Fonctions définies par une intégrale

I

Intégrale fonction des bornes

1. Soit f, une fonction intégrable sur l'intervalle ouvert I. Pour tout $x_0 \in I$, on considère la fonction F_{x_0} définie par

$$\forall\, x \in I, \quad F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.1 Si f est bornée sur I, alors F_{x_0} est lipschitzienne sur I.
1.2 La fonction F_{x_0} est continue sur I.
1.3 La fonction F_{x_0} est dérivable à gauche et à droite en tout point $x \in I$ et

$$(F_{x_0})'_g(x) = f(x^-), \quad (F_{x_0})'_d(x) = f(x^+).$$

1.4 → **Théorème fondamental**
Soient f, une fonction continue sur I et $x_0 \in I$. La fonction

$$F_{x_0} = \left[x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et est une primitive de f.
1.5 Soient $f \in \mathscr{C}^0(I)$; φ et ψ, de classe $\mathscr{C}^1$ de J dans I. La fonction

$$G = \left[u \mapsto \int_{\varphi(u)}^{\psi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et

$$\forall\, u \in J, \quad G'(u) = f\big(\psi(u)\big)\psi'(u) - f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u).$$

2. → *Soit f, une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale*

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente, alors la fonction G définie par

$$\forall\, x \geqslant a, \quad G(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $G' = -f$.

Entraînement

3. **Questions pour réfléchir**
1. Étudier le signe et les variations de

$$G(x) = \int_{x}^{x^2} \ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t.$$

Calculer un équivalent de $G(x)$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.
2. *Suite de* [**1**] – Si F_{x_0} est dérivable sur I, sa dérivée est-elle égale à f ?
3. Si une fonction F est dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée peut-elle être continue par morceaux ?

4. Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$e^{1/x} \int_{0}^{x} e^{-1/t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} (-1)^k (k-1)!x^k + o(x^n).$$

5. Pour tout $x > 0$, on pose

$$G(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. La fonction G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \qquad G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}.$$

De plus, $G(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
2.

$$\int_{x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \sim -\ell\mathrm{n}\, x, \qquad \lim_{x\to 0} G(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

II

Intégrales fonctions d'un paramètre

6. Étant donnée une fonction f des variables $x \in \Omega$ et $t \in I$ telle que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ soit intégrable sur I, on étudie les propriétés de la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]$$

et en particulier sa régularité (continuité, dérivabilité).
7. L'intervalle d'intégration I est fixe. L'expression

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

n'est pas une intégrale seulement fonction de la borne supérieure, ni une intégrale seulement fonction d'un paramètre.
Dans ce cas, on doit en général considérer [**73**] que

$$F(x) = \Phi(x,x) \quad \text{où} \quad \Phi(x,y) = \int_{a}^{y} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

mais il arrive qu'on s'en sorte avec un peu d'astuce [**57**].

II.1 Propriétés ponctuelles

8. La parité, la monotonie, la convexité et la continuité de F peuvent parfois se déduire très simplement de f.
8.1 Si, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est croissante (resp. décroissante), alors la fonction F est croissante (resp. décroissante).
8.2 Si, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est convexe (resp. concave), alors la fonction F est convexe (resp. concave).
8.3 S'il existe une fonction g, intégrable sur I, et une constante K telles que

$$\forall\, (x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times I, \quad \big|f(x,t) - f(y,t)\big| \leqslant Kg(t)|x-y|,$$

alors F est lipschitzienne sur Ω.
9. **Exemples**
9.1 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$$

est décroissante, convexe et positive sur $]-1, +\infty[$.

9.2 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$$

est décroissante, convexe et positive sur $]1, +\infty[$.
9.3 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

est décroissante, convexe et positive sur $]0, +\infty[$.
9.4 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est décroissante, convexe et bornée sur $[0, +\infty[$. Pour tout $a > 0$, la fonction F est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$.
9.5 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

est impaire et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

II.2 Rappels sur la continuité

10. ✍ *Une fonction est* **continue sur un intervalle** *(resp.* **sur un ouvert)** *lorsqu'elle est continue en chaque point de cet intervalle (resp. de cet ouvert).*

