
SÉRIES DE FONCTIONS

Index des démonstrations rédigées

Chapitre 10 — Séries de fonctions

[23]	08-01	[96]	08-07	[105.2]	08-11
[24]	08-02	[99]	08-05	[127]	08-06
[25]	08-03	[100]	08-04		
[47]	08-16	[101]	08-10		

Chapitre 11 — Séries entières

[55.3]	10-01	[99]	10-02	[120]	10-07
[72.2]	10kh-09	[103]	10-04	[121]	10-06
[90.3]	10-03	[113]	10-05		

Séries de fonctions

Exercice 1

08-01

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites de fonctions qui convergent uniformément sur Ω vers f et g respectivement.

1. La suite de fonctions $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers $\lambda f + g$.
2. Si les fonctions f_n et g_n sont des fonctions bornées sur Ω , alors la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers fg .

Exercice 2

08-02

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites de fonctions continues sur Ω qui convergent uniformément sur Ω vers f et g respectivement. Alors la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de Ω vers fg .

Exercice 3

08-03

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de fonctions de I dans Ω qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \Omega$.

1. Quelle que soit la fonction $\psi : J \rightarrow I$, la suite de fonctions $(f_n \circ \psi)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers $f \circ \psi$.
2. Si φ est uniformément continue sur Ω , alors la suite de fonctions $(\varphi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\varphi \circ f$.

Exercice 4

08-04

1. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. Le produit $xS(x)$ tend vers $\pi^2/6$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- 3.

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x} \sim -\ln x.$$

Exercice 5

08-05

1. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

est croissante et continue sur $] -1, +\infty[$.

2. Pour tout $x > -1$,

$$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$$

et $S(x) \sim -1/(1+x)$ lorsque x tend vers -1 .

3. Pour tout $n \geq 1$, on a $S(n) = H_n$ et $S(x) \sim \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Pour tout $x \in \Omega =]-1, +\infty[$ et tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Exercice 6

08-06

La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{n^3}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7

08-07

La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8

08-08

1. Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}_+$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

est définie.

2. Vérifier que $S(x) = S(1/x)$ pour tout x dans l'ensemble de définition de S .
3. Étudier la continuité et les variations de S .

Exercice 9

08-09

Étudier la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n + e^{nx})}{n^3}.$$

Exercice 10

08-10

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Démontrer que $S(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Calculer un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 11

08-11

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues et intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$, qui converge uniformément sur $]a, b[$. Alors la série numérique

$$\sum \int_a^b u_n(t) dt$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt.$$

Exercice 12**08-12**

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ en posant :

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) = \begin{cases} n\sqrt{n}t & \text{pour } 0 \leq t \leq 1/n, \\ 1/\sqrt{t} & \text{pour } 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$, mais ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer de deux manières différentes la limite de

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 13**08-13**

Soit $q \in \mathbb{R}$ avec $|q| < 1$. Il existe une, et une seule, fonction f définie sur $] -1, 1[$, continue en 0, telle que $f(0) = 1$ et que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx).$$

Exercice 14**08-14**

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer la limite de f au voisinage de $+\infty$.
3. Calculer $f(x-1) - f(x)$. En déduire une expression de f en tant que somme d'une série de fonctions.
4. Retrouver cette expression d'une autre manière.

Exercice 15**08-15**

Soit f , une application continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

1. Il existe une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction f et telles que $P_k(1) = f(1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En intégrant par parties, on démontre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (n+1)t^n g(t) dt = g(1)$$

pour toute application g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. En raisonnant par densité, démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 t^n f(t) dt = f(1).$$

Exercice 16**08-16**

Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n(0) = 0$ et

$$\forall x \neq 0, \quad f_n(x) = x^2 \sin \frac{1}{nx}.$$

1. Pour tout $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[-a, a]$ vers la fonction nulle.
2. Elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17**08kh-01**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = f\left(x + \frac{x(1-x)}{n}\right).$$

1. Démontrer que l'application f_n est bien définie.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$.
3. Considérer le cas où f est seulement continue.

Exercice 18**08kh-02**

On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_0(t) = 2t$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1, 1], \quad f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)}.$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[-1, 1]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_{-1}^1 f_n(t) dt.$$

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_{-1}^1 \frac{1}{f_n(t)} dt.$$

Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 19**08kh-03**

Convergence simple et somme de la série

$$\sum \frac{(-1)^n \cos^3(3^n x)}{3^n}.$$

Exercice 20**08kh-04**

Soit $0 < r < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - r^k x).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$.
2. Sa limite est-elle continue ?

Exercice 21**08kh-05**

On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions qui converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f . On suppose de plus que chaque fonction f_n est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall a < x < b, \quad |f'_n(x)| \leq M.$$

Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 22**rms128-700**On étudie la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad \text{où} \quad u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction f .
2. Démontrer que f est continue et strictement décroissante sur I .
3. Démontrer que f admet une limite au voisinage de $+\infty$ et calculer cette limite.
4. Trouver un équivalent de f au voisinage de 0. On admettra que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 23**rms130-578**

1. Donner le domaine de définition de la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

et étudier la continuité de la fonction S .

2. Déterminer les limites de S au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$. Donner, si possible, un équivalent de $S(x)$.

Exercice 24**rms130-874**

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Arctan} \frac{x}{n}.$$

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la régularité de f , puis la limite de f et celle de f' au voisinage de $+\infty$.

Exercice 25**rms130-876**

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Démontrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale.

Exercice 26**rms130-1154**Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^{3/2} + (n+x)^{1/2}}$$

et on note f , la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Démontrer que f est définie sur $] -1, +\infty[$.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.
3. Trouver un équivalent de f au voisinage de -1 . En déduire que f est intégrable sur $] -1, 0]$.

4. Calculer la limite de f au voisinage de $+\infty$.

5. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

Exercice 27**rms130-1167**Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}.$$

1. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de S au voisinage de $+\infty$.
3. Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 28**rms130-1246**

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la continuité de f .
3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
4. Démontrer que f tend vers une limite finie ℓ au voisinage de $+\infty$, puis déterminer un équivalent de $f(x) - \ell$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Étudier les variations de f .

Exercice 29**rms130-1361**Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

1. Tracer l'allure du graphe de f_n .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. La série $\sum f_n(x)$ est-elle convergente?
3. Démontrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon_n.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|.$$

Déduire M_n de l'étude des variations de f_n . La série $\sum M_n$ est-elle convergente?**Exercice 30****rms130-1362**Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x > 0, \quad u_k(x) = \frac{x}{2^k} \ln \frac{x}{2^k}.$$

1. Étudier les variations de la fonction

$$g = [t \mapsto t \ln t]$$

et tracer l'allure de son graphe.

2. Démontrer que, pour tout $x > 0$, la série $\sum u_k(x)$ est absolument convergente.

3. Pour tout $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

Simplifier l'expression $S(2x) - S(x)$.

4. Soit $A > 0$. Démontrer qu'il existe un rang $K_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq K_0, \forall x \in]0, A], \quad |u_k(x)| \leq |u_k(A)|.$$

5. On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x > 0, \quad f(2x) = f(x) + x \ln x. \quad (\text{E})$$

Exprimer f en fonction de $f(0)$ et de S . Conclure.

Exercice 31 rms132-599

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

1. Étudier la continuité de f .
2. Calculer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
3. Calculer un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 32 rms132-1118

On pose

$$F(\alpha) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Déterminer les limites de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 33 rms132-1119

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln n}.$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ de cette série de fonctions.
2. Soit $A > 0$. Démontrer qu'il existe une constante M telle que

$$\forall x \in [0, A], \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln k} \right| \leq \frac{M}{\ln n}.$$

Que peut-on en déduire?

3. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Démontrer que

$$\forall n \geq 2, \forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} \geq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{\ln k}.$$

La fonction f est-elle dérivable à droite en 0?

Exercice 34 rms134-1488

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

1. Vérifier que

$$\forall (t, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*, \quad |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}.$$

2. Démontrer que

$$\forall (t, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*, \quad \left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{t}{n}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0, 1], \quad G_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(G_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 35 rms134-1489

On considère le segment $I = [0, \pi/2]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall t \in I, \quad f_n(t) = n \cos^n t \sin t.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Soit $0 < \alpha < \pi/2$. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $I_\alpha = [\alpha, \pi/2]$.
Cette suite de fonctions converge-t-elle uniformément sur I ? On pourra considérer la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt.$$

3. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) g(t) dt = g(0).$$

pour toute fonction g continue sur I .

Séries de fonctions

Exercice 36 10-01

Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et s'il existe deux réels strictement positifs M et r tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]-r, r[, \quad |f^{(n)}(t)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

alors f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

Exercice 37**10-02**

On pose

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{p,q} = \frac{(-1)^{p+q}}{2^{p+q}(p+q+1)}.$$

La famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et sa somme est égale à

$$6 \cdot (2 \ln 3 - 3 \ln 2).$$

Exercice 38**10-03**

Les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de

$$4tx''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0 \quad (*)$$

sont proportionnelles à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^n.$$

La fonction x est solution de $(*)$ sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, la fonction y définie par $x(t) = y(\sqrt{t})$ est solution de l'équation $y''(u) + y(u) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 39**10-04**

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif et on note S , sa somme :

$$\forall |z| < R, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

1. La connaissance de la somme S permet de retrouver les coefficients a_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 < r < R, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S(re^{it}) e^{-int} dt.$$

2. Si $R = +\infty$ et si la somme S est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.

3. La fonction $\cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$, développable en série entière sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas constante.

Exercice 40**10-05**

Soit $r > 0$. On suppose que la série numérique $\sum a_n r^n$ converge.

1. Les suites de termes généraux

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k r^k \quad \text{et} \quad M_n = \sup\{|R_k|, k \geq n\}$$

sont bien définies. La suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

2. Pour tout $0 \leq x \leq r$, la série

$$\sum \left[\left(\frac{x}{r} \right)^k - \left(\frac{x}{r} \right)^{k+1} \right]$$

est une série convergente de terme général positif.

3. Quels que soient les entiers $n < N$ et $x \in [0, r]$,

$$\sum_{k=n+1}^N a_k x^k = \sum_{k=n+1}^N (R_{k-1} - R_k) \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^k.$$

et par conséquent

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^n + \sum_{k=n}^{+\infty} R_k \cdot \left[\left(\frac{x}{r} \right)^{k+1} - \left(\frac{x}{r} \right)^k \right]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, r]$.

4. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, r], \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq 2M_n,$$

la série entière $\sum a_k x^k$ converge uniformément sur $[0, r]$.

Exercice 41**10-06**

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif et on note f , sa somme :

$$\forall |z| < R, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Pour tout réel $0 \leq r < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Exercice 42**10-07**

On considère deux fonctions analytiques

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

ainsi que leur produit de Cauchy

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente et que la série $\sum b_n$ est semi-convergente.

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à 1, celui de la série entière $\sum b_n x^n$ est égal à 1.

La fonction A est continue sur $[-1, 1]$, la fonction B est continue sur $] -1, 1[$ et la fonction C est continue sur $] -1, 1[$.

2. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N c_n = \sum_{k=0}^N a_k \left(\sum_{m=0}^{N-k} b_m \right) \quad (1)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^N c_n - \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) B(1) = - \sum_{k=0}^N a_k \left(\sum_{m=N-k+1}^{+\infty} b_m \right). \quad (2)$$

3. On peut en déduire de deux manières que $C(x)$ est définie pour $x = 1$ et que $C(1) = A(1) \cdot B(1)$.

3.a. Le second membre de (2) tend vers 0.

3.b. D'après (1), la série $\sum c_n$ converge.

Exercice 43**10kh-01**

Convergence et somme de

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+2}.$$

Exercice 44**10kh-02**

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$, une suite complexe telle que $\sum |a_n|^2$ converge.

1. Démontrer que la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-x}$$

est définie et continue sur $] -1, 1[$.

2. Démontrer que S est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et donner son développement.

3. On suppose que S est identiquement nulle. Démontrer que $(a_n)_{n \geq 1}$ est la suite nulle.

Exercice 45**10kh-03**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = a_0 + \dots + a_{n-1}$ et on suppose que $A_n \sim n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum A_n x^n$.

2. Déterminer la limite lorsque x tend vers 1 de

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exercice 46**10kh-04**

Soit $t \in \mathbb{R}$, fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_k = \frac{\sin kt}{k}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_k x^k$.

2. Étudier la convergence de $\sum a_k x^k$ pour $x = \pm R$.

Exercice 47**10kh-05**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que le rayon de convergence R de la série entière est strictement positif et on note R' , le rayon de convergence de la série entière $\sum \sin a_n x^n$.

1. Démontrer que $R' \geq R$ et que, si $R > 1$, alors $R = R'$.

2. Déterminer les valeurs possibles de R'/R .

Exercice 48**10kh-06**

Rayon de convergence et somme de la série entière

$$\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

Exercice 49**10kh-07**

On suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif. Pour $|z| < R$, on

note

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et on suppose qu'il existe une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes deux à deux distincts qui tend vers 0 et telle que $f(z_p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que tous les coefficients a_n sont nuls.

Exercice 50**10kh-08**

Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

1. Démontrer que F est continue.

2. Déterminer un équivalent de $F(1) - F(x)$ lorsque x tend vers 1.

3. Étudier la dérivabilité de F en 1.

Exercice 51**10kh-09**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$.

2. Étudier la convergence de $\sum I_n x^n$ pour $x = \pm R$.

3. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ pour $|x| < 1$.

Exercice 52**10kh-10**

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$a_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence et la somme de $\sum a_n$.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ et étudier la somme au voisinage de R^- .

Exercice 53**10kh-11**

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$.

1. Donner le développement $\sum a_n x^n$ de $f_\alpha(x)$. Démontrer qu'il existe $c > 0$ tel que $|a_n| \sim \frac{c}{n^{\alpha+1}}$.

2. La série $\sum a_n$ converge-t-elle? Si oui, quelle est sa somme?

Exercice 54**10kh-12**

Soit $\sum a_n x^n$, une série entière à coefficients complexes de rayon de convergence 1. Pour $|x| < 1$, on note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Démontrer que, si la série $\sum a_n$ converge, alors la fonction f tend vers une limite finie en 1^- .

2. On suppose que f tend vers une limite finie en 1^- . La série $\sum a_n$ converge-t-elle?

Exercice 55**10kh-13**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle telle que $a_0 > 0$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \ln(1 + a_n).$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série en $x = \pm R$.
3. Donner un équivalent de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ au voisinage de R^- .

Exercice 56**10kh-14**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite complexe de limite nulle. On pose

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n.$$

1. Démontrer que f est définie sur $] -1, 1[$.
2. Démontrer que $(1 - t)f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 1.

Exercice 57**10Kh-51**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}.$$

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Calculer la somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

pour $0 < x < R$.

3. Calculer $f(R)$.

Exercice 58**10Kh-52**

Calculer le rayon de convergence R et, pour $0 < x < R$, la somme de la série entière

$$\sum \frac{(2n)(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1} x^n.$$

Exercice 59**rms128-705**

Décomposer en série entière l'application f définie par

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

Exercice 60**rms130-1401**

1. Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t < 1, \quad (1-t)x'(t) - x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

2. Démontrer que les solutions de (E) sont développables en série entière au voisinage de 0.
3. Comment trouver les coefficients du développement en série entière d'une solution de (E)?

Exercice 61**rms132-610**

Soit A , une partie de $\mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!}$$

et on suppose que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}.$$

1. Soit I , une partie finie de A . Calculer

$$\sum_{n \in I} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx$$

et en déduire que A est une partie finie.

2. Que peut-on en conclure?

Exercice 62**rms132-1171**

On considère la fonction f définie par

$$\forall 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

1. Vérifier que f est prolongeable par continuité en 1.
2. Démontrer que f est intégrable sur $I =]0, 1[$.
3. Donner le développement en série entière de f au voisinage de 1.
4. Calculer l'intégrale de f sur I .

