemple de suite de fonctions strictement positives (resp. strictement négatives) qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas strictement positive (resp. strictement négative).
5. Exemple de suite de fonctions strictement croissantes (resp. strictement décroissantes) qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas strictement croissante (resp. strictement décroissante).
6. Exemple de suite de fonctions strictement convexes (resp. strictement concaves) qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas strictement convexe (resp. strictement concave).
7. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions intégrables sur Ω telle que la limite simple f soit continue par morceaux mais pas intégrable sur Ω.
8. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues (resp. dérivables, resp. continues par morceaux) telle que la limite simple f ne soit pas continue (resp. dérivable, resp. continue par morceaux) sur Ω.
9. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions lipschitziennes qui converge simplement vers une fonction qui n'est pas lipschitzienne.
10. Exemple de fonction bornée sur tout segment $[A,B]$ contenu dans $]0,1[$ sans être bornée sur $]0,1[$.
11. Exemple de fonction lipschitzienne sur tout segment $[A,B]\subset\,]0,1[$ sans être lipschitzienne sur $]0,1[$.
12. Exemple de fonction intégrable sur tout segment $[A,B]$ contenu dans $]0,1[$ mais pas intégrable sur $]0,1[$.
13. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout segment $[A,B]\subset\,]a,b[$, mais ne converge pas uniformément sur $]a,b[$.
14. Exemple de suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent uniformément sur Ω sans que la suite $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω.
15. Exemple de suite de fonctions polynomiales $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas polynomiale.
16. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur l'intervalle $\Omega=\,]0,+\infty[$ telles que les limites

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$$

existent sans être égales.
17. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur l'intervalle $\Omega=\,]0,+\infty[$ telles qu'une seule des deux limites

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$$

existe.
18. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur Ω qui converge uniformément sur Ω sans converger en moyenne sur Ω vers f.
19. Exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur Ω qui converge uniformément sur tout segment $[A,B]\subset\Omega$ vers une fonction continue par morceaux sans que la convergence soit dominée.
20. Exemple de série $\sum(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et intégrables sur $\Omega=[0,+\infty[$ qui converge normalement sur Ω mais telle qu'on ne puisse pas intégrer terme à terme.
21. Exemples de situation où une fonction est approchée par une fonction en escalier.
22. Exemple de situation où une fonction est approchée par une fonction affine par morceaux.

131. Méthodes

1. *Suite de* **[5]** – Liste, aussi complète que possible, des propriétés ponctuelles des fonctions qui sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. *Suite de* **[9]** – Liste, aussi complète que possible, des propriétés locales des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. *Suite de* **[9]** – Liste, aussi complète que possible, des propriétés globales des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
4. De quelles manières peut-on démontrer que la suite des fonctions $f_n=[x\mapsto x^n]$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $[0,1[$?
5. Quelles propriétés de la somme d'une série de fonctions peuvent-elles être déduites de la convergence simple ?

132. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[17]** – Que dire d'une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$?
2. Une fonction φ est ***réglée*** sur l'intervalle $\Omega=\,]a,b[$ lorsque, pour tout $x\in\,]a,b[$, la fonction φ admet une limite à gauche et une limite à droite (finies) en x.
Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions réglées sur $]a,b[$ converge uniformément sur $]a,b[$ vers f, alors f est réglée.
3. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur Ω converge uniformément sur Ω vers f, la fonction f est-elle continue par morceaux sur Ω ?
4. En quel(s) sens une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$ est-elle la limite d'une suite de fonctions polynomiales ?
5. Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est une fonction polynomiale.

Approfondissement

133. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in I=\,]0,+\infty[$, on pose

$$f_n(x)=nx^2e^{-nx}\quad\text{et}\quad g_n(x)=n^2xe^{-nx}.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle I vers la fonction nulle.
2. Pour tout $a>0$, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ vers la fonction nulle, mais elle ne converge pas uniformément sur I.

134. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Condition sur l'intervalle I pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I ?

135. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}).$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. Condition sur l'intervalle $I \subset [0,1]$ pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I ?

136. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n f(x)$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$. Condition sur f pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$?