Caractérisations séquentielles

11. On considère une fonction φ définie sur Ω, à valeurs dans un espace E.
11.1 ➙ *La fonction φ est continue en $x_0 \in \Omega$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui converge vers x_0, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
11.2 Par définition, une fonction ne peut être continue qu'en un point x_0 de son ensemble de définition.
En revanche, on peut étudier l'existence d'une limite pour φ au voisinage d'un point x_0 qui n'appartient pas à son ensemble de définition Ω.
11.3 ➙ *La fonction φ tend vers une limite ℓ (appartenant à E ou infinie) au voisinage de x_0 si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui tend vers x_0, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.*

Du local au global

12. Topologie locale de $\mathbb{R}^d$
Tout espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est ***localement compact*** : tout ouvert de E est ainsi une union de parties compactes.
12.1 ➙ *Soit Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un segment $[A, B]$ tel que*

$$x_0 \in [A, B] \subset \Omega.$$

12.2 ➙ *Soit Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $x_0 \in I$, il existe une boule fermée B_r de rayon $r > 0$ telle que*

$$x_0 \in B_r \subset \Omega.$$

13. Méthodes
La définition [**10**] permet de parvenir à une *conclusion globale* par une *démonstration locale*.
13.1 Une fonction définie sur une partie Ω d'un espace vectoriel E de dimension finie est continue sur Ω si, et seulement si, pour tout $x_0 \in \Omega$, elle est continue sur un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ (relatif à Ω) de x_0.
13.2 Une fonction définie sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ est continue si, et seulement si, elle est continue sur tout segment $[A, B] \subset \Omega$.
13.3 Une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est continue si, et seulement si, elle est continue sur toute boule fermée contenue dans Ω, c'est-à-dire si elle est continue sur toute partie compacte $K \subset \Omega$.
14. Exemples de mise en œuvre
14.1 Une fonction est continue sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, pour tout $B > 0$, elle est continue sur le segment $[0, B]$.
14.2 Une fonction est continue sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, quels que soient $0 < A < B$, elle est continue sur $[A, B]$.
14.3 Une fonction est continue sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, quel que soit $A > 0$, elle est continue sur $[A, +\infty[$.
14.4 Une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, quel que soit $A > 0$, elle est continue sur $[-A, A]$.
14.5 Une fonction est continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si, et seulement si, elle est continue sur tout pavé $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ contenu dans Ω.
15. Comme les fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ sont définies de manière analogue aux fonctions continues, on peut utiliser des méthodes analogues pour prouver qu'une fonction est dérivable sur un intervalle donné ou de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert donné.

II.3 Continuité

16. Comme le théorème de convergence dominée [**8.116.1**], le théorème [**17**] donne une condition suffisante pour passer à la limite sous le signe $\int$: sa conclusion peut être écrite sous la forme suivante.

$$\forall\, x_0 \in \Omega, \quad \int_I \Big[\lim_{x\to x_0} f(x,t)\Big]\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to x_0} \Big[\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

17. ➙ *Soient Ω, une partie d'un espace vectoriel de dimension finie et I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour $(x,t) \in \Omega \times I$ telle que*
17.1 Hypothèse de continuité
Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x,t)\big]$ est continue sur Ω ;
17.2 Hypothèse d'intégrabilité
Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\big[t \mapsto f(x,t)\big]$ est intégrable sur I ;
17.3 Hypothèse de domination
Il existe une fonction g, intégrable sur I, telle que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \Omega, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant g(t).$$

17.4 Conclusion
Alors la fonction définie sur Ω par

$$F = \Big[x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

est continue.
18. En pratique
Pour vérifier l'hypothèse de domination [**17.3**], on cherche un majorant de $|f(x,t)|$ qui soit à la fois intégrable sur I (en tant que fonction de t) et indépendant de $x \in \Omega$.
18.1 Il arrive assez souvent que cette hypothèse de domination ne soit pas vérifiée pour $x \in \Omega$.
Il faut dans ce cas savoir raisonner localement pour conclure globalement [**13.1**] : pour démontrer que la fonction F est continue sur Ω, il suffit de pouvoir, pour chaque point $x_0 \in \Omega$, appliquer le Théorème de continuité [**17**] sur un voisinage $\mathcal{V}_{x_0} \subset \Omega$ de x_0.
La fonction dominatrice g de [**17.3**] peut dépendre du point x_0 choisi (alors qu'elle doit être indépendante de $x \in \mathcal{V}_{x_0}$).
18.2 Il suffit en fait d'appliquer le théorème sur une famille *bien choisie* [**14**] de parties $(\mathcal{V}_i)_{i\in I}$ de Ω telles que

$$\Omega = \bigcup_{i\in I} \mathcal{V}_i.$$

18.3 Si cette hypothèse de domination est vérifiée sur tout compact $\mathcal{V}$ contenu dans Ω, alors la fonction F est continue sur Ω.