Exercice 63**rms132-1173**

1. Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2} dt$$

est convergente.

2. Calculer l'intégrale

$$u_n = \int_0^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Au moyen d'un développement en série entière, en déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}.$$

Exercice 64**rms132-1224**

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k \theta \, d\theta$$

et pour tout $x \in]0, 1[$, on pose

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}}.$$

1. Justifier l'existence de l'intégrale I_k et vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} I_k.$$

Exprimer I_{2k} à l'aide de factorielles.

2. Donner, sous forme simplifiée, le développement en série entière de

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}}.$$

3. Justifier l'existence de $f(x)$ et démontrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \binom{2k}{k}^2 x^{2k}.$$

4. Démontrer que f admet une limite ℓ , finie ou infinie, au voisinage de -1 . Calculer cette limite.

Exercice 65**rms133-1327**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}.$$

1. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n .

Exercice 66**rms134-1497**

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum n^{(-1)^n} x^n$$

et calculer sa somme.

Exercice 67**rms134-1498-1503**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt.$$

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \pi/4.$$

En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est au moins égal à 1.

2. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}.$$

En déduire un équivalent simple de I_n et déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum I_n x^n$.

3. Calculer la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

4. Calculer la somme suivante.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 68**rms134-1499**

On note

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$$

et D , l'ensemble des réels x pour lesquels la somme $S(x)$ est définie.

1. Identifier l'ensemble D . La somme S est-elle continue sur D ?
2. Démontrer que la série entière

$$\sum \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n$$

converge normalement sur $[-1, 1]$.

3. En déduire la limite de $(1-x)S(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Exercice 69**rms135-962**

On considère l'équation différentielle

$$x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0 \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Résoudre (E) sur un intervalle I sans singularité.
3. Peut-on raccorder les solutions de part et d'autre d'une singularité?

Exercice 70**rms135-1498**

On pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n.$$

1. Calculer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Expliciter $S(t)$ pour $t \in]-R, R[$.
3. Soit X , une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \lambda S(t).$$

- 3.a. Que vaut λ ?
3.b. Calculer $P(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3.c. Calculer l'espérance et la variance de X .

Solution 1

08-01

1. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f - f_n$ et $g - g_n$ sont bornées sur Ω et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - g_n\|_\infty = 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \Omega$. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |(\lambda f + g)(x) - (\lambda f_n + g_n)(x)| &= |\lambda(f(x) - f_n(x)) + (g(x) - g_n(x))| \\ &\leq |\lambda| |f(x) - f_n(x)| + |g(x) - g_n(x)| \\ &\leq |\lambda| \|f - f_n\|_\infty + \|g - g_n\|_\infty \end{aligned}$$

puisque la borne supérieure est un majorant.

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in \Omega$ et ce majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (combinaison linéaire de deux suites de limite nulle), on a donc établi que la suite de fonctions $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur Ω vers la fonction $(\lambda f + g)$.

2. Comme les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément sur Ω , ces fonctions sont uniformément bornées : il existe deux constantes M_f et M_g telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \leq M_f \quad \text{et} \quad \|g_n\|_\infty \leq M_g.$$

En posant $M_0 = \max\{M_f, M_g\}$, on obtient une constante qui majore les deux suites de fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \leq M_0 \quad \text{et} \quad \|g_n\|_\infty \leq M_0$$

ainsi que leurs limites simples respectives :

$$\|f\|_\infty \leq M_0, \quad \|g\|_\infty \leq M_0$$

(puisque les inégalités larges sont conservées par convergence simple).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \Omega$. L'astuce taupinale (classique à chaque fois qu'on étudie la convergence d'un produit) et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |f_n(x)[g_n(x) - g(x)]| + |[f_n(x) - f(x)]g(x)| \\ &\leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \|g\|_\infty \\ &\leq M_0 (\|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty), \end{aligned} \tag{*}$$

l'inégalité (*) découlant une fois de plus du fait que la borne supérieure est un majorant.

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in \Omega$ et, lorsque n tend vers $+\infty$, ce majorant tend vers 0, donc on a prouvé que la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur Ω vers la fonction fg .

Solution 2

08-02

Considérons un segment $[A, B]$ contenu dans Ω .

Comme les fonctions f_n et g_n sont continues sur le segment $[A, B]$, elles sont toutes bornées sur ce segment. Comme les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément sur le segment $[A, B]$, on en déduit qu'il s'agit de deux suites de fonctions bornées qui convergent uniformément sur $[A, B]$, respectivement vers les fonctions f et g .

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[A, B]$ vers le produit fg .

On a ainsi démontré que la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur tout segment de Ω vers la fonction fg .

Solution 3**08-03**

1.  On fera attention à ne pas confondre les deux normes uniformes utilisées ici !

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| \quad \text{pour } f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$N_\infty(\psi) = \sup_{t \in J} |\psi(t)| \quad \text{pour } \psi : J \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

c'est-à-dire

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup \{ |f_n(x) - f(x)|, x \in I \}.$$

De même,

$$\begin{aligned} N_\infty(f_n \circ \psi - f \circ \psi) &= \sup \{ |f_n(\psi(t)) - f(\psi(t))|, t \in J \} \\ &= \sup \{ |f_n(x) - f(x)|, x \in \psi_*(J) \}. \end{aligned}$$

Par hypothèse,

$$\psi_*(J) \subset I$$

et par croissance de l'opérateur sup,

$$N_\infty(f_n \circ \psi - f \circ \psi) \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq N_\infty(f_n \circ \psi - f \circ \psi) \leq \|f_n - f\|_\infty$$

et comme l'énoncé suppose que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut déduire du théorème d'encadrement que la suite de fonctions $(f_n \circ \psi)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers la fonction $f \circ \psi$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction φ est uniformément continue sur Ω , il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (y, z) \in \Omega^2, \quad |y - z| \leq \alpha \implies |\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \varepsilon$$

et, par hypothèse de convergence uniforme, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \alpha.$$

Les fonctions f et f_n prennent leurs valeurs dans Ω . Par conséquent, pour tout $x \in I$, on peut poser $y = f_n(x)$ et $z = f(x)$. Pour tout $n \geq n_0$, on sait que

$$|y - z| = |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$$

et donc que

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| = |\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi trouvé un majorant indépendant de $x \in I$: en passant à la borne supérieure, on en déduit que

$$\forall n \geq n_0, \quad \|\varphi \circ f_n - \varphi \circ f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que la suite de fonctions $(\varphi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur I vers la fonction $\varphi \circ f$.

Solution 4**08-04**

1. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in I =]0, +\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}.$$

 Pour tout $x \in I$, on a $u_n = \mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, on en déduit que $\sum u_n(x)$ est aussi absolument convergente. Donc la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est bien définie pour tout $x \in I$.

• Soient $0 < x < y$. Il est clair que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < u_n(y) < u_n(x).$$

En sommant ces encadrements pour $n \geq 1$, on en déduit que la somme S est une fonction décroissante et positive sur I :

$$\forall 0 < x < y, \quad 0 < S(y) < S(x).$$

On en déduit d'une part que S tend vers une limite positive finie au voisinage de $+\infty$ (fonction décroissante et minorée); d'autre part que S tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ au voisinage de 0 (fonction décroissante).

• Il est clair que u_n est continue sur I pour tout $n \geq 1$.

Pour $a > 0$,

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad 0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n + n^2 a}$$

(le majorant ne dépend pas de x) et comme

$$\frac{1}{n + n^2 a} = \mathcal{O}(1/n^2)$$

lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a, +\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont toutes continues sur $[a, +\infty[$, on en déduit que la somme S est continue sur $[a, +\infty[$.

Pour tout $x_0 > 0$, il existe $0 < a < x_0$, donc S est continue au point x_0 . Cela prouve que S est continue en chaque point $x_0 \in I$, c'est-à-dire que S est continue sur I .

2. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in I$, on pose

$$v_n(x) = xu_n(x) = \frac{x}{n + n^2 x}.$$

Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 1$,

$$0 \leq v_n(x) = \frac{1}{n^2 + n/x} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur un voisinage de $+\infty$ (ici : $\mathcal{V} = [1, +\infty[$).

Or, pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Donc (théorème de dérivation terme à terme, 76.) la somme $xS(x)$ tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et cette limite est égale à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Autrement dit, $S(x) \sim \frac{\pi^2}{6x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. En particulier, la fonction S tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

3. On calcule l'intégrale en décomposant en éléments simples :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{x}{1 + tx} dt \\ &= \left[\ln \frac{t}{1 + tx} \right]_1^{+\infty} \\ &= \ln \frac{1}{x} - \ln \frac{1}{1 + x} \end{aligned}$$

et en particulier

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x} &= -\ln x + \ln(1 + x) \\ &= -\ln x + x + o(x) \\ &\sim -\ln x \end{aligned}$$

lorsque x tend vers 0 .

✚ Pour tout $x \in I$, la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t + t^2 x}$$

est clairement une fonction décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1}(x) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq u_n(x)$$

et en sommant ces encadrements pour $n \geq 1$, on en déduit que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leq \int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

c'est-à-dire que

$$S(x) - \frac{1}{1+x} \leq \int_1^{+\infty} f(t) dt \leq S(x).$$

En particulier,

$$S(x) = \int_1^{+\infty} f(t) dt + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers 0.

Le développement asymptotique calculé plus haut donne enfin :

$$S(x) = -\ln x + \mathcal{O}(1) \sim -\ln x$$

lorsque x tend vers 0.

✚ Le fait que la somme S tende vers une limite infinie au voisinage de 0 prouve que la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas uniforme au voisinage de 0 (théorème de passage à la limite terme à terme).

Solution 5

08-05

1. ✚ Convergence simple

Il est clair que $u_n(x) = \mathcal{O}(1/n^2)$ pour tout $x \in \Omega$, donc la série $\sum u_n(x)$ converge absolument et la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est donc bien définie sur Ω .

✚ Monotonie

Chaque fonction u_n est clairement croissante, donc

$$\forall -1 < x < y, \quad u_n(x) \leq u_n(y)$$

et en sommant

$$\forall -1 < x < y, \quad S(x) \leq S(y).$$

La fonction S est donc croissante sur Ω .

✚ Continuité

Quels que soient $-1 < a < 0 < b$, par monotonie de u_n , on a

$$\forall a \leq x \leq b, \quad 0 \leq u_n(x) \leq \frac{b}{n(n+a)}.$$

Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$.

Comme chaque fonction u_n est continue, on en déduit que la somme S est continue sur

$$\Omega = \bigcup_{-1 < a < 0 < b} [a, b].$$

2. ✚ Équation fonctionnelle

Pour $x > -1$,

$$\begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+(x+1)} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{(n+1)+x} \right) && \text{(linéarité)} \\ &= \frac{1}{1+x}. && \text{(télescopage)} \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers -1 , le second membre tend vers $+\infty$ et $S(x+1)$ tend vers $S(0) = 0$ (puisque S est continue sur $]-1, 1[$ (et donc en particulier continue au point $x = 0$). On a donc

$$S(x) = \frac{-1}{1+x} + S(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-1}{1+x} + o(1) \sim \frac{-1}{1+x}.$$

3. Étude au voisinage de $+\infty$

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right).$$

Impossible de traiter cette question sans changer d'indice !

Pour tout entier $N \geq n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right) &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

La dernière somme est constituée de n termes (où n est ici fixé) et chaque terme (positif) est inférieur à $1/N$, donc cette somme est bornée par n/N et tend donc vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

Par conséquent,

$$\forall n \geq 1, \quad S(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

4. Pour tout $x > 0$ fixé, on pose

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}.$$

Il est clair que f est une fonction décroissante, positive, continue et intégrable sur $[1, +\infty[$. Par comparaison d'une somme avec une intégrale (faire une FIGURE !),

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x} + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

Pour tout $A > 1$,

$$\int_1^A f(t) dt = \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} dt = \ln\left(\frac{A}{1} \cdot \frac{1+x}{A+x}\right)$$

donc en faisant tendre A vers $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \ln(1+x).$$

Comme $\frac{x}{1+x}$ reste bornée au voisinage de $+\infty$ (cette expression tend vers 1), on déduit de l'encadrement précédent que

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1+x) \sim \ln x.$$

Cet exercice présente une application typique de la comparaison somme/intégrale.

Solution 6**08-06**

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{n^3}.$$

• **Convergence simple**

Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls, donc la somme est bien définie (et nulle).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$u_n(x) = \frac{\ln(n^2) + \ln(x^2 + 1/n^2)}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln n}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série $\sum u_n(x)$ converge absolument et la somme $S(x)$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

• **Classe $\mathcal{C}^1$**

Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$u'_n(x) = \frac{2n^2 x}{n^3(1 + n^2 x^2)} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{nx}{1 + (nx)^2}.$$

L'étude de $[t \mapsto \frac{t}{1+t^2}]$ montre que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{t}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

et donc que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, la série $\sum u'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n(1 + n^2 x^2)}.$$

• **Classe $\mathcal{C}^2$**

Pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$,

$$u''_n(x) = \frac{2}{n} \cdot \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Pour tout $a > 0$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \forall x \geq a, \quad |u''_n(x)| \leq \frac{2}{n} \cdot \frac{1 + n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} \leq \frac{2}{n(1 + n^2 a^2)}.$$

Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente (puisque $a > 0$). On en déduit que la série $\sum u''_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ et donc que la somme S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$

avec

$$\forall x > 0, \quad S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

▮ Si on a l'audace de prendre $x = 0$ dans cette formule (qui n'a été établie que pour $x > 0$), on constate que la série diverge. Il est donc probable que S ne soit pas de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0.

• Par symétrie (la somme S étant évidemment une fonction paire), la somme S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et l'expression précédente est vraie sur $\mathbb{R}^*$.

• **Étude au voisinage de 0**

L'expression

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n(1 + n^2 x^2)}$$

va nous permettre d'y voir plus clair dans le comportement de S au voisinage de l'origine.

Pour $x > 0$, on pose

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{2x}{t(1 + t^2 x^2)}.$$

Il est clair que la fonction f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$. (Il est tout aussi clair qu'elle n'est pas intégrable au voisinage de l'origine!)

La comparaison classique somme/intégrale nous donne alors

$$\forall x > 0, \quad \int_1^{+\infty} f(t) dt \leq S'(x) \leq \frac{2x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{2x}{t(1+t^2x^2)} = 2x \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2 t}{1+x^2 t^2} \right)$$

on intègre ensuite sur $[1, A]$:

$$\int_1^A \frac{2x}{t(1+t^2x^2)} dt = 2x \left[\ln \frac{A}{\sqrt{1+x^2 A^2}} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]$$

et on fait enfin tendre A vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = -2x \ln|x| + x \ln(1+x^2).$$

Lorsque x tend vers 0, on a

$$\frac{2x}{1+x^2} \sim 2x, \quad x \ln(1+x^2) \sim x^3 \quad \text{et} \quad x = o(2x \ln|x|)$$

donc

$$S'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x \ln|x|.$$

Cette estimation confirme que $S'(x)$ tend vers $S'(0) = 0$ lorsque x tend vers 0 et que le graphe de S' admet une tangente verticale au point $x = 0$, ce qui prouve que S n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0.

Solution 7

08-07

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \Omega =]0, +\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}.$$

Chaque fonction u_n est continue sur Ω (fonction rationnelle de x , dont le dénominateur reste strictement positif sur Ω).