137. **Approximation uniforme de** $\exp(-x)$
Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in I = [0,+\infty[$, on pose

$$f_n(x) = (1 + {}^{x}\!/_{n})^{-n}.$$

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur I vers $f = \big[x \mapsto e^{-x}\big]$.
2. Comme

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad t - {}^{t^2}\!/_{2} \leqslant \ell\mathrm{n}(1+t) \leqslant t,$$

alors, pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,a]$ vers f et

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in I, \quad f_n(x) \geqslant f(x) > 0.$$

3. Soit $a > 0$. Alors

$$\forall\, x \geqslant a, \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant f(a) + \big[f_n(a) - f(a)\big]$$

et la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur I vers f.

138. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} n^2x(1-nx) & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant {}^{1}\!/_{n}, \\ 0 & \text{pour } {}^{1}\!/_{n} < x \leqslant 1. \end{vmatrix}$$

1. La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. Elle converge uniformément sur $[a,1]$ pour tout $0 < a < 1$.
2. Comme la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

ne tend pas vers 0, la convergence n'est ni dominée, ni uniforme sur $]0,1]$.

139. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui converge simplement sur l'intervalle Ω. Sa somme est notée S.
1. On suppose que, pour tout entier $0 \leqslant k < p$, la série

$$\sum u_n^{(k)}$$

converge simplement sur Ω et que la série

$$\sum u_n^{(p)}$$

converge uniformément sur tout segment de Ω. Alors le théorème **[113]** prouve que la somme S est de classe $\mathscr{C}^p$ sur Ω.
2. La remarque précédente est-elle utile pour démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$?

140. **Méthode de Picard**
On note f_0, la fonction identiquement égale à 1 sur le segment $[0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. La série de fonctions $\sum(f_n - f_{n+1})$ converge normalement sur $[0,1]$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, telle que

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in [0,1], \quad f'(x) = f(x - x^2).$$

141. Soit $I = [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$. Pour tout $x \in I$, on pose **[6.34]**

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

La fonction S est continue sur I et

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad S({}^{1}\!/_{x}) = S(x).$$

La fonction S est croissante sur $[0,1[$, décroissante sur $]1,+\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

142. **Approximation uniforme et polynômes de Bernstein**
Pour tout entier $n \geqslant 1$, toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et tout réel $x \in [0,1]$, on pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) x^k (1-x)^{n-k}.$$

142.1 On dit qu'un endomorphisme T de $\mathscr{C}^0([0,1])$ est ***positif*** lorsque l'inégalité

$$\big[\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) \leqslant g(x)\big]$$

implique l'inégalité

$$\big[\forall\, x \in [0,1], \quad T(f)(x) \leqslant T(g)(x)\big].$$

1. L'application B_n est un endomorphisme positif (non surjectif) de $\mathscr{C}^0([0,1])$.
2.

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0([0,1]),\ \forall\, x \in [0,1], \quad \big|B_n(f)(x)\big| \leqslant B_n\big(|f|\big)(x).$$

3.a

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

3.b

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \quad \frac{k}{n}\Big(\frac{k}{n} - 1\Big)\binom{n}{k} = \frac{1-n}{n}\binom{n-2}{k-1}$$

4. On considère les trois fonctions polynomiales I, X et Y définies par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad I(t) = 1, \quad X(t) = t, \quad Y(t) = t^2.$$

4.a

$$B_n(I) = I, \qquad B_n(X) = X.$$

4.b

$$B_n(Y) = B_n(Y-X) + B_n(X) = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)Y + \frac{1}{n}X.$$

142.2

5. Soient $\varepsilon > 0$ et $t_0 \in [0,1]$.

5.a Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0,1] \cap]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\,, \quad \big|f(t)-f(t_0)\big| \leqslant \varepsilon$$

et un réel $M_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)-f(t_0)\big| \leqslant \varepsilon + M_\varepsilon (t-t_0)^2.$$

5.b Pour tout tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$,

$$\big|B_n(f)(x) - f(t_0)\big| \leqslant \varepsilon + M_\varepsilon B_n(Y - 2t_0X + t_0^2 I)(x).$$

5.c Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\big|B_n(f)(t_0) - f(t_0)\big| \leqslant \varepsilon + \frac{M_\varepsilon}{4n}.$$

6. La suite $\big(B_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

143. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

143.1 Si la matrice B est antisymétrique, alors la matrice $\exp(xB)$ est orthogonale, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

143.2 L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tr}\big(\exp(xB)A\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \operatorname{tr}\big(B\exp(xB)A\big).$$

143.3 Si $\operatorname{tr}(PA) \leqslant \operatorname{tr} A$ pour toute matrice orthogonale P, alors la matrice A est symétrique.