18.4 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit que f soit bornée sur $\Omega \times I$:

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \Omega, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant M$$

pour vérifier l'hypothèse de domination [**17.3**].

18.5 Si l'intervalle d'intégration I est un segment, il suffit que f soit continue sur $\Omega \times I$ pour que les trois hypothèses du théorème [**17**] soient vérifiées pour tout compact $\mathcal{V} \subset \Omega$ et cela prouve que F est continue sur Ω.

19. Limite finie aux bornes de l'intervalle

Une variante du théorème [**17**] permet d'étudier une intégrale aux extrémités de son intervalle de définition.

19.1 ➜ *Soient $\Omega =]\alpha, \beta[$ et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :*

1. *Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I ;*
2. *Pour tout $t \in I$, l'expression $f(x,t)$ tend vers $\varphi(t)$ lorsque x 0tend vers α ;*
3. *La fonction $[t \mapsto \varphi(t)]$ est intégrable sur I ;*
4. *Il existe $\alpha_0 \in \Omega$ et une fonction g intégrable sur I telle que*

$$\forall\, t \in I, \forall\, x \in]\alpha, \alpha_0]\,, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant g(t).$$

Alors

$$\lim_{x\to\alpha} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

19.2 Pour étudier la limite de F au voisinage de α, on peut se contenter de vérifier l'hypothèse de domination sur un voisinage à droite $\mathcal{V}_\alpha$ de α.

19.3 De manière analogue, pour étudier la limite au voisinage de β, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination sur un voisinage à gauche $\mathcal{V}_\beta = [\beta_0, \beta[$ de β.

19.4 Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'une intégrale fonction d'un paramètre ait une limite *finie*. On ne peut donc pas l'appliquer dans le cas d'une limite infinie.

20. Exemples

20.1 *Suite de* [**9.4**] – La fonction F est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

20.2 *Suite de* [**9.1**] – La fonction F est continue sur $]-1, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

20.3 *Suite de* [**9.2**] – La fonction F est continue sur $]1, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

20.4 *Suite de* [**9.3**] – La fonction F est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Entraînement

21. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* [**6**] –

1.a Condition suffisante pour que F soit bornée sur Ω ?

1.b Si la fonction f est bornée sur $\Omega \times I$, la fonction F est-elle bornée sur Ω ?

2. *Suite de* [**9.4**] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $\pi/2$ au voisinage de 0.

3. *Suite de* [**9.1**] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de -1. →[**1.14**]

4. *Suite de* [**9.2**] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 1. →[**1.14**]

5. *Suite de* [**9.3**] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0. →[**1.14**]

6. *Suite de* [**11.1**] – Que dire de la limite de $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$?

7. *Suite de* [**11.3**] – Que conclure si φ admet une limite en un point $x_0 \in \Omega$? Cette limite peut-elle être infinie ?

8. *Suite de* [**11.3**] – On suppose que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui tend vers x_0, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite de $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend pas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction φ admet une limite au voisinage de x_0.

9. Déduire le théorème de continuité [**17**] du théorème de convergence dominée [**8.116.1**].

10. On suppose que l'intervalle d'intégration I est un segment et que f est une fonction continue sur $\Omega \times I$. L'hypothèe de domination [**17.3**] est-elle vérifiée sur $\mathcal{V}_{x_0} = \Omega$?

22.1 D'après [**19.1**],

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} - \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

22.2 Soient $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et h, continue et bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

est bornée et continue sur $\mathbb{R}$.

22.3 La fonction F définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[0,1]$.

22.4 La fonction F définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^{\pi} \frac{xt \sin t}{x^2 - 2x\cos t + 1}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[0,1]$.