Pour tout $x \in \Omega$, la suite de terme général

$$|u_n(x)| = \frac{1}{1+nx}$$

tend vers 0 en décroissant. On peut alors déduire du Critère spécial des séries alternées que la série $\sum u_n(x)$ est convergente (la série de fonctions $\sum u_n$ converge donc simplement sur Ω) ainsi que la domination suivante du reste :

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n(x)| &\leq |u_{n+1}(x)| \\ &\leq \frac{1}{1+(n+1)x}. \end{aligned} \quad (*)$$

Pour tout $a > 0$, on pose

$$V_a = [a, +\infty[.$$

On déduit alors de (*) que

$$\forall x \in V_a, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, cela prouve donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur chaque intervalle V_a .

Par conséquent, la somme S de cette série est continue sur

$$\Omega = \bigcup_{a>0} V_a.$$

✎ Nous allons maintenant appliquer deux fois le Théorème de passage à la limite terme à terme.

• Lorsque x tend vers $+\infty$, il est clair que $u_0(x)$ tend vers 1 et que $u_n(x)$ tend vers 0 pour tout entier $n \geq 1$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur V_1 (= un voisinage de $+\infty$), on en déduit que la somme S admet une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 1.$$

• En revanche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ (= un espace vectoriel de dimension finie) et tendent vers une limite finie au voisinage de 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = (-1)^n.$$

Comme la série $\sum (-1)^n$ diverge, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur Ω (par contraposée du Théorème de passage à la limite terme à terme).

✎ *Petit complément de programme : nous allons calculer un développement asymptotique de S au voisinage de $+\infty$. Intuitivement, on se doute que*

$$S(x) - 1 \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. Pour en avoir le cœur net, on étudie la différence entre ces deux quantités :

$$\begin{aligned} S(x) - 1 - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1+nx} - \frac{1}{nx} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)}. \end{aligned}$$

Comme la suite de terme général

$$\frac{1}{nx(1+nx)}$$

tend vers 0 en décroissant pour tout $x \in \Omega$, on peut appliquer à nouveau le Critère spécial des séries alternées :

$$\forall x \in \Omega, \quad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)} \right| \leq \frac{1}{x(1+x)}$$

ce qui prouve en particulier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

lorsque x tend vers $+\infty$. On a ainsi démontré que

$$S(x) = 1 + \frac{K}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, où

$$K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Solution 8

08-08

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

- Pour $0 \leq x < 1$, on sait que x^n tend vers 0 et par conséquent $u_n(x) \sim x^n$, donc $\sum u_n(x)$ converge absolument. Pour $x = 1$, on a $u_n(x) = 1/2$ pour tout $n \geq 1$, donc la série $\sum u_n(1)$ diverge grossièrement. Enfin, pour $x > 1$, on sait que x^n tend vers $+\infty$, donc

$$u_n(x) \sim \frac{x^n}{x^{2n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = (1/x)^n$$

et comme $0 < 1/x < 1$, on en déduit que $\sum u_n(x)$ converge absolument.

L'ensemble de définition de la somme S est donc

$$\mathcal{D}_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

2. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathcal{D}_f$, il est clair que $1/x \in \mathcal{D}_f$ et que

$$u_n(1/x) = \frac{(1/x)^n}{1 + (1/x)^{2n}} = \frac{x^n}{x^{2n} + 1} = u_n(x).$$

Par conséquent, $S(1/x) = S(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et il suffit donc d'étudier les variations de S sur $I = [0, 1[$.

3. Soit $0 < a < 1$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, a]$, il est clair que

$$0 \leq x^n \leq a^n \quad \text{et} \quad 1 \leq 1 + x^{2n}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, a], 0 \leq u_n(x) \leq a^n.$$

On a obtenu un majorant **indépendant de x** en $[0, a]$ et comme $0 < a < 1$, la série géométrique $\sum a^n$ est convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la somme S est continue sur $[0, a]$ pour tout $0 < a < 1$ et donc qu'elle est continue sur

$$[0, 1[= \bigcup_{0 < a < 1} [0, a].$$

La fonction S est aussi continue sur $]1, +\infty[$, comme composée de fonctions continues.

$$\begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \xrightarrow{x \mapsto 1/x} &]0, 1[\\ x & & 1/x \end{array} \quad \begin{array}{c} S \\ S(1/x) = S(x) \end{array} \mathbb{R}$$

Finalement, la fonction S est continue sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

✎ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n tend vers $\ell_n = 1/2$ au voisinage de 1. Si la série de fonctions $\sum u_n$ convergerait uniformément sur $[0, 1]$, alors en particulier la série $\sum \ell_n$ convergerait (Théorème de passage à la limite terme à terme), ce qui est faux, puisque la série $\sum \ell_n$ est grossièrement divergente.

Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$ (ni, a fortiori, normalement sur $[0, 1]$).

✎ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $0 \leq x < 1$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$u'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - x^{2n})}{(1 + x^{2n})^2} > 0.$$

Soit $0 < a < 1$. On peut encadrer $u'_n(x)$ comme on a encadré $u_n(x)$ précédemment :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, a], 0 \leq u'_n(x) \leq \frac{n \times a^{n-1} \times 1}{1 + 0} = na^{n-1}.$$

On a à nouveau obtenu un majorant indépendant de x en $[0, a]$. Comme $0 < a < 1$, la série $\sum na^{n-1}$ est convergente (série entière dont le rayon de convergence est égal à 1), donc la série dérivée $\sum u'_n$ converge normalement sur tout segment $[0, a] \subset [0, 1[$.

Nous étudions donc une série $\sum u_n$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; qui converge simplement sur $[0, 1[$; dont la série dérivée $\sum u'_n$ converge normalement sur tout segment $[0, a] \subset [0, 1[$. Par conséquent, la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$$[0, 1[= \bigcup_{0 < a < 1} [0, a]$$

et, pour tout $0 \leq x < 1$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) > 0.$$

En particulier, la somme S est strictement croissante sur $[0, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ (comme composée de fonctions strictement monotones, de monotonies opposées).

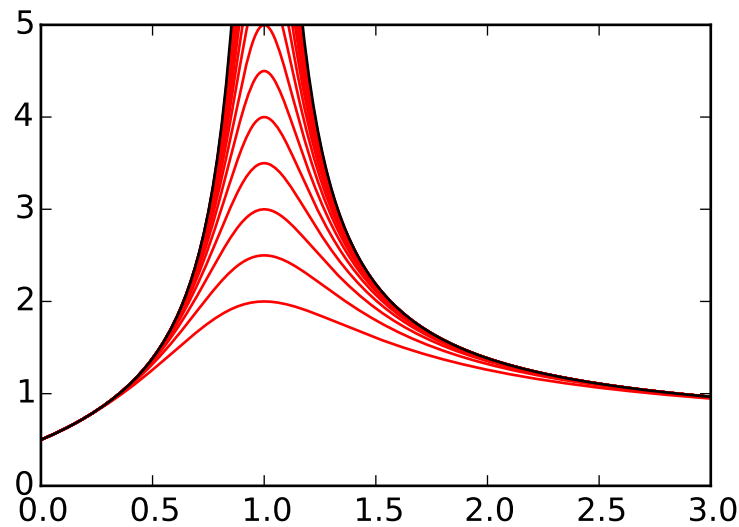
• Comme les u_k sont des fonctions positives,

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \forall n \geq 1, \quad S(x) \geq \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Comme la fonction S est croissante sur $[0, 1[$, elle tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ au voisinage gauche de 1. Comme les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de l'inégalité précédente que

$$\forall n \geq 1, \quad \ell \geq \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n u_k(1) = \frac{n}{2}.$$

Par conséquent, $\ell = +\infty$, donc le graphe de S présente une asymptote verticale en $x = 1$.



Graphes de S et des premières sommes partielles

• Comme la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément au voisinage de 1, on ne peut pas utiliser les théorèmes vus en cours pour étudier le comportement de S au voisinage de 1, il faut procéder comme on l'a fait (en minorant les sommes partielles).

Solution 9

08-09

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{\ln(n + e^{nx})}{n^3}.$$

Il est clair que chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et positive sur $\mathbb{R}$,

• Pour $x \leq 0$, le terme e^{nx} est borné, donc (lorsque n tend vers $+\infty$)

$$u_n(x) = \frac{\ln[n + \mathcal{O}(1)]}{n^3} = \frac{\ln n + o(1)}{n^3} \sim \frac{\ln n}{n^3} \cdot \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour $x > 0$, au contraire, $e^{nx} = (e^x)^n$ tend vers $+\infty$ et $n = o(e^{nx})$, donc

$$u_n(x) = \frac{\ln(e^{nx}) + \ln[1 + o(1)]}{n^3} = \frac{nx + o(1)}{n^3} \sim \frac{x}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Bref : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente et l'ensemble de définition de S est égal à $\mathbb{R}$.

• Pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n est évidemment croissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall x \in]-\infty, a], \quad 0 \leq u_n(x) \leq u_n(a)$$

et, comme on vient de le voir, $u_n(a) = \mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On a bien trouvé un majorant indépendant de x et ce majorant est bien le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur chaque intervalle $]-\infty, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Comme les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme S est continue sur chaque intervalle $]-\infty, a]$ et donc qu'elle est continue sur

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}}]-\infty, a] =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

✎ Pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ car :

$$u_n(x) = \frac{\ln(e^{nx}) + \ln(1 + ne^{-nx})}{n^3} = \frac{nx + o(1)}{n^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Comme les fonctions u_n ne sont pas bornées, la série de fonctions $\sum u_n$ ne saurait être normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme les fonctions u_n sont positives,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geq u_{n+1}(x)$$

donc le reste R_n n'est pas borné non plus sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle et la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas non plus uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

✎ Pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'_n(x) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{e^{nx}}{n + e^{nx}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{nx}}{n + e^{nx}}.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq u'_n(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série dérivée $\sum u'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On a donc une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et dont la série dérivée converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

On déduit de l'encadrement de $u'_n(x)$ que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < S'(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, la fonction S est strictement croissante et $\pi^2/6$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

✎ Pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n tend vers $\ln n/n^3$ au voisinage de $-\infty$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de $-\infty$, on en déduit que la somme S tend vers une limite finie au voisinage de $-\infty$ et que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}.$$

✎ Comme

$$\forall n \geq 1, \quad u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$$

on conjecture que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (\pi^2/6)x$. Pour en avoir le cœur net, on pose

$$S(x) - \frac{\pi^2}{6} \cdot x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n + e^{nx}) - nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \quad \text{où} \quad v_n(x) = \frac{\ln(1 + ne^{-nx})}{n^3}.$$

Pour tout $n \geq 1$, la fonction v_n est positive et décroissante, donc

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq v_n(x) \leq v_n(1)$$

et comme ne^{-n} tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,

$$v_n(1) = \ln(1 + ne^{-n}) \sim ne^{-n} = n(e^{-1})^n$$

donc la série $\sum v_n(1)$ est convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$ et, comme cet intervalle est un voisinage de $+\infty$,

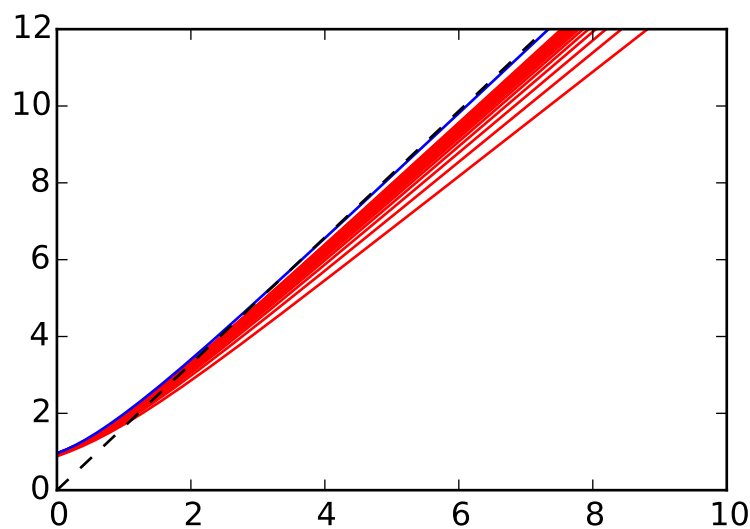
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) - \frac{\pi^2}{6} \cdot x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = 0.$$

Autrement dit, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$S(x) = \frac{\pi^2}{6} \cdot x + o(1)$$

et donc, comme on en avait eu l'intuition,

$$S(x) \sim \frac{\pi^2}{6} \cdot x.$$



Graphique de S avec les premières sommes partielles et l'asymptote oblique

Solution 10

08-10

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}.$$

• Si $x \leq 0$, la suite de terme général $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Mais si $x > 0$, alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad n^p u_n(x) = \exp(\underbrace{-x\sqrt{n} + p \ln n}_{\rightarrow -\infty}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc (pour $p = 2$) $u_n(x) = o(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.

L'ensemble de définition de S est donc égal à $]0, +\infty[$.

2. Pour tout entier $k \geq 1$,

$$\forall x > 0, \quad u_n^{(k)}(x) = (-\sqrt{n})^k \cdot u_n(x)$$

donc, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $a > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, +\infty[, \quad |u_n^{(k)}(x)| \leq (\sqrt{n})^k \cdot u_n(a).$$

On a obtenu un majorant indépendant de x et, d'après l'ordre de grandeur calculé à la question précédente (avec cette fois $p = 2 + k/2$),

$$(\sqrt{n})^k \cdot u_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1/n^2),$$

donc la série des majorants est convergente.

La série de fonctions $\sum u_n$ est donc une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur $]0, +\infty[$ et dont les séries dérivées convergent normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$ quel que soit $a > 0$. Par conséquent, la somme S de cette série de fonctions est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$

et, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\forall x > 0, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x).$$

En particulier,

$$\forall x > 0, \quad S'(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-\sqrt{n}x} < 0$$

donc la somme S est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. On a démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur un voisinage de $+\infty$ et il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n tend vers une limite finie ℓ_n au voisinage de $+\infty$:

$$\ell_0 = 1, \quad \forall n \geq 1, \quad \ell_n = 0$$

donc la somme S tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

4. Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, on pose

$$f(x, t) = \exp(-\sqrt{t}x)$$

de telle sorte que $u_n(x) = f(x, n)$. Pour tout $x > 0$, la fonction

$$[t \mapsto f(x, t)]$$

est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme la série $\sum u_n(x)$ est convergente, on en déduit que $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \quad S(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x, n) \leq \int_0^{+\infty} f(x, t) dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(x, n) = S(x).$$

Effectuons le changement de variable $v = x \cdot \sqrt{t}$: la fonction $\varphi = [v \mapsto t = v^2/x^2]$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et comme $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, la fonction

$$\left[v \mapsto f(x, \varphi(v)) \cdot \varphi'(v) = f\left(x, \frac{v^2}{x^2}\right) \cdot \frac{2v}{x^2} = \frac{2}{x^2} \cdot v e^{-v} \right]$$

est aussi intégrable sur $]0, +\infty[$ (ce qui n'est pas une grande nouvelle!) et

$$\int_0^{+\infty} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-v} \cdot \frac{2v}{x^2} dv = \frac{2\Gamma(2)}{x^2} = \frac{2}{x^2}.$$

L'encadrement de $S(x)$ nous dit alors que

$$\forall x > 0, \quad \frac{2}{x^2} \leq S(x) \leq \frac{2}{x^2} + 1$$

et donc que

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2} + \mathcal{O}(1) \sim \frac{2}{x^2}.$$

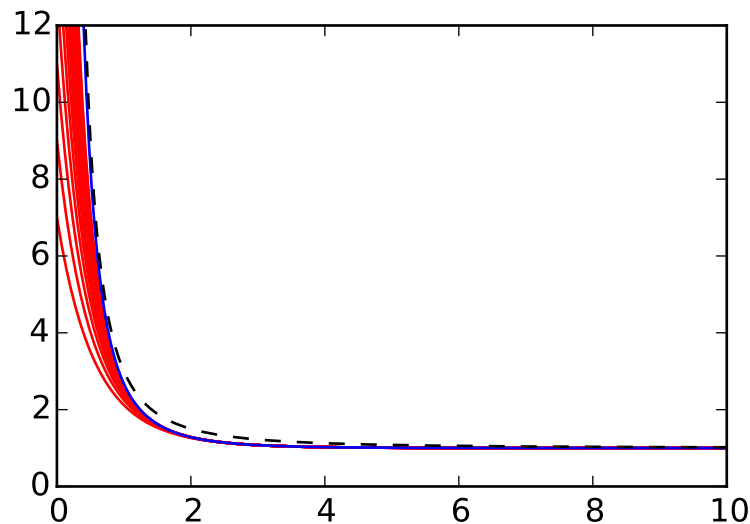
Comme $S(x)$ est une somme de termes positifs, on déduit aussi de ce qui précède que

$$\forall x > 0, \quad 1 = u_0(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}$$

et donc que

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ce qui nous donne à nouveau la limite de S au voisinage de $+\infty$, mais avec en prime une estimation de la différence entre $S(x)$ et sa limite.