Pour aller plus loin

144. Questions pour réfléchir

1. La notion de convergence absolue n'a d'intérêt que dans un espace complet.
2. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur Ω et que les fonctions u_n prennent leurs valeurs dans un espace qui n'est pas complet. Que peut-on en déduire ?
3. Si les hypothèses du théorème lebesguien d'intégration terme à terme [**8.123**] sont satisfaites, alors les hypothèses du théorème de convergence dominée [**8.126.2**] le sont aussi.

145. Approximation polynomiale de $\exp(z)$

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = \Big(1+\frac{1}{n}X\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}X^k.$$

145.1 Pour tout nombre *réel* x et pour tout entier n assez grand,

$$P_n(x) = \exp\big[n\,\ell\mathrm{n}(1+x/n)\big] = \exp\big[x + \mathcal{O}(1/n)\big].$$

La suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$, vers la fonction exp.

145.2 Extension au domaine complexe

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

1.

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \Big|1+\frac{z}{n}\Big| = \sqrt{1+\frac{2r}{n}\cos\theta + \frac{r^2}{n^2}}.$$

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note θ_n, la détermination principale de l'argument de $(1+z/n)$.
Pour tout n assez grand, $|\theta_n| < \pi/2$ et

$$n\theta_n \underset{n\to+\infty}{=} n\operatorname{Arctan}\Big(\frac{r}{n}\sin\theta + o(1/n)\Big).$$

3. La suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers la fonction exp.
4. La convergence est uniforme sur tout disque de centre 0 et de rayon $r_0 > 0$.

145.3 Développement en série entière

On fixe $z \in \mathbb{C}$ et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit la *suite* u_k en posant

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad u_k(n) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant k, \quad u_k(n) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}z^k.$$

On la considère comme une *fonction* définie sur $\Omega = \mathbb{N}$ [**103**].
La série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur tout voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$, donc

$$\exp(z) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

146. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction f. Alors :

$$\inf_{x\in[a,b]} f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

147. Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[a,b]$ qui converge vers x et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions (pas nécessairement continues) qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite de terme général $f_n(x_n)$ converge vers $f(x)$.

148. *Suite de* [**25.2**] – On suppose que φ est continue sur Ω.

1. La suite de fonctions $(\varphi\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers $\varphi\circ f$.
2. Si Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors la suite $(\varphi\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ contenu dans I.
3. Exemple pour lequel la convergence n'est pas uniforme sur I.

149. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge uniformément sur $[0,1[$ vers une fonction f.

1.a La suite $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1.b Il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$.

2. La fonction f admet un prolongement continu sur $[0,1]$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers ce prolongement.

150. Théorème de Dini

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues à valeurs réelles, qui converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction nulle. On suppose que cette suite est décroissante, au sens où :

$$\forall\, x \in [a,b], \quad 0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = N^\infty_{[a,b]}(f_n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $M_n = f_n(x_n)$.
2. Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel $\omega \in [a,b]$.
3. La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
4. Si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, p \leqslant \varphi(k), \quad f_p(x_{\varphi(k)}) \geqslant f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) \geqslant \varepsilon.$$

En particulier, $f_p(\omega) \geqslant \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Conclure.

151. Théorème de Dini-Pólya
On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur un segment $[a,b]$, à valeurs réelles, qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f.
Si chaque fonction f_n est croissante sur $[a,b]$ et si la fonction f est continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme sur $[a,b]$.

152. *Suite de* **[42]** – On ne suppose plus que f est strictement positive (en conservant les autres hypothèses).
Si la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est dominée sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$\forall\, a>0,\quad \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_{na}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x=0$$

et la fonction f est identiquement nulle.