22.5 Soit g, intégrable sur $I =]0,1[$. La fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^1 \big|g(t) - x\big|\,\mathrm{d}t$$

est continue et convexe sur $\mathbb{R}$. Elle tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ et atteint un minimum sur $\mathbb{R}$.

22.6 Soit $0 < \alpha \leqslant 1/2$. La fonction F_α définie par

$$F_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+tx^2)}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F_\alpha(x) \sim \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}}.$$

Étudier la limite en 0 en distinguant le cas $\alpha = 1/2$.

22.7 Soit $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$. La fonction F définie par

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{z+t}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{R}_-$ et tend vers 0 au voisinage de l'infini. Étudier la limite de F lorsque $z \in \mathbb{R}_+^*$ tend vers 0.

23. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0 :

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \quad \text{et} \quad F(x) \underset{x\to 0}{=} -\ell\mathrm{n}\, x + \mathcal{O}(1).$$

24. Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}\,\mathrm{d}u,$$

alors $f(x) = \mathcal{O}(x^{-4})$ au voisinage de $+\infty$ et

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1/x^2.$$

Elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$, mais pas sur $]0,1]$.

III

Dérivation sous le signe $\int$

III.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

25. Le théorème [**26**] donne une condition suffisante pour dériver sous le signe $\int$, puisqu'on peut comprendre sa conclusion sous la forme suivante.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Il s'agit ici encore de passer à la limite sous le signe $\int$, puisque l'égalité précédente peut être comprise sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\int_I \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_I \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

C'est pourquoi le théorème [**26**] est lui aussi une conséquence du théorème de convergence dominée [**8.116.1**].

26. ➙ *Soient Ω et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f, une fonction définie pour tout $(x,t)\in\Omega\times I$. On suppose que :*

26.1 Hypothèse de régularité

Pour tout $t\in I$, la fonction $\big[x\mapsto f(x,t)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω ;

26.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $x\in\Omega$, les fonctions

$$\big[t\mapsto f(x,t)\big]\quad\textit{et}\quad\Big[t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big]$$

sont intégrables sur I ;

26.3 Hypothèse de domination

Pour tout $x_0\in\Omega$, il existe une fonction g, intégrable sur I, et un voisinage $\mathcal{V}\subset\Omega$ de x_0 tels que

$$\forall\, t\in I,\ \forall\, x\in\mathcal{V},\quad \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big|\leqslant g(t).$$

26.4 Conclusion

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x)=\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, x\in\Omega,\quad F'(x)=\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

27. En pratique

Comme pour le théorème de continuité [**17**], il savoir choisir $\mathcal{V}$ de telle sorte que l'hypothèse de domination [**26.3**] soit vérifiée.

27.1 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit de démontrer que

$$\exists\, M\in\mathbb{R}_+,\ \forall\,(x,t)\in\Omega\times I,\quad\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big|\leqslant M.$$

27.2 Lorsque I est un segment, il suffit que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $O\subset\mathbb{R}^2$ contenant $\Omega\times I$ pour que toutes les hypothèses du théorème [**26**] soient vérifiées pour tout segment $\mathcal{V}\subset\Omega$, ce qui montre que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

28. Exemples

28.1 *Suite de* [**22.3**] – La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

28.2 La fonction F définie par

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t+ix)^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle. →[**59**]

28.3 La fonction F définie par

$$F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

28.4 La fonction F définie par

$$F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\sqrt{x}}\cos t\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

28.5 La fonction F définie par

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(\mathrm{sh}^2\,t+\sin^2 x)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

III.2 Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

29. ➙ *Soient Ω et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour tout $(x,t)\in\Omega\times I$. On suppose que :*

29.1 Hypothèse de régularité

Pour tout $t\in I$, la fonction $\big[x\mapsto f(x,t)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω ;

29.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $0\leqslant k\leqslant n$, pour tout $x\in\Omega$, la fonction

$$\Big[t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big]$$

est intégrable sur I ;

29.3 Hypothèse de domination

Pour tout $x_0\in\Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{V}\subset\Omega$ de x_0 et, pour tout $1\leqslant k\leqslant n$, il existe une fonction g_k, intégrable sur I, tels que

$$\forall\, t\in I,\ \forall\, x\in\mathcal{V},\quad\Big|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big|\leqslant g_k(t).$$

29.4 Conclusion

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x)=\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω et

$$\forall\, 1\leqslant k\leqslant n,\ \forall\, x\in\Omega,\quad F^{(k)}(x)=\int_I\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

30. Pour démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$, il suffit d'appliquer le Théorème [**29**] pour tout entier $n\geqslant 1$.