Le graphe de S , des premières sommes partielles et de $[x \mapsto 1 + 2/x^2]$

Solution 11

08-11

La convergence uniforme implique la convergence simple, donc la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

est bien définie pour tout $x \in]a, b[$.

• Les fonctions u_n sont toutes continues sur $]a, b[$ et la convergence uniforme conserve la continuité, donc la somme S est une application continue sur $]a, b[$.

• Les fonctions u_k sont intégrables sur $]a, b[$, donc les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

sont intégrables sur $]a, b[$.

Traduisons la convergence uniforme avec $\varepsilon = 1$: il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad \|S - S_n\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in]a, b[, \quad |S(x)| &\leq |S_{N_0}(x)| + |S(x) - S_{N_0}(x)| \\ &\leq |S_{N_0}(x)| + 1. \end{aligned}$$

Or la fonction S_{N_0} est, comme l'a dit, intégrable sur $]a, b[$ et la fonction constante $[x \mapsto 1]$ est intégrable puisque $]a, b[$ est un intervalle BORNÉ. D'après le Théorème de comparaison, la fonction S est intégrable sur $]a, b[$.

• Nous pouvons donc nous intéresser à

$$\int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b S(x) dx.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| &\leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \\ &\leq (b - a) \|S - S_n\|_{\infty}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème d'encadrement, cela prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) dx.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k(x) dx.$$

On a donc démontré que la série $\sum \int_a^b u_n(x) dx$ était convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) dx.$$

Solution 12

08-12

1. Les deux définitions de $f_n(1/n)$ coïncident :

$$n\sqrt{n} \frac{1}{n} = \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1/n}}$$

donc la fonction f_n est bien définie sur $[0, 1]$.

• La fonction f_n est clairement continue sur $[0, 1/n[$, ainsi que sur $]1/n, 1]$. De plus, elle est clairement continue à gauche en $x = 1/n$ et continue à droite en $x = 1/n$, donc elle est bien continue en $x = 1/n$. Par conséquent, la fonction f_n est continue sur le segment $[0, 1]$.

L'intégrale I_n existe donc bien en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

• La fonction f_n est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $[0, 1/n[$ et $]1/n, 1]$. Elle est également dérivable à gauche et à droite en $x = 1/n$, mais

$$(f_n)'_g(1/n) = n\sqrt{n} \quad \text{tandis que} \quad (f_n)'_d(1/n) = \left. \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \right|_{x=1/n} = \frac{-n\sqrt{n}}{2},$$

donc f_n n'est pas dérivable en $x = 1/n$.

• Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Si $0 < x \leq 1$, alors il existe un entier $n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad x \geq \frac{1}{n_0} \geq \frac{1}{n}$$

et donc

$$\forall n \geq n_0, \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

• La fonction f est continue sur $]0, 1]$, mais elle n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$, car elle n'a pas de limite à droite finie au voisinage de 0 (elle tend vers $+\infty$).

• Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$, si la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ convergerait uniformément sur $[0, 1]$, la limite f de cette suite serait également continue sur $[0, 1]$, ce qui est faux comme on vient de le constater.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

2. On peut calculer explicitement I_n : pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = n\sqrt{n} \frac{(1/n)^2}{2} + 2(\sqrt{1} - \sqrt{1/n}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

• Sinon, on peut remarquer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall 0 < x \leq \frac{1}{n}, \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_n(1/n) = \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

et que

$$\forall \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \quad 0 \leq f_n(x) = f(x).$$

Par conséquent,

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq f_n(x) \leq f(x).$$

Or la fonction f est une fonction intégrable de référence sur $]0, 1]$, donc la convergence est dominée!

Par conséquent,

$$\int_0^1 f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = 2[\sqrt{1} - \sqrt{0}] = 2.$$

✎ La fonction f n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ et a fortiori n'est pas intégrable sur $[0, 1]$. Cependant, elle est bien continue sur $]0, 1]$ et intégrable sur $]0, 1]$: c'est même, comme on l'a dit, une fonction de référence!

Cette remarque en passant pour indiquer que la théorie de l'intégration qui est au programme est trop simplifiée pour ne pas présenter quelques bizarreries...

Solution 13

08-13

Soit $x \in]-1, 1[$. Une récurrence immédiate démontre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f(q^{n+1}x) \prod_{k=0}^n \frac{1+q^k x}{1-q^k x}.$$

Comme $|q| < 1$, la suite de terme général $q^{n+1}x$ tend vers 0 et, par continuité de f , la suite de terme général $f(q^{n+1}x)$ tend vers $f(0) = 1$.

Il existe donc au plus une fonction qui répond au problème posé, elle est définie par

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1+q^k x}{1-q^k x}.$$

• Comme $|x| < 1$ et $|q| < 1$, alors $|q^k x| < 1$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et par conséquent,

$$0 < 1 \pm q^k x.$$

Il s'agit donc d'étudier les séries de fonctions

$$\sum \ln(1+q^k x) \quad \text{et} \quad \sum \ln(1-q^k x).$$

• Comme $q^k x$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$,

$$\ln(1 \pm q^k x) \sim x \cdot q^k$$

et comme $|q| < 1$, la série géométrique $\sum q^k$ est absolument convergente. Par comparaison, les deux séries $\sum \ln(1 \pm q^k x)$ sont absolument convergentes pour tout $x \in]-1, 1[$.

• Soit $0 < a < 1$. La fonction $\varphi = [t \mapsto \ln(1+t)]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-a, a]$ et

$$\forall t \in [-a, a], \quad \varphi'(t) = \frac{1}{1+t} \in \left[\frac{1}{1+a}, \frac{1}{1-a} \right].$$

Par conséquent,

$$\forall t \in [-a, a], \quad |\varphi'(t)| \leq \frac{1}{1-a}$$

et on déduit de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall t \in [-a, a], \quad |\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \frac{1}{1-a} \cdot |t - 0|$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in [-a, a], \quad |\ln(1+t)| \leq \frac{|t|}{1-a}.$$

• Par conséquent, pour tout $x \in [-a, a]$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\ln(1 \pm q^k x)| \leq \frac{a}{1-a} \cdot |q|^k.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [-a, a]$ et c'est le terme général d'une série (géométrique) convergente. Donc les séries de fonctions $\sum \ln(1 \pm q^k x)$ convergent normalement sur chaque segment $[-a, a]$.

On sait que la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues est elle aussi continue. En conséquence, les sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 \pm q^k x)$$

sont des fonctions continues de x sur chaque segment $[-a, a]$ et donc, la continuité étant une propriété locale, des fonctions continues sur $] -1, 1[$ (intervalle qui est l'union de ces segments).

• Par continuité de la fonction $\exp$, l'expression

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1+q^k x}{1-q^k x} = \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^k x) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^k x)\right)$$

est une fonction continue de x sur $] -1, 1[$ et il est clair que cette expression est égale à 1 pour $x = 0$.

Par ailleurs, pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} f(qx) &= \frac{1+x}{1-x} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^k[qx]) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^k[qx])\right) \\ &= \frac{1+x}{1-x} \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1+q^k x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-q^k x)\right) \\ &= \exp\left(\ln(1+x) - \ln(1-x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1+q^k x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-q^k x)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^k x) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^k x)\right) = f(x). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que la seule fonction possible était bien définie et possédait de plus toutes les propriétés souhaitées.

Solution 14

08-14

1. Posons $I =]0, +\infty[$. Pour tout $t \in I$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(t, x) = \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}.$$

Il est clair que $\varphi_x = [t \mapsto \varphi(t, x)]$ est continue sur I (quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$).

Lorsque t tend vers 0,

$$\varphi(t, x) \sim \frac{t \times 1}{t} = 1$$

donc φ_x est bien intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &\sim te^{-t(x+1)} \\ &= te^{-t(x+1)/2} \cdot e^{-t(x+1)/2} = o(e^{-t(x+1)/2}). \end{aligned}$$

Pour $x > -1$, on a $x+1 > 0$ et φ_x est donc intégrable au voisinage de $+\infty$. En revanche, pour $x \leq -1$, on a $x+1 \leq 0$, donc φ_x tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent,

- si $x > -1$, alors la fonction φ_x est intégrable sur I , donc l'intégrale généralisée $f(x)$ est convergente ;
- si $x \leq -1$, alors la fonction φ_x n'est pas intégrable sur I et, pire encore, l'intégrale généralisée $f(x)$ est divergente.

🔍 *Question classique mais qui demande d'être vigilant au moment de conclure. Comme on sait, il arrive qu'une intégrale généralisée soit convergente même lorsque la fonction intégrande n'est pas intégrable.*

La question posée ici est de savoir si l'intégrale généralisée $f(x)$ est convergente, il ne suffit pas de savoir pour quels x la fonction φ_x est intégrable sur I !

2. Pour tout $t \in I$, le produit $-tx$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = 0.$$

Par ailleurs, la fonction $\exp$ étant croissante,

$$\forall t \in I, \forall x \geq 0, \quad 0 \leq \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} \leq \frac{t}{e^t - 1} = \varphi(t, 0).$$

On a un majorant indépendant de x et intégrable sur I , cette majoration est vraie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc sur un voisinage de $+\infty$. On peut donc déduire du Théorème de convergence dominée que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

3. Considérons $x > 0$, de telle sorte que $x > -1$ et $x - 1 > -1$. Les fonctions φ_x et φ_{x-1} sont donc intégrables sur I et, par linéarité de l'intégrale,

$$f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} (e^{-t(x-1)} - e^{-tx}) dt = \int_0^{+\infty} te^{-tx} dt.$$

Comme $x > 0$, on peut poser $u = xt$ et obtenir

$$f(x-1) - f(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} ue^{-u} du = \frac{1}{x^2} \cdot \Gamma(2) = \frac{1}{x^2}.$$

On en déduit que, pour tout $x > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - f(x+n+1) = \sum_{k=0}^n [f(x+k) - f(x+k+1)] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+k+1)^2}.$$

D'après la question précédente,

$$\forall x > -1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n+1) = 0$$

et comme la série $\sum \frac{1}{(x+k+1)^2}$ converge (le terme général est équivalent à $1/k^2$), on peut passer à la limite et obtenir ainsi :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

4. On peut aussi transformer un peu l'intégrande pour faire apparaître une série géométrique.

$$\begin{aligned} \forall x > -1, \forall t > 0, \quad \varphi(t, x) &= \frac{te^{-(x+1)t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(x+1)t} (e^{-t})^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} te^{-(x+k)t}. \end{aligned}$$

Nous allons donc considérer la série de fonctions $\sum u_k$ définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in I, \quad u_k(t) = te^{-(x+k)t}.$$

Le paramètre x est fixé une fois pour toutes, il n'apparaît donc pas dans les notations utilisées ici. (Ce n'est pas très bien, mais ça simplifie la vie.)

Chaque fonction u_k est intégrable sur I car $x+k > (-1)+1=0$ (cf plus haut pour les détails) et positive, donc

$$\int_0^{+\infty} |u_k(t)| dt = \int_0^{+\infty} u_k(t) dt = \frac{1}{(x+k)^2}$$

avec le changement de variable $v = (x + k)t$.

La série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I et sa somme est la fonction $[t \mapsto \varphi(t, x)]$, qui est bien continue sur I .

▮ Ce qui suit est évident — puisqu'en fait on est parti de $\varphi(t, x)$ et qu'on l'a développée en série de fonctions ! Néanmoins, cette vérification est nécessaire pour justifier l'application du Théorème de dérivation terme à terme.

Enfin, la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |u_k(t)| dt$$

est convergente (le terme général vient d'être calculé). On peut donc intégrer terme à terme :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_k(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

▮ La fonction f est aussi développable en série entière sur $] -1, 1[$ et la méthode est classique (Théorème de Fubini).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] -1, 1[$,

$$\frac{1}{(x+k)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{(1+x/k)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{[1 - (-x/k)]^2}.$$

On a donc $|-x/k| < 1$ et on sait que

$$\forall t \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n$$

donc

$$\frac{1}{(x+k)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{-x}{k} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{k^{n+2}} \cdot x^n$$

et, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} \quad \text{avec} \quad a_{k,n} = \frac{(-1)^n (n+1)}{k^{n+2}} \cdot x^n.$$

Sur l'intervalle ouvert de convergence, une série entière est absolument convergente, donc pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la famille $(a_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et, d'après les calculs précédents,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{k,n}| = \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{|x|}{k} \right)^n = \frac{1}{(k-|x|)^2}.$$

La série $\sum \sigma_k$ est absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann). D'après le Théorème de Fubini, la famille $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ est donc une famille sommable et, en particulier,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{k^{n+2}} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) \zeta(n+2) \cdot x^n. \end{aligned}$$

Solution 15

08-15

1. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe une suite $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers la fonction continue f .

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_k = Q_k + [f(1) - Q_k(1)].$$

La suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien une suite de fonctions polynomiales telles que $P_k(1) = f(1)$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad |P_k(x) - f(x)| \leq |Q_k(x) - f(x)| + |f(1) - Q_k(1)| \leq 2\|Q_k - f\|_\infty.$$

Par conséquent, la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

2. Comme $(n+1) \sim n$ lorsque n tend vers $+\infty$, il suffit de vérifier que

$$\int_0^1 (n+1)t^n f(t) dt - f(1) = \int_0^1 (n+1)t^n [f(t) - f(1)] dt$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Il est capital de remarquer que l'expression $(n+1)t^n$ est positive sur $[0, 1]$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 (n+1)t^n dt = 1.$$

On parle à ce sujet de *densité de probabilité*.

On considère une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telles que $P_k(1) = f(1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

Par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (n+1)t^n [f(t) - f(1)] dt \right| &\leq \int_0^1 (n+1)t^n |f(t) - P_k(t)| dt + \left| \int_0^1 (n+1)t^n [P_k(t) - P_k(1)] dt \right| \quad (\text{car } P_k(1) = f(1)) \\ &\leq \|f - P_k\|_\infty \int_0^1 (n+1)t^n dt + \left| \int_0^1 (n+1)t^n [P_k(t) - P_k(1)] dt \right| \\ &\leq \|f - P_k\|_\infty + \left| \int_0^1 (n+1)t^n [P_k(t) - P_k(1)] dt \right|. \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors $\varepsilon/2 > 0$ et, par hypothèse, il existe un rang $K_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\|f - P_{K_0}\|_\infty \leq \varepsilon/2$.

Comme P_{K_0} est polynomiale, c'est en particulier une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et il existe donc un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que

$$\forall n \geq N_0, \quad \left| \int_0^1 (n+1)t^n [P_k(t) - P_k(1)] dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \quad \left| \int_0^1 (n+1)t^n [f(t) - f(1)] dt \right| \leq \varepsilon$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 t^n f(t) dt = f(1).$$

Solution 16

08-16

1. Pour tout $x \neq 0$, le produit nx tend vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\sin 1/nx$ tend vers 0 (par composition de limites).