153. Interpolation et approximation

153.1 Échantillonnage
Soit f, une fonction bornée sur un segment $[a,b]$.
Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on ***discrétise*** le segment $[a,b]$ en introduisant une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$:

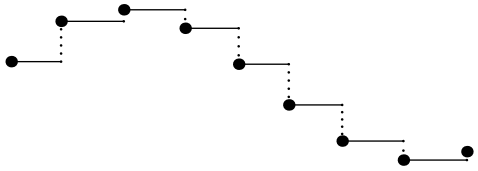
$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

et on ***échantillonne*** la fonction f en considérant la famille $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par :

$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant n,\quad y_k=f(x_k).$$

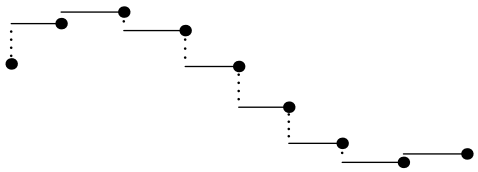
153.2 On peut ***interpoler*** l'échantillon $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par des fonctions constantes en posant

$$\forall\, 0\leqslant k<n,\ \forall\, x_k<t<x_{k+1},\quad g_n(t)=y_k$$



ou en posant

$$\forall\, 0<k\leqslant n,\ \forall\, x_k<t<x_{k+1},\quad h_n(t)=y_{k+1}.$$

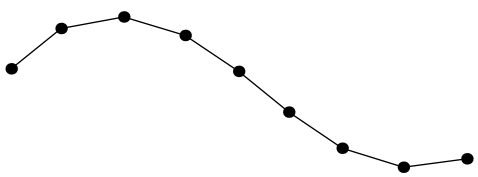


Dans les deux cas, on interpole f par une fonction en escalier.
Comment définir les fonctions en escalier g_n et h_n aux points d'abscisses $t=x_k$? Discuter l'importance de ce choix.

153.3 On peut aussi interpoler l'échantillon $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par des fonctions affines :

$$\forall\, 0\leqslant k<n,\ \forall\, x_k\leqslant t\leqslant x_{k+1},\qquad \varphi_n(t)=\frac{x_{k+1}-t}{x_{k+1}-x_k}y_k+\frac{t-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1},$$

ce qui revient à interpoler f par une fonction continue et affine par morceaux.



153.4 Il ne faut pas confondre l'***interpolation*** :
à partir d'un nombre *fini* de points du graphe de f, on construit une fonction définie sur l'intervalle I tout entier ;
avec l'***approximation*** :
on construit une fonction, éventuellement au moyen d'un échantillon de points du graphe de f, qui est *assez proche* (en un sens à préciser) de f mais sans nécessairement passer par certains points choisis du graphe de f.

153.5 Approximation des fonctions continues sur un segment
On suppose que f est continue sur $[a,b]$. Les fonctions g_n, h_n et φ_n ont été définies au **[153.1]**.

1. Si g_n est continue à droite, alors
$$\|f-g_n\|_\infty=\max_{0\leqslant k<n}\ \sup_{t\in[x_k,x_{k+1}[}\big|f(t)-f(x_k)\big|.$$
2. Si h_n est continue à gauche, alors
$$\|f-h_n\|_\infty=\max_{0\leqslant k<n}\ \sup_{t\in]x_k,x_{k+1}]}\big|f(t)-f(x_{k+1})\big|.$$
3. Si la fonction f est continue sur $[a,b]$, alors
$$\|f-\varphi_n\|_\infty\leqslant\max\{\|f-g_n\|_\infty,\ \|f-h_n\|_\infty\}$$

153.6 Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est approchée uniformément sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier et par des fonctions continues et affines par morceaux sur $[a,b]$.

153.7 Commenter **[153.4]** à la lumière du théorème **[153.6]**.

153.8 Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux
On suppose que f est continue par morceaux sur $[a,b]$.

1. Il existe une subdivision
$$a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_N=b$$
et une famille de fonctions $(\varphi_i)_{0\leqslant i<N}$ telles que chaque fonction φ_i soit continue sur le segment $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$ et que
$$\forall\, 0\leqslant i<N,\ \forall\, x\in\,]\alpha_i,\alpha_{i+1}[,\quad \varphi_i(x)=f(x).$$
2. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\theta>0$ tel que
$$\forall\, 0\leqslant i<N,\forall\,\alpha_i<x,y<\alpha_{i+1},\qquad |x-y|\leqslant\theta\implies\big|f(x)-f(y)\big|\leqslant\varepsilon.$$
3. Pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $0\leqslant i<N$, il existe une fonction en escalier $\Phi_i:[\alpha_i,\alpha_{i+1}]\to\mathbb{R}$ telle que
$$\sup_{x\in]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}\big|\Phi_i(x)-f(x)\big|\leqslant\varepsilon.$$
4. Il existe une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

153.9 Approximation en moyenne des fonctions continues par morceaux
On suppose que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et on conserve la subdivision $(\alpha_i)_{0\leqslant i<N}$ définie au **[153.8]**.