31. En pratique

Une fois de plus, il faut choisir le voisinage $\mathcal{V}$ en fonction de x_0 de telle sorte que l'hypothèse de domination [**29.3**] soit vérifiée.

31.1 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit que les fonctions g_k soient constantes pour que [**29.3**] soit vérifiée.

31.2 Si I est un segment et si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un ouvert $O\subset\mathbb{R}^2$ qui contient $\Omega\times I$, les hypothèses du théorème [**29**] sont vérifiées pour tout segment $\mathcal{V}=[A,B]$ contenu dans Ω et la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω.

31.3 Compte tenu de l'hypothèse de domination [**29.3**], il suffit que les fonctions

$$\Big[t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big]$$

soient continues sur I pour être intégrables sur I : l'hypothèse d'intégrabilité [**29.2**] est pour ainsi dire toujours vérifiée.

32. Exemples

32.1 *Suite de* [**9.4**] – La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0.

32.2 *Suite de* [**9.1**] – La fonction F est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$.

32.3 *Suite de* [9.3] – La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
32.4 Soient $g \in \mathscr{C}^k$ et $h \in \mathscr{C}^\ell$, deux fonctions périodiques de période T. Alors la fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

est périodique de période T et de classe $\mathscr{C}^{k+\ell}$.
32.5 Les fonctions F et G définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos xt)}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On déduit de [8.67] que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\,\ell\mathrm{n}(1+x^2).$$

32.6 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^\pi e^{x\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
32.7 Les ***fonctions de Bessel*** J_n définies par

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
32.8 La fonction Y_0 définie par

$$Y_0(x) = \int_0^\pi \sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{+\infty} e^{-x\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
32.9 *Suite de* [22.7] – La fonction F est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

Entraînement

33. Questions pour réfléchir

1. Déduire le théorème [26] de dérivation sous le signe $\int$ du théorème de convergence dominée [8.116.1] et du théorème de continuité [17].
2. *Suite de* [27.1] – Comparer les assertions suivantes.

2.a

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\,(x,t) \in \mathcal{V}\times I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M$$

2.b

$$\forall\,(x,t) \in \mathcal{V}\times I,\ \exists\, M \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M$$

3. Sous les hypothèses du théorème [26], pour tout segment $[A, B] \subset \mathcal{V}$, il existe une fonction h, intégrable sur I, telle que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in [A, B], \quad |f(x,t)| \leqslant h(t).$$

4. Si on considère que la fonction F étudiée dans le théorème [26] est définie sur Ω et si les hypothèses du théorème sont satisfaites sur un segment $\mathcal{V}$, la fonction F est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce segment ?
5. Si les deux premières hypothèses du théorème [29] sont satisfaites et s'il existe une fonction $\Phi \in \mathscr{L}^1(I)$ telle que

$$\forall\,(x,t) \in \Omega\times I, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \Phi(t),$$

alors l'hypothèse de domination [29.3] est vérifiée sur tout segment $[A, B] \subset \Omega$ et la fonction F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω.
6. Expliquer les remarques [27.2] et [31.2].

34. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer l'allure de son graphe à l'aide de [8.51.3] et de [8.100].
35. On étudie les fonctions F_1 et F_2 définies par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1.

$$\forall\, x > 0, \quad F_2(x) = F_1(1/x).$$

2. La fonction F_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, la fonction F_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par [8.67]

$$\forall\, x > 0, \quad F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x,$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F_2(x) = \operatorname{Arctan} x.$$

→[60]

36. *Suite de* [8.118.6] – La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et

$$\forall\, x > -1, \quad F(x) = \ell\mathrm{n}\,\frac{x+2}{x+1},$$

donc $F(x) \sim -\ell\mathrm{n}(x+1)$ lorsque x tend vers -1.