Pour $x = 0$, tous les $f_n(x)$ sont nuls.

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Fixons $a > 0$. On sait (Inégalité des accroissements finis) que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |\sin u| \leq |u|.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \neq 0, \quad |f_n(x) - 0| = x^2 \left| \sin \frac{1}{nx} \right| \leq x^2 \cdot \frac{1}{n|x|} = \frac{|x|}{n}.$$

Il est clair que cet encadrement est encore vrai pour $x = 0$.

Par conséquent, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a, a], \quad |f_n(x)| \leq \frac{a}{n}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-a, a]$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc on a prouvé que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ convergeait uniformément sur $[-a, a]$ vers la fonction nulle.

2.

✎ Nous allons chercher une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0, ce qui prouvera que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède, c'est au voisinage de l'infini que la convergence ne serait pas uniforme (restons prudent pour le moment !), donc nous allons chercher une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors le produit nx_n tend vers $+\infty$ et par conséquent

$$f_n(x_n) = x_n^2 \sin \frac{1}{nx_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x_n^2}{nx_n} = \frac{x_n}{n}.$$

En considérant la suite de terme général $x_n = n$, on a

$$f_n(x_n) = n^2 \sin \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Variante : avec $x_n = n^2$, on a

$$f_n(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^4 \cdot \frac{1}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

✎ Pour trouver un contre-exemple, il suffit de choisir une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ sans être un $o(n)$ — c'est-à-dire une suite qui tend raisonnablement vite vers $+\infty$.

Solution 17

08kh-01

1. Lorsque x parcourt $[0, 1]$, l'expression polynomiale

$$x + \frac{x(1-x)}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x - \frac{x^2}{n}$$

est clairement positive. Il s'agit d'un polynôme de degré 2 qui atteint son maximum en

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2} \geq 1.$$

Restreinte à $[0, 1]$, cette expression est donc croissante. Elle est égale à 1 pour $x = 1$, donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad x + \frac{x(1-x)}{n} \in [0, 1].$$

L'application f_n est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ (comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

✎ Il serait dommage d'étudier les variations en calculant la dérivée, sans observer qu'il s'agit d'un polynôme de degré 2 (et qu'on sait donc précisément où cette expression est maximale).

2. Il est clair que

$$\forall x \geq 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x + \frac{x(1-x)}{n} = x$$

et donc que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f .

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, sa dérivée est bornée sur le segment $[0, 1]$, donc f est lipschitzienne : il existe $K > 0$ tel que

$$\forall 0 \leq x, y \leq 1, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

En particulier,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{K \cdot x(1-x)}{n} \leq \frac{K}{4n}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [0, 1]$ et de limite nulle, donc la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

3. Si f est continue sur $[0, 1]$, elle n'est a priori pas lipschitzienne, mais elle est quand même uniformément continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall 0 \leq x, y \leq 1, \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Comme $1/4n$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ , il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, 1], \quad \left| \frac{x(1-x)}{n} \right| \leq \alpha$$

et donc tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Le rang n_0 est indépendant de $x \in [0, 1]$, donc on a bien prouvé que, dans ce cas aussi, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ convergeait uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

Il est très fréquent que, comme c'est ici le cas, une propriété établie facilement pour une fonction lipschitzienne soit en fait une conséquence de la continuité uniforme.

Solution 18

08kh-02

1. L'image de $[-1, 1]$ par f_0 est le segment $[-2, 2]$. La fonction

$$\varphi = [u \mapsto \sqrt{2+u}]$$

est continue et strictement croissante sur $[-2, 2]$. Comme $\varphi(-2) = 0$ et que $\varphi(2) = 2$, le segment $[-2, 2]$ est stable par φ , donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Pour tout $t \in [-1, 1]$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie par la donnée de $f_0(t) \in [-2, 2]$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(t) = \varphi(f_n(t)).$$

Une étude très sommaire de la fonction φ nous montre que

$$\forall u \in [-2, 2], \quad u \leq \varphi(u) \leq 2$$

et donc que, pour tout $t \in [-1, 1]$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1, 1]$.

L'unique point fixe de φ est égal à 2 et comme φ est continue sur $[-1, 1]$, on en déduit que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 2$$

c'est-à-dire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $f = [u \mapsto 2]$.

La fonction f_0 est clairement continue et croissante sur $[-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n+1} = \varphi \circ f_n$$

et par composition, chaque fonction f_n est continue et croissante sur $[-1, 1]$.

On a démontré que, pour tout $t \in [-1, 1]$, la suite de terme général $f_n(t)$ était croissante et convergait vers $f(t) = 2$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1, 1], \quad |f_n(t) - f(t)| = 2 - f_n(t).$$

Et comme chaque fonction f_n est croissante sur $[-1, 1]$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1, 1], \quad |f_n(t) - f(t)| \leq 2 - f_n(-1).$$

Le majorant trouvé est indépendant de $t \in [-1, 1]$. Par convergence simple sur $[-1, 1]$, ce majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On a ainsi démontré que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur $[-1, 1]$ vers $f = [t \mapsto 2]$.

Pour la culture :

Le premier Théorème de Dini nous dit que : si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions continues sur un segment qui converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme.

Le second Théorème de Dini nous dit que : si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions croissantes sur un segment qui converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme.

2. Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc l'intégrale I_n est bien définie.

Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[-1, 1]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| I_n - \int_{-1}^1 2 \, dt \right| \leq 2 \times \|f_n - f\|_\infty$$

donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 4.

3. La fonction f_0 s'annule en 0, donc la fonction $1/f_0$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$. L'intégrale I_0 n'a donc pas de sens.

• La fonction f_1 s'annule en -1 , la fonction $1/f_1$ est continue sur $] -1, 1]$ et lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$f_1(-1+h) = \frac{1}{2+2(-1+h)} = \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

donc f_1 est bien intégrable au voisinage de -1 . Par conséquent, l'intégrale I_1 est bien définie.

• Pour tout $n \geq 2$, la fonction f_n est croissante sur $[-1, 1]$, donc

$$\forall t \in [-1, 1], \quad f_n(t) \geq f_n(-1).$$

Comme la suite de terme général $f_n(-1)$ est croissante,

$$\forall n \geq 2, \quad f_n(-1) \geq f_2(-1) = \sqrt{2+f_1(-1)} = \sqrt{2} > 0.$$

Par conséquent, la fonction f_n est continue et strictement positive sur $[-1, 1]$. La fonction $1/f_n$ est donc continue sur le segment $[-1, 1]$ et l'intégrale J_n est donc bien définie.

• Il est clair que la suite $(\frac{1}{f_n})_{n \geq 2}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers la fonction constante $[t \mapsto 1/2]$ et d'après ce qui précède,

$$\forall n \geq 2, \forall t \in [-1, 1], \quad 0 \leq \frac{1}{f_n(t)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc la convergence est dominée. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_{-1}^1 \frac{dt}{2} = 1.$$

• Pour les mêmes raisons de monotonie que précédemment,

$$\forall n \geq 2, \forall t \in [-1, 1], \quad 0 \leq \frac{1}{f_n(t)} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{f_n(-1)} - \frac{1}{2}.$$

Comme le majorant est indépendant de t et qu'il tend vers 0, on en déduit que la suite $(1/f_n)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $1/f$.

Variante :

$$\forall n \geq 2, \forall t \in [-1, 1], \quad \left| \frac{1}{f_n(t)} - \frac{1}{f(t)} \right| \leq \frac{\|f_n - f\|_\infty}{f_n(t)f(t)} \leq \frac{\|f_n - f\|_\infty}{2f_2(-1)}.$$

Solution 19

08kh-03

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{(-1)^n \cos^3(3^n x)}{3^n} \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

donc la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Comme le terme général est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la somme est elle aussi continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \cos^2 \theta \cdot \cos \theta = (1 + \cos 2\theta) \cdot \cos \theta = \frac{\cos \theta}{2} + \frac{\cos 3\theta + \cos \theta}{4} \\ &= \frac{\cos 3\theta}{4} + \frac{3 \cos \theta}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\cos^3(3^n x)}{3^n} = \frac{\cos 3^{n+1} x}{4 \cdot 3^n} + \frac{\cos 3^n x}{4 \cdot 3^{n-1}}$$

et par télescopage,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos^3 3^n x}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n \cos 3^{n+1} x}{4 \cdot 3^n} + \frac{3}{4} \cos x = \frac{3 \cos x}{4}.$$

• Les séries desquelles on sait calculer la somme sont :

- les séries télescopiques
- les séries géométriques
- les séries entières de référence et celles qui s'en déduisent.

La série étudiée ici n'est ni géométrique, ni une série entière...

Solution 20**08kh-04**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $0 < r < 1$, la suite de terme général $r^k x$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ et il existe donc un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_0, \quad |r^k x| \leq \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq k_0$, on peut donc écrire

$$f_n(x) = f_{k_0-1}(x) \cdot \prod_{k=k_0}^n (1 - r^k x).$$

Le facteur f_{k_0-1} est continu (en tant que fonction polynomiale de x) et nous allons étudier son cofacteur, qui est un produit de réels strictement positifs :

$$\prod_{k=k_0}^n (1 - r^k x) = \exp\left(\sum_{k=k_0}^n \ln(1 - r^k x)\right).$$

Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$\ln(1 - r^k x) \sim -r^k x$$

et comme la série géométrique $\sum r^k$ est absolument convergente, on en déduit que la série $\sum \ln(1 - r^k x)$ est absolument convergente.

Par composition de limites (puisque la fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$), la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$.

2. On reprend la méthode précédente en se plaçant sur un segment $[-A, A]$.

Il existe un rang $k_A \in \mathbb{N}$ assez grand pour que

$$\forall k \geq k_0, \quad 0 \leq r^k A \leq \frac{1}{2}.$$

Par monotonie de $\ln$, on en déduit que

$$\forall k \geq k_0, \forall x \in [-A, A], \quad |\ln(1 - r^k x)| \leq |\ln(1 - r^k A)|.$$

La série de fonctions $\sum_{k \geq k_0} \ln(1 - r^k x)$ converge donc normalement sur $[-A, A]$. Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $[-A, A]$, on en déduit que la somme est continue sur $[-A, A]$.

La fonction $\exp$ étant continue, on en déduit que la fonction

$$\left[x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=k_0}^n (1 - r^k x) \right]$$

est continue sur $[-A, A]$ (composée de fonctions continues) et comme f_{k_0-1} est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la limite

$$F = \left[x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - r^k x) \right]$$

est continue sur $[-A, A]$ (produit de fonctions continues).

• Comme la fonction F est continue sur chaque segment $[-A, A]$, elle est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

La même méthode permet de prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution 21**08kh-05**

D'après l'inégalité des accroissements finis, chaque fonction f_n est M -lipschitzienne :

$$\forall a \leq x, y \leq b, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq M \cdot |x - y|.$$

La constante de Lipschitz étant indépendante de n , on peut passer à la limite simple dans l'encadrement précédent :

$$\forall a \leq x, y \leq b, \quad |f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$$

ce qui prouve que la limite f est M -lipschitzienne.

► Soit $\varepsilon > 0$. Posons alors $\alpha = \varepsilon/3M$ de telle sorte que

$$\forall a \leq x, y \leq b, \forall n \in \mathbb{N}, |x - y| \leq \alpha \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

On a également

$$\forall a \leq x, y \leq b, |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (4)$$

(puisque f , comme les f_n , est M -lipschitzienne).

▮ Cette propriété découle du fait que les fonctions f_n sont lipschitziennes et admettent une constante de Lipschitz commune. On aurait le même résultat en supposant ces fonctions "uniformément continues" (elles sont toutes uniformément continues en tant que fonctions continues sur le segment $[a, b]$, on demande en plus que le réel $\alpha > 0$ associé à $\varepsilon > 0$ soit indépendant de l'indice n).

Le nom exact de cette propriété est l'équicontinuité uniforme.

On considère alors une subdivision du segment $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_N = b$$

de pas inférieur à α :

$$\forall 0 \leq k < N, 0 < x_{k+1} - x_k \leq \alpha.$$

► Pour tout $0 \leq k \leq N$, la suite de terme général $f_n(x_k)$ converge vers $f(x_k)$ (par convergence simple). Il existe donc un rang $n_0 = n_0(k)$ tel que

$$\forall n \geq n_0, |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme il n'y a qu'un nombre FINI de points dans la subdivision, il existe un rang

$$n_0 = \max_{0 \leq k \leq N} n_0(k) \in \mathbb{N}$$

tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall 0 \leq k \leq N, |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

▮ Ce qui précède signifie que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'ensemble fini $\{x_k\}_{0 \leq k \leq N}$ vers la fonction f .

► Considérons maintenant $x \in [a, b]$.

• Si x est l'un des x_k , la question est réglée par (5)!

$$\forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

• Si tel n'est pas le cas, alors il existe un, et un seul, indice $0 \leq k < N$ tel que $x_k < x < x_{k+1}$. Par astuce taupinale et inégalité triangulaire, on a alors

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)|.$$

Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|f_n(x) - f_n(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

par (3); de même,

$$|f(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

par (4) et enfin

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

par (5), donc

$$\forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

• On a ainsi démontré que

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

avec un rang n_0 indépendant du réel $x \in [a, b]$. Autrement dit : la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .

Solution 22

rms128-700

1. Si $x > 0$, alors e^{-nx} tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et $u_n(x) \sim (e^{-x})^n$. Comme $0 < e^{-x} < 1$, la série géométrique $\sum (e^{-x})^n$ est absolument convergente et la série $\sum u_n(x)$ aussi.

Si $x \leq 0$, alors $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.

Le réel $f(x)$ est donc défini si, et seulement si, $x > 0$.

☞ *Telle qu'elle est posée, la question appelle une condition nécessaire et suffisante de convergence.*

2. Il est clair que chaque fonction u_n est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n est strictement décroissante.

☞ *La fonction u_0 est constante!*

☛ Si $0 < x < y$, alors

$$f(x) - f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[u_n(x) - u_n(y)]}_{<0} < 0.$$

☞ *Il faut avoir justifié la convergence des deux séries pour utiliser la linéarité de la somme.*

Donc la fonction f est strictement décroissante sur I .

☛ Pour $a > 0$, la décroissance de chaque fonction u_n nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, +\infty[, \quad 0 \leq u_n(x) \leq u_n(a).$$

Et comme $a > 0$, la série (de terme général positif) $\sum u_n(a)$ est convergente. Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série absolument convergente, on a démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Comme chaque fonction u_n est continue, on en déduit que la somme f est continue sur chaque intervalle $[a, +\infty[$.

La fonction f est donc continue sur l'union de ces intervalles, c'est-à-dire sur $I =]0, +\infty[$.

☞ *Si la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $]0, +\infty[$, alors on pourrait appliquer le Théorème d'interversion des limites, qui affirme en particulier que la série de terme général*

$$\ell_n = \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = \ln 2$$

est convergente. Comme la série $\sum \ell_n$ diverge grossièrement, la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $]0, +\infty[$.

3. La fonction f est décroissante et positive (les fonctions u_n sont toutes positives), donc elle tend vers une limite finie (positive) au voisinage de $+\infty$.