1. Il existe deux réels $M>0$ et $\delta>0$ tel que
$$\forall\, x\in[a,b],\quad \big|f(x)\big|\leqslant M\quad\text{et}\quad\forall\, 0\leqslant i<N,\quad \delta\leqslant(\alpha_{i+1}-\alpha_i).$$
2. On choisit $0<\theta<\delta/3$. Il existe une fonction continue $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ qui soit affine sur les segments
$$[\alpha_0,\alpha_0+\theta],\ [\alpha_1-\theta,\alpha_1+\theta],\dots,[\alpha_i-\theta,\alpha_i+\theta],\dots,[\alpha_N-\theta,\alpha_N]$$
et telle que
$$\forall\, 0\leqslant i<N,\ \forall\, x\in[\alpha_i+\theta,\alpha_{i+1}-\theta],\quad g(x)=f(x).$$
Si $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$, alors
$$\int_a^b\big|f(x)-g(x)\big|\,\mathrm{d}x\leqslant 4MN\theta.$$
3. Il existe une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge en moyenne vers f.
4. Il existe une suite de fonctions continues et affines par morceaux sur $[a,b]$ qui converge en moyenne vers f.

154. Soient E, un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$; $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, une base de E et $\mathscr{B}^*$, la base duale de $\mathscr{B}$.

154.1 Densité pour la convergence uniforme
Soit $I = [a, b]$.

1. La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $f : I \to E$ pour la norme $\|\cdot\|$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in I} \big\|\varphi_n(t) - f(t)\big\| = 0$$

si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, la suite des composantes $(e_k^* \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la composante $e_k^* \circ f$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in I} \big|e_k^* \circ \varphi_n(t) - e_k^* \circ f(t)\big| = 0.$$

2. Si la fonction $f : I \to E$ est continue par morceaux, alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur I qui converge uniformément sur I vers f. →**[52]**

3. Si la fonction $f : I \to E$ est continue, alors il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et affines par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers f. →**[153.6]**

154.2 Densité pour la convergence en moyenne
Si $f : I \to E$ est une fonction intégrable sur I, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur I telles que

$$\int_I \big\|f(t) - f_n(t)\big\|_E \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

155. Une courbe de Peano
Une ***courbe de Peano*** est un arc paramétré

$$F = \big[t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)\big]$$

continu sur $[0, 1]$, dont le support est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.
L'existence d'une telle courbe signifie qu'il existe des applications continues et surjectives de $[0, 1]$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

155.1 La construction suivante est dûe à Liu Wen, *A Space Filling Curve*, The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 4 (Apr., 1983), p. 283.

155.2 Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant 9$, on pose

$$I_k = \Big[\frac{k}{10}, \frac{(k+1)}{10}\Big].$$

Il existe deux fonctions f et g, continues sur $\mathbb{R}$, de période 1, telles que

$$\begin{array}{llll} \forall\, t \in I_1 \cup I_3, & f(t) = 0 & \forall\, t \in I_5 \cup I_7, & f(t) = 1 \\ \forall\, t \in I_1 \cup I_5, & g(t) = 1 & \forall\, t \in I_3 \cup I_7, & g(t) = 0. \end{array}$$

155.3 Les fonctions φ et ψ définies pour tout $t \in [0, 1]$ par

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} f(10^k t) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} g(10^k t)$$

sont continues sur $[0, 1]$.

155.4 Soient $0 < x, y < 1$, représentés en base 2 :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^k} \quad \text{et} \quad y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y_k}{2^k}.$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$t_k = \begin{vmatrix} 1 \text{ si } (x_k, y_k) = (0, 0), \\ 3 \text{ si } (x_k, y_k) = (0, 1), \\ 5 \text{ si } (x_k, y_k) = (1, 0), \\ 7 \text{ si } (x_k, y_k) = (1, 1) \end{vmatrix}$$

et enfin

$$t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k}{10^k} \in \,]0, 1[\,.$$

Alors $(x, y) = F(t)$.