IV

Applications

IV.1 Intégrale de Gauss

37.1 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est égale à $\pi/4$ en $x = 0$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
37.2 La fonction G définie par

$$G(x) = F(x) + \left[\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right]^2$$

est constante sur $\mathbb{R}$.
37.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

37.4 Densité de la loi normale
Quels que soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big(\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big)\,\mathrm{d}t = 1.$$

IV.2 La fonction Γ d'Euler

38. ✍ *La fonction* Γ *est définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
39. La fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x \in\,]0, +\infty[, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ell\mathrm{n}\, t)^n t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

40. Équation fonctionnelle et valeurs particulières

40.1

$$\forall\, x > 0, \qquad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

40.2 →[**8**.64.2]

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

40.3

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

41. Comportement asymptotique de la fonction Γ

41.1 Au voisinage de 0, on a $\Gamma(x) \sim 1/x$.

41.2 Comme

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x) \geqslant \int_1^2 t^{x-1}\frac{\mathrm{d}t}{e^2},$$

la fonction Γ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et son graphe présente une branche parabolique d'axe vertical.

41.3 La fonction Γ n'est intégrable ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$.

41.4 La fonction $1/\Gamma$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

42. Étude globale

42.1 La fonction Γ est strictement convexe.

42.2 La fonction Γ admet un minimum global et ce minimum est atteint sur $[1, 2]$.

IV.3 Transformation de Laplace

43. La ***transformée de Laplace*** d'une fonction continue par morceaux f est définie par

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La détermination de l'ensemble de définition de $L(f)$ fait partie de l'étude de $L(f)$.

44. On suppose que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

44.1 La fonction $L(f)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

44.2 Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

44.3 La fonction $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

44.4 Si la fonction $[t \mapsto tf(t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

44.5 Si la fonction $[t \mapsto t^n f(t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0, +\infty[$ et

$$L(f)(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k p^k}{k!} \int_0^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t + o(p^n)$$

pour p voisin de 0.

45. Théorème de la valeur initiale

On suppose que f est continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

45.1 La fonction $L(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

45.2 Si f admet une limite (finie) non nulle $f(0^+)$ au voisinage de 0, alors

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} pe^{-pt}\big[f(t) - f(0^+)\big]\,\mathrm{d}t = 0$$

et, lorsque p tend vers $+\infty$,

$$L(f)(p) \sim \frac{f(0^+)}{p}.$$

45.3 Si f est positive mais pas intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

46. Théorème de la valeur finale

Si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers une limite finie ℓ au voisinage de $+\infty$, alors $L(f)(p)$ est défini pour tout $p > 0$ et $pL(f)(p)$ tend vers ℓ au voisinage de $p = 0$.

V

Extension aux fonctions à valeurs vectorielles

47. Le théorème de convergence dominée s'étend sans difficulté aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.

47.1 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction f. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée sur I si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, la convergence de la suite $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des composantes est dominée sur I.

47.2 ➞ Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux de I dans un espace vectoriel de dimension finie E.

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et s'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big\|f_n(t)\big\|_E \leqslant g(t),$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \big\|f(t) - f_n(t)\big\|_E\,\mathrm{d}t = 0$$

et en particulier

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

47.3 On peut en déduire une condition suffisante pour qu'une intégrale varie continûment en fonction d'un paramètre.

48. ➞ Théorème de continuité

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour $(x, t) \in \Omega \times I$ et on suppose que :

48.1 Hypothèse de régularité

Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x, t)\big]$ est continue sur Ω ;

48.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\big[t \mapsto f(x, t)\big]$ est intégrable sur I ;

48.3 Hypothèse de domination

Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in V, \quad \big\|f(x, t)\big\|_E \leqslant g(t).$$

48.4 *Alors la fonction F définie par*

$$F(x) = \int_I f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur Ω.

49. Lorsque Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dispose d'une condition suffisante pour que cette intégrale soit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

50. ➞ Théorème de dérivation sous ∫

Soient Ω et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f, une fonction définie pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$. On suppose que :

50.1 Hypothèse de régularité

Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x, t)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω ;

50.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$\big[t \mapsto f(x, t)\big] \quad et \quad \Big[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\Big]$$

sont intégrables sur I ;

50.3 Hypothèse de domination

Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I tels que

$$\forall\, x \in V,\ \forall\, t \in I, \quad \Big\|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\Big\|_E \leqslant g(t).$$

50.4 *Alors la fonction F définie sur Ω par*

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

51. Bien entendu, ce résultat se généralise aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout entier $n \geqslant 2$ [**29**] et donc aux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