☛ Chaque fonction u_n tend vers une limite finie ℓ_n au voisinage de $+\infty$ (limite nulle pour tout $n \geq 1$; égale à $\ln 2$ pour $n = 0$). La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[212, +\infty[$ (qui est un voisinage de $+\infty$), donc la somme f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ (merci, on savait déjà); la série des limites $\sum \ell_n$ converge (merci, on avait remarqué) et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = \ln 2.$$

☞ *Pour les mêmes raisons, la fonction f tend vers une limite, finie ou infinie, au voisinage de 0. Comme les fonctions u_n sont positives,*

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad f(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(x)$$

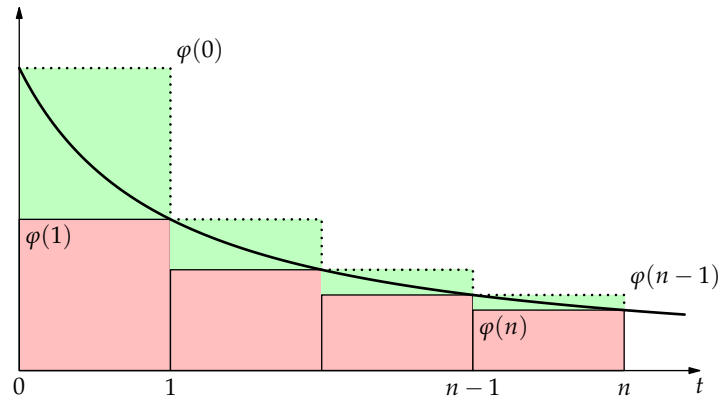
et comme l'existence des limites lorsque x tend vers 0 est assurée,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(0) = (N+1) \ln 2.$$

On en déduit que f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

4. Soit $x > 0$. La fonction $\varphi = [t \mapsto \ln(1 + e^{-tx})]$ est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. En comparant sommes et intégrale, on obtient

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n u_k(x) \leq \int_0^n \varphi(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x). \quad (\dagger)$$



La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$ et équivalente à e^{-xt} lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $x > 0$, la fonction φ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et on peut donc passer à la limite dans (†).

$$f(x) - u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \leq \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \leq f(x) \quad (\ddagger)$$

• On effectue d'abord le changement de variable affine $s = xt$.

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-s}) ds.$$

• Ce changement de variable est possible car $x > 0$.

• On effectue ensuite le changement de variable usuel $u = e^{-s}$.

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-s}) ds = \int_0^1 \frac{\ln(1 + u)}{u} du.$$

• L'application $[s \mapsto e^{-s}]$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $I = [0, +\infty[$ sur l'intervalle $J =]0, 1]$ et on a déjà établi l'intégrabilité de $[s \mapsto \ln(1 + e^{-s})]$ sur I .

• Le développement en série entière de $\ln(1 + u)$ nous donne

$$\forall 0 < u < 1, \quad \frac{\ln(1 + u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n+1}.$$

On reconnaît ici une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1.

Les fonctions $a_n = [u \mapsto (-u)^n / (n+1)]$ sont continues sur le segment $[0, 1]$ (et donc intégrables); la série de fonctions $\sum a_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et sa somme est continue (en tant que somme d'une série entière sur un intervalle contenu dans l'intervalle ouvert de convergence); enfin, la série de terme général

$$\int_0^1 |a_n(u)| du = \int_0^1 \frac{u^n}{n+1} du = \frac{1}{(n+1)^2}$$

est convergente.

D'après le Théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + u)}{u} du = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(u) du = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n(u) du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

et finalement

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{12x}.$$

• La borne supérieure de l'intervalle d'intégration n'appartient pas à l'intervalle ouvert de convergence de la série entière ($1 \notin]-1, 1[$), donc on ne peut ici se contenter d'indiquer qu'on intègre une série entière pour justifier l'intégration terme à terme.

Il est prudent à ce propos de parler de primitivation terme à terme pour les séries entières (on intègre terme à terme sur un segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence).

Solution 23

rms130-578

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = e^{-\sqrt{n}x}.$$

✚ Pour tout $x > 0$, on a

$$\forall \alpha > 0, \quad u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

puisque $n^\alpha u_n(x) = \exp(-\sqrt{n}x + \alpha \ln n)$. Par comparaison avec les séries de Riemann, la série $\sum u_n(x)$ est donc absolument convergente.

Pour tout $x \leq 0$, la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente.

La somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$$

est donc définie si, et seulement si, $x > 0$.

✚ Il est important de bien comprendre le sens des croissances comparées ici : on peut facilement comparer $\sum u_n(x)$ à une série de Riemann (avec un exposant α arbitrairement grand) mais il est impossible de conclure en comparant cette série à une série géométrique : comme

$$\forall 0 < q < 1, \quad \frac{u_n(x)}{q^n} = \exp(\underbrace{-n \ln q - \sqrt{n}x}_{\rightarrow +\infty})$$

on a seulement $q^n = o(u_n(x))$...

✚ Pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n est décroissante et positive :

$$\forall 0 < x < y, \quad 0 < u_n(y) < u_n(x). \quad (*)$$

Par conséquent,

$$\forall a > 0, \forall x \in [a, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n(x) \leq u_n(a).$$

Comme le majorant est indépendant de x et que la série $\sum u_n(a)$ est convergente (puisque $a > 0$), on vient de prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont continues sur $]0, +\infty[$ on en déduit que la somme S est continue sur $]0, +\infty[$.

✚ Ici, il n'est pas nécessaire de recourir au théorème de convergence normale pour justifier que la somme S est continue.

✚ En effet, pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall 0 < a \leq x, \quad |u'_n(x)| = \sqrt{n} \cdot e^{-\sqrt{n}x} \leq \sqrt{n} \cdot e^{-\sqrt{n} \cdot a}.$$

On peut alors déduire de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall 0 < a \leq x, y, \quad |u_n(x) - u_n(y)| \leq \sqrt{n} \cdot e^{-\sqrt{n} \cdot a} |x - y|.$$

On vérifie sans peine (comparaison avec une série de Riemann) que la série

$$\sum \sqrt{n} \cdot e^{-\sqrt{n} \cdot a}$$

est convergente. En sommant les encadrements précédents, on montre que

$$\forall x, y \in [a, +\infty[, \quad |S(x) - S(y)| \leq \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \cdot e^{-\sqrt{n} \cdot a} \right] \cdot |x - y|$$

ce qui signifie que S est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

✚ On peut remarquer que la constante de Lipschitz trouvée

$$K_a = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \cdot e^{-\sqrt{n} \cdot a}$$

est une fonction croissante de a et que $K_0 = +\infty$ (osons cet abus de notation !), ce qui nous indique que S n'est sans doute pas lipschitzienne sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ (soit à cause d'une asymptote verticale, soit à cause d'une tangente verticale en $x = 0$, il est trop tôt pour décider).

2. En sommant les encadrements $(*)$, on obtient

$$\forall 0 < x < y, \quad 0 < S(y) < S(x).$$

La somme S est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Il serait aussi possible d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme pour démontrer que S est dérivable et constater que sa dérivée est négative sur $]0, +\infty[$. Mais ce serait bien plus long à justifier !

La somme S tend donc vers une limite *finie* au voisinage de $+\infty$ et vers une limite, *finie ou infinie*, au voisinage droit de 0.

La série de fonctions converge normalement sur l'intervalle $[1, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$. On peut donc passer à la limite terme à terme, ce qui montre que $S(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. (On calculera un équivalent plus bas.)

En revanche, il est impossible de passer à la limite terme à terme au voisinage de 0 puisque la série des limites $\sum u_n(0^+)$ est divergente.

Jusqu'ici, on a exploité la monotonie des fonctions

$$[x \mapsto u_n(x)].$$

Nous allons maintenant exploiter la monotonie des suites

$$[n \mapsto u_n(x)]$$

pour comparer la somme $S(x)$ à des intégrales.

Fixons $x > 0$ et considérons la fonction

$$f = [t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}]$$

qui est évidemment continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. Cette fonction f est aussi intégrable sur $[0, +\infty[$ (puisque $f(t) = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$).

L'application

$$\varphi = [t \mapsto x\sqrt{t}]$$

est évidemment une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $I =]0, +\infty[$ sur I . On remarque alors (en factorisant par $\varphi'(t)$) que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \frac{2}{x^2} \cdot x\sqrt{t} \cdot e^{-x\sqrt{t}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{t}} = g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

où

$$\forall u \in I, \quad g(u) = \frac{2}{x^2} \cdot u \cdot e^{-u}.$$

D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur I (ce qu'on savait déjà !) et

$$\begin{aligned} \forall a \geq 0, \quad \int_a^{+\infty} f(t) dt &= \int_{\sqrt{a}x}^{+\infty} g(u) du \\ &= \frac{2}{x^2} \cdot (1 + \sqrt{a}x) \cdot \exp(-\sqrt{a}x). \end{aligned} \quad (\text{IPP})$$

On fait une *figure* pour constater que

$$-1 + \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

c'est-à-dire (avec $a = 0$)

$$\forall x > 0, \quad \frac{2}{x^2} - 1 \leq S(x) \leq \frac{2}{x^2}.$$

Cet encadrement nous dit que

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

et en particulier que $S(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

• Comme on sait que la somme S est positive sur $[0, +\infty[$, cet encadrement nous dit aussi que

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et confirme en particulier que $S(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

▮ Une étude plus fine doit être menée au voisinage de $+\infty$. Ce qui suit est assez représentatif de la situation générale : dans une somme d'exponentielles, c'est le plus gros terme qui donne l'équivalent.

• Pour tout $x > 0$, on a

$$S(x) = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

et comme précédemment (avec $a = 1$ cette fois)

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{2(x+1)}{x^2} \cdot e^{-x}.$$

Cet encadrement nous donne

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x} \cdot e^{-x} = o(e^{-x})$$

et finalement

$$S(x) = e^{-x} + o(e^{-x}) \sim e^{-x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution 24

rms130-874

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Arctan} \frac{x}{n}.$$

• Soit $A > 0$.

Chaque fonction u_n est croissante et impaire, donc

$$\forall x \in [-A, A], \quad |u_n(x)| \leq u_n(A)$$

et, lorsque n tend vers $+\infty$, le réel A étant fixé,

$$u_n(A) \sim \frac{A}{n^2}.$$

On a ainsi prouvé que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur chaque segment $[-A, A]$.

Comme les fonctions u_n sont évidemment continues sur $[-A, A]$, on en déduit que la somme f est continue sur

$$\mathbb{R} = \bigcup_{A>0} [-A, A].$$

2. Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + (x/n)^2}.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq u'_n(x) \leq \frac{1}{n^2},$$

ce qui prouve que la série dérivée $\sum u'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

• Comme on a déjà justifié que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, finie ou infinie, au voisinage de $+\infty$.

• On a vu plus que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur $\mathbb{R}$ et donc, en particulier, qu'elle convergerait uniformément au voisinage de $+\infty$.

Chaque fonction u'_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (Théorème de la double limite).

✎ Quant à la limite à l'infini de la fonction f , c'est plus compliqué à rédiger, mais c'est très classique. Après avoir jeté ses idées au brouillon, on rédige dans un ordre cohérent et ça donne à peu près ça.

✎ Soit $S > 0$. Comme la série harmonique est une série divergente de terme général positif, il existe un rang N_0 tel que

$$\frac{\pi}{4} \left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n} \right) \geq S.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N_0} u_n(x) = \frac{\pi}{2} \left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n} \right) > \frac{\pi}{4} \left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n} \right),$$

il existe $A_0 > 0$ tel que

$$\forall x \geq A_0, \quad \sum_{n=1}^{N_0} u_n(x) \geq \frac{\pi}{4} \left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n} \right)$$

et comme $\sum u_n(x)$ est une série de terme général positif, on en déduit enfin que

$$\forall x \geq A_0, \quad f(x) \geq \sum_{n=1}^{N_0} u_n(x).$$

On a ainsi établi que

$$\forall S > 0, \exists A_0 > 0, \forall x \geq A_0, \quad f(x) \geq S$$

c'est-à-dire : la fonction f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

✎ Autrement dit, au voisinage de l'infini, le comportement de f ressemble à celui de la fonction $\ln$.

Solution 25

rms130-876

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}.$$

✎ Il est clair que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant pour tout $x \neq 0$. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ est alors convergente.

Pour $x = 0$, le terme général $u_n(0) = 1$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n(0)$ diverge grossièrement.

Le domaine de définition de f est donc $D = \mathbb{R}^*$. Comme la fonction f est évidemment paire, on va l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $a > 0$, on a

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad |u_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2}.$$

On a un majorant indépendant de x , qui est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues, on en déduit que la somme f est continue sur

$$\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

✎ Pour cette question, le Critère spécial des séries alternées n'apporte rien.

3. Comme on intègre sur un intervalle non borné, la convergence normale et la convergence uniforme ne sont d'aucun secours.

✎ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction positive u_n est évidemment intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} \cdot \frac{dy}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

(changement de variable affine $y = nx$) et par conséquent la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx$$

est divergente : on ne peut donc pas appliquer le théorème lebesguien d'intégration terme à terme.

✎ La méthode usuelle en pareil cas consiste à appliquer le Théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série de fonctions. Mais le Critère spécial des séries alternées nous dit comment majorer le reste de la série, pas comment majorer les sommes partielles...

✎ D'après la première question, le reste d'ordre N , défini par

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$$

est une fonction continue sur $]0, +\infty[$. D'après le Critère spécial des séries alternées,

$$\forall x > 0, \quad |R_N(x)| \leq \frac{1}{1 + (N+1)^2 x^2} \quad (*)$$

donc R_N est intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$f = -u_1 + \dots + (-1)^N u_N + R_N$$

est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ et, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \sum_{n=1}^N (-1)^n \int_0^{+\infty} u_n(x) dx + \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \pi}{2n} + \int_0^{+\infty} R_N(x) dx. \end{aligned}$$

L'encadrement (*) et la positivité de l'intégrale nous donnent

$$\forall N \geq 1, \quad \left| \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (N+1)^2 x^2} = \frac{\pi}{2(N+1)}.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{2n} = \frac{-\pi \ln 2}{2}.$$

✎ D'après le Critère spécial des séries alternées, la fonction f est négative (la somme est du signe du premier terme), c'est pourquoi l'intégrale de f est négative.

✎ Le calcul de la somme est un classique, qui se montre très facilement : tout d'abord

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \end{aligned} \quad (\text{somme géométrique})$$

et ensuite

$$\forall 0 \leq t < 1, \quad \left| \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \right| \leq t^{N+1}$$

donc, par positivité de l'intégrale,

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{1}{N+2}.$$

Solution 26

rms130-1154

1. On pose $I =]-1, +\infty[$.
Pour tout $x > -1$ (fixé),

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$$

et comme la série de Riemann $\sum 1/n^{3/2}$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison pour les séries de terme général positif que la série $\sum f_n(x)$ est (absolument) convergente et donc que la somme $S(x)$ est bien définie.

2. Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .
Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$,

$$f'_n(x) = \frac{-(3n+3x+1)}{2(n+x)^{3/2}(n+x+1)^2}$$

et donc

$$\forall n \geq 1, \forall x \in I, \quad |f'_n(x)| \leq \frac{3}{2(n+x)^{3/2}(n+x+1)}.$$

En particulier,

$$\forall \boxed{n \geq 2}, \forall x \in I, \quad |f'_n(x)| \leq \frac{3}{2(n-1)^{3/2}n}$$

ce qui prouve que la série des dérivées $\sum_{n \geq 2} f'_n$ converge normalement sur I .

On a ainsi démontré que $S - f_1$ était de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que

$$\forall x \in I, \quad S'(x) - f'_1(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f'_n(x)$$

et donc que

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

✎ Il me paraît plus simple de séparer f_1 du reste de la série et de produire un argument de convergence normale sur I tout entier que de conserver f_1 avec les autres termes et de démontrer la convergence normale sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ pour tout $a > -1$.

Bien entendu, pour penser à traiter f_1 séparément, il faut avoir remarqué pourquoi la convergence n'était pas normale au voisinage de -1 (c'est le genre de questions qu'il est toujours bon de se poser).