52. → **Intégration terme à terme**
Soit $\sum f_n$, une série de fonctions d'un intervalle I dans un espace vectoriel de dimension finie E qui converge simplement sur I.
On suppose que :
52.1 **Hypothèse d'intégrabilité**
Les fonctions f_n sont intégrables sur I ;
52.2 **Hypothèse de régularité**
La somme S de la série $\sum f_n$ est continue par morceaux sur I ;
52.3 **Hypothèse de domination**
La série de terme général positif

$$\sum \int_I \|f_n(t)\|_E\,\mathrm{d}t$$

est convergente.
52.4 *Alors la somme $S : I \to E$ est intégrable sur I, la série $\sum \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et*

$$\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

53. **Exemples et contre-exemples**
1. Exemple de fonction f intégrable sur $I = [0,+\infty[$, non bornée sur I, pour laquelle la fonction

$$F_{x_0} = \left[x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est lipschitzienne sur I.
2. Exemple de fonction dérivable F telle que

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{sans que} \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

3. *Suite de* [**69**] – Exemple où g n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

54. **Méthodes**
1. Comment démontrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$? sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$?
2. Comment démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point x_0 de son ensemble de définition ?
3. Comment démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite au voisinage d'un point x_0 ?
4. Comment démontrer qu'une fonction définie par une intégrale

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

tend vers l'infini ? Peut-on utiliser le théorème de convergence dominée à cet effet ?
5. Soit f, une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. Si sa dérivée f' tend vers l'infini au voisinage de 0, alors f n'est pas dérivable en 0.

55. **Questions pour réfléchir**
1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite (finie ou infinie).
2. Généraliser le théorème [**26**] de dérivation sous le signe $\int$ aux fonctions f définies sur $\Omega \times I$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
3.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{n}.$$

4. Soit Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Condition suffisante pour que la fonction

$$\left[u \mapsto \int_I f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]$$

soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Approfondissement

56. *Suite de* [**9.5**] –
1. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2.

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2}\,\ell\mathrm{n}(1+x).$$

3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}^2\, t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \pi\,\ell\mathrm{n}\,2.$$

57. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La fonction g définie par

$$g(x) = \int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 f(x,ux)\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

58. **Fonction d'Euler et constante d'Euler**
58.1

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad -\int_0^1 (n+1)y^n\,\ell\mathrm{n}(1-y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

58.2 *Suite de* [**6.28**] –

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n \ell\mathrm{n}\,x\,\mathrm{d}x = -\gamma$$

58.3 *Suite de* [**8.127**] –

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\ell\mathrm{n}\,x\,\mathrm{d}x = -\gamma$$

59. **Une transformée de Fourier remarquable**
1. *Suite de* [**8.68**] – La transformée de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

est une solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$.
2. La relation suivante se déduit du théorème [**37.4**] qu'elle permet de généraliser. →[**28.2**]

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}.$$

3.a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\cos xt\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x^2/2}.$$

3.b La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \sin xt \, dt$$

est la solution de l'équation différentielle $y' + xy = 1$ qui s'annule en $x = 0$.

60. Intégrale de Dirichlet

1. La fonction F_1 définie par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

2. L'intégrale impropre

$$F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \, dt$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \, dt.$$

La fonction F_2 ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

3. Comme F_1 et F_2 sont deux solutions de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

qui tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$, elles sont égales et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

61. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ell n(1+x^2t^2)}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$

En déduire l'expression de $F(x)$.

62. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t^2} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)u}}{2\sqrt{u}} \, du$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 2(x+i)F'(x) + F(x) = 0.$$

On déduit donc de [40.3] que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{1+x^2}} e^{i(\operatorname{Arctan} x)/2}.$$

63. La fonction F définie par

$$F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} \, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $O =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On déduit de ses dérivées partielles que

$$\forall\, x > 0, \forall\, y > 0, \quad F(x,y) = \ell n \frac{y}{x}.$$

64. Intégrales de Wallis généralisées

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt$$

est positive, décroissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

2.

$$\forall\, x > -1, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x).$$

3. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = xF(x)F(x-1).$$

3.a

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

3.b

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad nF(n)F(n-1) = \frac{\pi}{2}.$$

3.c Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F(x) \sim \sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}.$$

65. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Par [37.4],

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) - F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

et par [**8**.118.5]

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^x \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt.$$

66.