3. On reprend la même démarche en traitant f_1 à part!

✎ Pour tout $x > -1$,

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_n(-1) = \frac{1}{\sqrt{n-1} \cdot n}.$$

En sommant ces inégalités (pour $n \geq 2$ seulement, pas pour $n \geq 1$!), on obtient

$$\forall x > -1, \quad 0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1} \cdot n}.$$

Cet encadrement prouve que $S(x) - f_1(x)$ est bornée sur $] -1, +\infty[$ et en particulier que

$$S(x) \underset{x \rightarrow -1}{=} f_1(x) + \mathcal{O}(1).$$

✎ On prouve ainsi que la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge normalement sur I et on redémontre à cette occasion que la somme S est continue sur I en tant que somme de f_1 , continue sur I , et de la somme de la série $\sum_{n \geq 2} f_n$, qui est pour sa part continue sur $] -1, +\infty[$.

✎ Comme la fonction f_1 tend vers $+\infty$ au voisinage de -1 , on en déduit que

$$S(x) \underset{x \rightarrow -1}{=} f_1(x) + \mathcal{O}(1) = f_1(x) + o[f_1(x)]$$

donc que

$$S(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}(x+2)}$$

et enfin que

$$S(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

• Comme la fonction S est continue sur $] -1, 0]$, cet équivalent prouve que S est intégrable sur $] -1, 0]$ (comparaison à $1/\sqrt{u}$ au voisinage de $u = 0^+$).

4. On a prouvé que la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ convergeait normalement sur I et donc en particulier au voisinage de $+\infty$.

Comme f_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ pour tout $n \geq 2$, on en déduit que

$$(S - f_1)(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 0.$$

Comme f_1 tend également vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit finalement que

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

5. Fixons $x \geq 1$ (ce n'est pas une restriction, puisque x tend vers $+\infty$).

La fonction φ définie par

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t+x}(t+x+1)}$$

est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$.

Pour tout entier $N \geq 1$, une comparaison somme-intégrale (avec figure correctement légendée!) donne

$$\int_1^N \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N f_n(x) \leq \int_0^N \varphi(t) dt.$$

Or, quels que soient $0 \leq a \leq N$,

$$\int_a^N \varphi(t) dt = \int_{x+a}^{N+x} \frac{du}{\sqrt{u}(u+1)}$$

(changement de variable affine $u = t + x$) et donc

$$\int_a^N \varphi(t) dt = 2 \int_{\sqrt{x+a}}^{\sqrt{N+x}} \frac{dv}{v^2+1} = \left[2 \operatorname{Arctan} v \right]_{\sqrt{x+a}}^{\sqrt{N+x}}$$

(changement de variable $v = \sqrt{u}$).

On en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N \varphi(t) dt &= 2 \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \sqrt{x+a} \right] \\ &= 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \end{aligned}$$

et donc que

$$2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq S(x) \leq 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

pour tout $x \geq 1$.

Finalement,

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{2}{\sqrt{x}}$$

ce qui redémontre que S tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et prouve que S n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

🔗 Cette dernière remarque sert à justifier le calcul de l'équivalent — car à quoi peut bien servir un équivalent au voisinage de $+\infty$ à moins qu'on n'étudie l'intégrabilité?

Solution 27

rms130-1167

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1 + nx}.$$

• Il est clair que, pour tout $x > 0$, la suite de terme général

$$|u_n(x)| = \frac{1}{1 + nx}$$

tend vers 0 en décroissant. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ est donc convergente.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme S est bien définie sur cet intervalle.

• La série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $x = 0$.

• Puisque les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont satisfaites, on sait comment dominer le reste d'ordre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{1 + (n+1)x}.$$

• Pour $a > 0$, on en déduit que

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{1 + (n+1)a}.$$

On a trouvé un **majorant indépendant de x et qui tend vers 0** lorsque n tend vers $+\infty$, cela signifie que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ (et donc en particulier sur $[a, +\infty[$), on en déduit que la somme S est continue sur $[a, +\infty[$.

• Cela étant vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que la conclusion est vraie sur $]0, +\infty[$: la somme S est continue sur $]0, +\infty[$.

• La domination du reste donnée par le Critère spécial des séries alternées ne permet pas de conclure à la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. En effet, le majorant trouvé sur cet intervalle :

$$\sup_{x>0} \frac{1}{1 + (n+1)x} = 1$$

ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$!

D'autre part, chaque fonction u_n tend vers une limite finie (égale à ± 1) au voisinage de 0 et le Théorème d'interversion des limites (ou Théorème de la double limite) nous dit que, si la série $\sum u_n$ convergerait uniformément sur un voisinage de 0, alors en particulier la série numérique

$$\sum \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = \sum (-1)^n$$

serait convergente ! La question est réglée : la série $\sum u_n$ ne converge uniformément sur aucun voisinage de 0.

• On a établi la continuité de la somme par un argument de convergence uniforme. Il est important de noter qu'on ne pouvait pas invoquer la convergence normale :

$$\forall a > 0, \quad \sup_{x \in [a, +\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{na}$$

et la série $\sum 1/na$ est divergente.

2. On a démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergerait uniformément sur l'intervalle $[1, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$.

Pour tout $n \geq 1$, la fonction u_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et d'autre part la fonction u_0 tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

La convergence uniforme au voisinage de $+\infty$ nous autorise à passer à la limite terme à terme : la somme S tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et cette limite est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 1.$$

▮ Comme cette limite est un réel non nul, on peut aussi présenter le résultat sous la forme d'un équivalent :

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \quad u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}.$$

► On sait que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

▮ Il nous reste à démontrer que la série des dérivées $\sum u'_n$ converge uniformément sur chaque l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ afin de pouvoir conclure.

► L'inégalité

$$|u'_{n+1}(x)| \leq |u'_n(x)|$$

équivalut (après quelques simplifications...) à

$$n(n+1)x^2 \geq 1.$$

Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $x^2 \geq a^2$ et par conséquent, la suite extraite

$$(|u'_n(x)|)_{n \geq 1/a}$$

tend vers 0 en décroissant.

Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont donc satisfaites pour tout $x \geq a$ à partir du rang $n \geq 1/a$. En particulier,

$$\forall x \geq a, \quad \forall n \geq \frac{1}{a}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u'_k(x) \right| \leq \frac{n+1}{(1+[n+1]a)^2}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est un majorant en $\mathcal{O}(1/n)$), donc la série des dérivées $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

► On en déduit que la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et que

$$\forall x \geq a, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

Comme cette propriété est vraie pour tout $a > 0$, on en déduit qu'en fait la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x > 0, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

Solution 28

rms130-1246

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

• Pour $x < 0$, le terme général $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (divergence grossière de la série).
Pour $x \geq 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n(x) \leq u_n(0)$$

et comme

$$u_n(0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et que la série $\sum 1/n^2$ est convergente, la série $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}_+$.

La somme f de la série de fonctions est donc définie sur $[0, +\infty[$.

2. Chaque fonction u_n est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+$. On a vu à la question précédente que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur $\mathbb{R}_+$, donc la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Chaque fonction u_n est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]0, +\infty[$ et

$$\forall k \geq 1, \quad \forall x > 0, \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-n)^k}{n^2 + 1} e^{-nx}.$$

Par conséquent, pour tout $a > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, +\infty[, \quad |u_n^{(k)}(x)| \leq n^{k-2} e^{-na}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et comme $a > 0$,

$$\frac{(n+1)^{k-2} e^{-(n+1)a}}{n^{k-2} e^{-na}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-a} < 1$$

donc ce majorant est le terme général d'une série convergente (règle de D'Alembert).

On vient donc de démontrer que, pour tout $k \geq 1$, la série des dérivées $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Par conséquent, la somme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et comme cela vaut pour tout $a > 0$, on en déduit que la somme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

On sait de plus que

$$\forall k \geq 1, \forall x > 0, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^k}{n^2+1} e^{-nx}.$$

(Le terme en $n=0$ est constant, donc ses dérivées sont nulles).

Et en 0? On sait que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $N \geq 1$,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} \leq \sum_{n=1}^N \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}.$$

Comme la série

$$\sum \frac{-n}{n^2+1}$$

est divergente, pour tout $A > 0$, on peut choisir $N = N(A) \in \mathbb{N}$ assez grand pour que

$$\sum_{n=1}^N \frac{-n}{n^2+1} \leq -A - 1.$$

Or la somme

$$\sum_{n=1}^N \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}$$

est une expression continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de x (puisque'il n'y a qu'un nombre FINI de termes et que chaque terme est continu). En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} = \sum_{n=1}^N \frac{-n}{n^2+1} < -A$$

donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall 0 < x \leq \alpha, \quad \sum_{n=1}^N \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} \leq -A.$$

et par conséquent tel que

$$\forall 0 < x \leq \alpha, \quad f'(x) \leq -A.$$

Cela nous montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty.$$

Comme f est continue en 0, on peut en déduire que le graphe de f admet une **tangente verticale** au point d'abscisse $x = 0$.

4. Puisque la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur un voisinage de $+\infty$ et que chaque fonction u_n tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, le Théorème de la double limite nous assure que la somme f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 1$$

puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = 1 \quad \text{et que} \quad \forall n \geq 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0.$$

► Pour trouver un équivalent de

$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, il suffit de détailler la somme :

$$f(x) = 1 + u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x).$$

Il est clair que

$$\forall n \geq 2, \forall x \geq 0, \quad 0 \leq u_n(x) \leq \frac{e^{-2x}}{n^2 + 1}$$

et donc que

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} \leq e^{-2x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Cet encadrement nous dit en particulier que

$$f(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2x})$$

et donc que

$$f(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{2} + o(e^{-x}) \sim \frac{e^{-x}}{2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

5. La fonction f est positive (somme d'une série de fonctions positives) et décroissante (somme d'une série de fonctions décroissantes, ce qui est confirmé par le fait que la dérivée est la somme d'une série de fonctions négatives).

De plus, la fonction f est convexe sur $]0, +\infty[$, puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée seconde est la somme d'une série de fonctions positives.

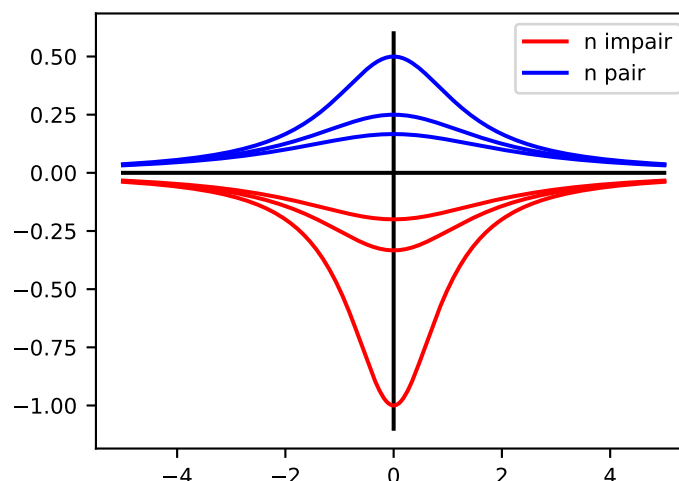
Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, elle est donc en fait convexe sur $[0, +\infty[$ tout entier (par densité).

On a toutes les informations nécessaires pour tracer le graphe de f de manière assez précise...

Solution 29

rms130-1361

1. Pour n pair, la fonction f_n est paire et positive. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et admet une tangente horizontale en $t = 0$ (où elle atteint son maximum, égal à $1/n$).



Pour n impair, la fonction f_n est négative, mais l'allure globale de $-f_n$ est exactement celle de f_{2k} .

2. La série $\sum f_n(x)$ est alternée et $|f_n(x)|$ tend vers 0 en décroissant. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ est convergente.

✎ La somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'application S est évidemment paire.

3. Puisque les hypothèses du Critère spécial des séries alternées sont vérifiées,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq |f_{n+1}(0)| = \frac{1}{n+1}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

✎ Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et comme les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme S est aussi une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

4. D'après l'étude des variations de f_n , la fonction $|f_n|$ atteint son maximum en 0, donc

$$M_n = |f_n(0)| = \frac{1}{n}.$$

La série $\sum M_n$ est divergente (série harmonique).

✎ La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}$ (bien qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$).

Solution 30

rms130-1362

1. La fonction g est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, elle tend vers 0 au voisinage de 0 (forme indéterminée de référence). De plus,

$$\forall t > 0, \quad g'(t) = 1 + \ln t,$$

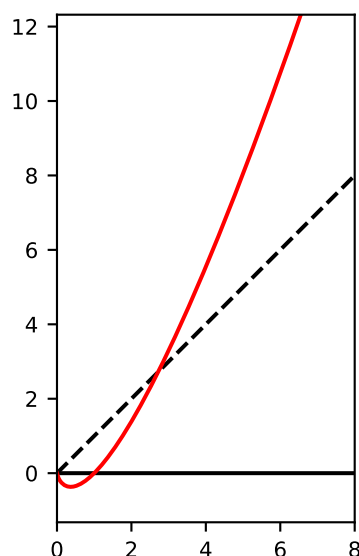
donc g est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. Enfin,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - 0}{t - 0} = -\infty$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty,$$

donc le graphe de g présente une tangente verticale à l'origine et une branche parabolique verticale au voisinage de l'infini.



2. Pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k(x) = \frac{x}{2^k} (-k \ln 2 + \ln x)$$

donc

$$u_k(x) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{(-x \ln 2)}_{C^{te}} \cdot \frac{k}{2^k}.$$

Par croissances comparées (de k^α avec 2^k), on en déduit que

$$u_k(x) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

et donc que la série $\sum u_k(x)$ est absolument convergente.

On peut aussi remarquer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} = 0 < 1$$

et conclure en appliquant la règle de D'Alembert.

3. On remarque que, pour tout $x > 0$ et tout $k \geq 2$,

$$u_k(2x) = g\left(\frac{2x}{2^k}\right) = g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) = u_{k-1}(x).$$

Par conséquent,

$$S(2x) = u_1(2x) + \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(2x) = u_1(2x) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(x) = x \ln x + S(x).$$

Donc

$$\forall x > 0, \quad S(2x) - S(x) = x \ln x.$$

4. Pour $k \geq K_0$ (quel que soit cet entier K_0) et $0 < x \leq A$,

$$0 < \frac{x}{2^k} \leq \frac{A}{2^{K_0}} \quad \text{et} \quad |u_k(x)| = \left| g\left(\frac{x}{2^k}\right) \right|$$

On a étudié la fonction g plus haut : si $2^{-K_0} A \leq e^{-1}$, alors la fonction g est négative et décroissante sur $]0, 2^{-K_0} A]$, donc $-g$ est positive et croissante sur $]0, 2^{-K_0} A]$ et par conséquent

$$\forall k \geq K_0, \forall 0 < x \leq A, \quad |u_k(x)| = -g\left(\frac{x}{2^k}\right) \leq -g\left(\frac{A}{2^k}\right) = |u_k(A)|.$$

Comme la série $\sum u_k(A)$ est absolument convergente, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $]0, A]$ (quel que soit $A > 0$). Les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la somme S est continue sur

$$\bigcup_{A>0}]0, A] = \mathbb{R}_+^*.$$

De plus, toutes les fonctions u_k ont une limite finie au voisinage de 0 (cette limite est nulle), donc la convergence normale au voisinage de 0 prouve que la somme S admet elle aussi une limite finie au voisinage de 0 et que

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$$

(Théorème d'interversion des limites).

5. D'après l'hypothèse faite sur f ,

$$\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = u_{k+1}(x)$$

et donc (somme télescopique pour $0 \leq k < n$)

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{\ell=1}^n u_\ell(x).$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en 0 et par composition de limites,

$$\forall x > 0, \quad f(x) - f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\ell=1}^n u_\ell(x) = S(x)$$

puisque $2^{-n}x$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (le réel x restant fixé).