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ell n(1+2t\cos x + t^2)}{t} \, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

2.

$$\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{\sin x \, dt}{(t+\cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{x}{2}.$$

3.a Pour tout $u \in]-1, 1[$,

$$\ell n(1+u) = \int_0^u \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}.$$

3.b *Suite de* [**6**.37] –

$$\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

67.

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

2.
$$\forall\, x > 0, \quad F(x+1) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

3. *Suite de* [**8.122.2**] – Pour x voisin de 0,
$$F(x) = \frac{1}{x} - \ell n\, 2 + \frac{\pi^2}{12} x + o(x).$$

68. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^{n+1}}.$$

1.
$$\forall\, x > 0, \quad I_0(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est décroissante, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et
$$\forall\, x > 0, \quad I_{n+1}(x) = \frac{-1}{2(n+1)x} I'_n(x).$$

3. La relation précédente suggère de chercher une expression simple de la forme
$$I_n(x) = \frac{a_n}{2^{n+1} n! x^{2n+1}}.$$
Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

4.
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0, \quad I_n(x) = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \frac{1}{x^{2n+1}}.$$

→[**8.64.3**]

69. Factorisation d'une fonction
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. On cherche une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x g(x).$$

1.a Pourquoi faut-il supposer que $f(0) = 0$?
1.b Discuter l'unicité de la fonction g.
2. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Pour aller plus loin

70. Intégrations successives
On suppose que f est continue sur $[a,b] \times [c,d]$.
70.1 La fonction h définie par
$$h(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$
est continue sur $[a,b]$ et la fonction F_1 définie par
$$\forall\, u \in [a,b], \quad F_1(u) = \int_a^u h(x)\,\mathrm{d}x$$
est une primitive de h sur $[a,b]$.

70.2 Pour $(u,y) \in [a,b] \times [c,d]$, on pose
$$k(u,y) = \int_a^u f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

1. La fonction $\big[y \mapsto k(u,y)\big]$ est continue sur $[c,d]$.
2. La fonction $\big[u \mapsto k(u,y)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et
$$\forall\, (u,y) \in [a,b] \times [c,d], \quad \frac{\partial k}{\partial u}(u,y) = f(u,y).$$
3. La fonction F_2 définie par
$$\forall\, u \in [a,b], \quad F_2(u) = \int_c^d k(u,y)\,\mathrm{d}y$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et
$$F'_2(u) = \int_c^d \frac{\partial k}{\partial u}(u,y)\,\mathrm{d}y = h(u).$$

70.3 Les deux fonctions F_1 et F_2 sont égales sur $[a,b]$.
70.4 ➙ *Soit f, une fonction continue sur le pavé $[a,b] \times [c,d]$. Alors*
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

71. Soient U, un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. La fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(x,y) = \int_a^b f(x,y,t)\,\mathrm{d}t$$
est continue sur U.

72. Soient I et J, deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On considère $U = I \times J \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = I \times I \times J$ et $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Alors la fonction $F : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(x,y,z) = \int_x^y f(t,z)\,\mathrm{d}t$$
est continue.

73. Fonctions de plusieurs variables
Soient Ω et I, deux intervalles ouverts (non vides) de $\mathbb{R}$ et f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^2$.

1. La fonction définie par
$$\forall\, (x,y,z) \in \Omega \times I \times I, \quad F(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)\,\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ et
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_y^z \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -f(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f(x,z).$$

2. Si φ et ψ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans I, alors la fonction définie par
$$\forall\, x \in \Omega, \quad G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ et
$$G'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t - f\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) + f\big(x,\psi(x)\big)\psi'(x).$$

74. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^2$. L'application φ définie par

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = \int_0^{2\pi} f(x + z\cos\theta, y + z\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ et

$$z\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\Big) - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

75. **Fonction B d'Euler [38]**
Quels que soient les réels strictement positifs x et y, on pose

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. La fonction B est définie sur l'ouvert

$$\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

et symétrique :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad B(x,y) = B(y,x).$$

2. La fonction B est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω.
3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\,x > 0, \quad B(x,n) = \frac{\Gamma(x)\,n!}{\Gamma(x+n+1)}.$$

4. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.\end{aligned}$$