On vient de démontrer que toute solution f continue sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation fonctionnelle (E) est nécessairement de la forme

$$\forall x > 0, \quad f(x) = f(0) + S(x).$$

Réciproquement, quel que soit le réel C , la fonction f définie par $f(0) = C$ et par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = C + S(x)$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ (puisque S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 0 au voisinage de 0). De plus, cette fonction f vérifie la relation

$$\forall x > 0, \quad f(2x) = C + S(2x) = C + S(x) + x \ln x = f(x) + x \ln x,$$

donc f est bien une solution de (E) qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a ainsi démontré que f est une solution de (E) continue sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = C + S(x).$$

(On rappelle que cette constante C est en fait égale à $f(0)$.)

Solution 31

rms132-599

Une remarque préalable : pour tout $x \neq 0$, le terme général de la série est $\mathcal{O}(1/n^2)$ et pour $x = 0$, le terme général ne tend pas vers 0, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Comme elle est évidemment paire, il suffit de l'étudier sur $]0, +\infty[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n définie par

$$\forall x > 0, \quad u_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, par monotonie de u_n , pour tout $a > 0$,

$$\forall x \geq a, \quad 0 \leq u_n(x) \leq u_n(a)$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. La somme f est donc continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[.$$

2. Essayons de deviner l'équivalent de $f(x)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2}$$

on peut imaginer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

Il reste à vérifier cette conjecture : pour tout $x > 0$,

$$\frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2 x^2} - \frac{1}{1 + n^2 x^2} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2 (1 + n^2 x^2)}$$

et on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) \leq \frac{\zeta(4)}{x^4}.$$

Par conséquent, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{\pi^2}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

▮ Variante : pour tout $x > 0$,

$$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}$$

et cette nouvelle série de fonctions converge normalement sur $]0, +\infty[$ puisque

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \frac{x^2}{1+n^2 x^2} \leq \frac{x^2}{n^2 x^2} = \frac{1}{n^2}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'interversion des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et retrouver ainsi l'équivalent calculé ci-dessus.

3. Lorsque x tend vers 0, le terme général de la série tend vers 1 : cela permet de deviner que f tend vers $+\infty$ mais pas de deviner son ordre de grandeur...

Il est temps de remarquer que la fonction φ définie par

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t, x) = \frac{1}{1+t^2 x^2}$$

est une fonction continue, positive et décroissante de t pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme on a démontré que la série $\sum \varphi(n, x)$ était convergente pour tout $x > 0$, on en déduit que $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x > 0$ et nous allons pouvoir comparer cette intégrale à la somme $f(x)$.

En s'aidant d'une figure, on arrive à

$$\forall x > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2 x^2} \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2 x^2}.$$

Avec le changement de variable $u = xt$, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x \right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2x}.$$

Cet encadrement prouve que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

et en particulier que f tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

▮ Comme f est une fonction paire, on en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0-}{\sim} \frac{\pi}{2|x|}.$$

Solution 32

rms132-1118

Tout d'abord, $F(\alpha)$ est bien définie pour tout $\alpha > 0$ (somme d'une série de Riemann convergente).

• Comme tous les termes sont positifs,

$$\forall \alpha > 0, \quad F(\alpha) \geq \alpha \cdot \frac{1}{1+\alpha} = \alpha$$

et par comparaison, F tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

• La fonction f définie par

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}$$

est continue, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$.

Par comparaison entre une somme et une intégrale (faites une figure!),

$$\forall \alpha > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\alpha dt}{1+t^\alpha} \leq F(\alpha) \leq \alpha + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha dt}{1+t^\alpha}$$

c'est-à-dire

$$\forall \alpha > 0, \quad 1 \leq F(\alpha) \leq 1 + \alpha.$$

Par encadrement, on en déduit que F tend vers 1 au voisinage (droit) de 0.

Solution 33

rms132-1119

1. Pour tout $k \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_k(x) = \frac{x e^{-kx}}{\ln k}.$$

Il est clair que les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour $x = 0$, on a $u_k(x) = 0$ pour tout $k \geq 2$ et la série $\sum u_k(x)$ converge évidemment.

Pour $x > 0$, on a

$$u_k(x) = \frac{x}{\ln k} \cdot e^{-kx} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o((e^{-x})^n)$$

et comme $0 < e^{-x} < 1$, on déduit du Théorème de comparaison que la série $\sum u_k(x)$ converge absolument.

La série de fonctions $\sum u_k$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$.

• La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ au moins. Comme la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $x < 0$, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ et seulement sur $\mathbb{R}_+$.

• Chaque fonction u_k est positive et comme

$$\forall x > 0, \quad u'_k(x) = \frac{e^{-kx}}{\ln k} (1 - kx),$$

on en déduit que

$$\|u_k\|_\infty = u_k(1/k) = \frac{1}{e k \ln k}.$$

Comme la série $\sum \|u_k\|_\infty$ diverge, la série de fonctions $\sum u_k$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

• Les séries de Bertrand n'étant pas au programme, pour justifier la divergence de la série $\sum \frac{1}{k \ln k}$, il faut prétendre qu'on a pris soin de comparer les sommes partielles de cette série aux intégrales

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln t} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \ln n.$$

De cette manière, les apparences sont sauvées...

2. Comme les $u_k(x)$ sont positifs,

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln n} \sum_{k=n}^{+\infty} x e^{-kx} \leq \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

La fonction

$$\varphi = \left[x \mapsto \frac{x}{1 - e^{-x}} \right]$$

est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 1 au voisinage de 0. Elle admet donc un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$ et comme toute fonction continue sur un segment est bornée, quel que soit $A > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, A], \quad 0 \leq \frac{x}{1 - e^{-x}} \leq M.$$

Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on en déduit que

$$\forall x \in [0, A], \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln k} \right| \leq \frac{M}{\ln n}.$$

Cet encadrement prouve que la série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0, A]$.

3. Comme les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et que A est quelconque, on en déduit que la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (= l'union des segments $[0, A]$ lorsque A parcourt $\mathbb{R}_+^*$).

• Fixons maintenant $\alpha > 0$.

► Si l'entier k est assez grand pour que $k\alpha > 1$, on déduit de l'étude des variations de u_k que

$$\forall x \geq \alpha, \quad 0 \leq u_k(x) \leq u_k(\alpha).$$

Le majorant est indépendant de $x \in [\alpha, +\infty[$ et la série $\sum u_k(\alpha)$ est convergente, donc la série $\sum u_k$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

✎ Pour l'instant, cette étude ne nous apprend rien de nouveau. Patience...

► Par inégalité triangulaire, pour tout $k \geq 2$,

$$\forall x > 0, \quad |u'_k(x)| \leq \frac{e^{-kx}}{\ln k} + ku_k(x).$$

D'après ce qui précède, pour tout k assez grand,

$$\forall x \geq \alpha, \quad |u'_k(x)| \leq (e^{-\alpha})^k + ku_k(\alpha).$$

Le majorant ne dépend pas de x et

$$(e^{-\alpha})^k + ku_k(\alpha) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(ke^{-k\alpha}).$$

Comme la série $\sum k(e^{-\alpha})^k$ converge absolument pour $\alpha > 0$ (puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum kx^k$ est égal à 1 et que $0 < e^{-\alpha} < 1$). Donc la série des dérivées $\sum u'_k$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$.

D'après le Théorème de dérivation terme à terme, la somme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{\alpha > 0} [\alpha, +\infty[$$

et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} u'_k(x).$$

4. Comme tous les termes sont positifs,

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln n} \geq \sum_{k=2}^n \frac{e^{-kx}}{\ln k}.$$

✎ Comme $\ln k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(k)$, la série $\sum \frac{1}{\ln k}$ est divergente par comparaison à la série harmonique (Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif).

Soit $A > 0$. Puisque la série de terme général positif $\sum \frac{1}{\ln k}$ est divergente, il existe $n_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n_A} \frac{1}{\ln k} \geq 2A.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{n_A} \frac{e^{-kx}}{\ln k} = \sum_{k=2}^{n_A} \frac{1}{\ln k} \geq 2A$$

et que $0 < A < 2A$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall 0 < x \leq \alpha, \quad \sum_{k=2}^{n_A} \frac{e^{-kx}}{\ln k} \geq A.$$

Par conséquent,

$$\forall 0 < x \leq \alpha, \quad \frac{f(x)}{x} \geq A.$$

Comme A est arbitrairement grand, on en déduit que $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

✎ On a démontré que le taux d'accroissement $[f(x) - f(0)]/(x - 0)$ tendait vers $+\infty$ et donc que le graphe de f admettait une tangente verticale (vers le haut !) à l'origine.

Solution 34**rms134-1488**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et

$$\forall t \in [0, 1], \quad g'_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \left(-\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|g'_n(t)| = \frac{te^t}{n} \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1 \times e^t}{n} \times 1 = \frac{e^t}{n}. \quad (*)$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. Comme la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, t]$, on déduit de l'encadrement précédent et de l'inégalité des accroissements finis que

$$|g_n(t) - g_n(0)| \leq |t - 0| \max_{0 \leq s \leq t} |g'_n(s)| \leq \frac{te^t}{n}.$$

En divisant par $e^t > 0$, on en déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - e^{-t} \right| \leq \frac{t}{n}.$$

3. On déduit de l'encadrement précédent le résultat très classique :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

et on en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction constante 1.

Cela nous conduit à conjecturer que la suite $(G_n)_{n \geq 1}$ converge vers la fonction $[x \mapsto x]$.

Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |G_n(x) - x| &= \left| \int_0^x g_n(t) - 1 \, dt \right| \leq \int_0^x |g_n(t) - 1| \, dt \\ &\leq \int_0^x \frac{te^t}{n} \, dt \\ &\leq \frac{ex}{n} \leq \frac{e}{n}. \end{aligned} \quad (*)$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et de limite nulle (lorsque n tend vers $+\infty$), ce qui prouve que la suite de fonctions $(G_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $[x \mapsto x]$.

Solution 35**rms134-1489**

1. Pour $t = 0$, il est clair que $f_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $0 < t \leq \pi/2$, on a $0 \leq \cos t < 1$ et par croissances comparées (suite géométrique vs puissance),

$$\sin t \cdot n \cdot (\cos t)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction identiquement nulle ω .

2. Pour $0 < \alpha < \pi/2$, par décroissance de la fonction $\cos$ sur I ,

$$\forall \alpha \leq t \leq \pi/2, \quad 0 \leq f_n(t) = \sin t \cdot n \cdot (\cos t)^n \leq 1 \times n \times \cos^n \alpha.$$

Ce majorant est indépendant de $t \in I_\alpha$ et comme $0 \leq \cos \alpha < 1$, il tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (à nouveau par croissances comparées).

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur I_α vers la fonction ω .

• Toutes les fonctions f_n sont continues sur I et la fonction ω est également continue sur I . Comme I est un segment (en particulier, un intervalle borné), si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur I vers ω , alors on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) \, dt = \int_0^{\pi/2} \omega(t) \, dt = 0.$$

✎ Il n'est pas utile de re-démontrer ce résultat, même si la démonstration est très simple : si $a < b$, alors

$$\left| \int_a^b f_n(t) \, dt - \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| \, dt \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \left[\frac{-\cos^{n+1} t}{n+1} \right]_0^{\pi/2} = 1,$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers la fonction ω .

▮ L'argument utilisé pour démontrer que la suite de fonctions ne convergeait pas uniformément sur I prouve en fait que la convergence n'est pas dominée.

Ce qui suit établit la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un nouveau sens : on parle de convergence $*$ -faible ou de convergence étroite et la limite n'est plus une fonction mais la mesure de Dirac en 0, c'est-à-dire la forme linéaire ε_0 définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \quad \varepsilon_0(f) = f(0).$$

▮ Pour alléger les notations mais surtout pour faciliter la compréhension, nous n'utiliserons pas l'expression des fonctions f_n , mais seulement les propriétés suivantes :

— les fonctions f_n sont positives ;

— les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, 1]$ et leur intégrale est égale à 1.

On en déduit que

$$g(0) = \int_0^1 f_n(t)g(0) dt \quad (\dagger)$$

et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 f_n(t)g(t) dt - g(0) = \int_0^1 f_n(t)[g(t) - g(0)] dt. \quad (\star)$$

La relation $(\dagger)$, sur laquelle tout repose, doit être comparée à la propriété bien connue du calcul des probabilités : toute constante α est aussi l'espérance d'une variable aléatoire presque sûrement égale à α .

3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction g est continue en $t = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad |g(t) - g(0)| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, comme la fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et par conséquent,

$$\forall t \in [0, 1], \quad |g(t) - g(0)| \leq |g(t)| + |g(0)| \leq 2\|g\|_\infty.$$

D'après $(\star)$ et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left| \int_0^1 f_n(t)g(t) dt - g(0) \right| \leq \int_0^1 |f_n(t)[g(t) - g(0)]| dt \\ &\leq \int_0^1 f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \end{aligned}$$

puisque les fonctions f_n sont positives.

Avec la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Delta_n &\leq \int_0^\alpha f_n(t)|g(t) - g(0)| dt + \int_\alpha^1 f_n(t)|g(t) - g(0)| dt \\ &\leq \int_0^\alpha f_n(t) \cdot \varepsilon dt + \int_\alpha^1 f_n(t) \cdot 2\|g\|_\infty dt && (\text{positivité des } f_n) \\ &\leq \varepsilon \int_0^\alpha f_n(t) dt + 2\|g\|_\infty \cdot (1 - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, 1]} |f_n(t)| \\ &\leq \varepsilon + 2\|g\|_\infty \cdot (1 - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, 1]} |f_n(t)| \end{aligned}$$

car f_n est positive sur $[0, 1]$ et son intégrale est égale à 1 (donc son intégrale sur le sous-segment $[0, \alpha]$ est inférieure à 1).

▮ Dans la première intégrale, il est indifférent d'intégrer sur $[0, \alpha]$ ou sur $[0, 1]$ puisqu'on intègre une fonction dont les valeurs sont petites.

En revanche, dans la seconde intégrale, il est essentiel de n'intégrer que sur le sous-segment $[\alpha, 1]$: c'est sur un tel intervalle, et pas sur l'intervalle $[0, 1]$, que la convergence de la suite de fonctions est dominée.

Puisque la suite des fonctions f_n converge uniformément sur $[\alpha, 1]$, le second terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad 0 \leq 2\|g\|_\infty \cdot (1 - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, 1]} |f_n(t)| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existait un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad 0 \leq \left| \int_0^1 f_n(t)g(t) dt - g(0) \right| \leq 2\varepsilon$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t) dt = g(0).$$

🔗 On pourra rapprocher cette démonstration de la preuve du Théorème de Cesaro.

Solution 36

10-01

Il s'agit de démontrer que

$$\forall t \in]-r, r[, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

et l'inégalité de Taylor-Lagrange est l'outil idéal pour atteindre cet objectif.

✎ Fixons $0 < \rho < r$. Par hypothèse, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{|u| \leq \rho} |f^{(n+1)}(u)| \leq \frac{M(n+1)!}{r^{n+1}}.$$

On déduit alors de l'inégalité de Taylor-Lagrange que

$$\begin{aligned} \forall t \in [-\rho, \rho], \quad \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| &\leq \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M \cdot \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \\ &\leq M \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $0 < \rho/r < 1$, le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui démontre que

$$\forall t \in [-\rho, \rho], \quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

et comme cette propriété est obtenue pour tout $0 < \rho < r$, on a bien démontré que

$$\forall t \in]-r, r[, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

🔗 Sur le segment $[-\rho, \rho]$, on a trouvé un majorant indépendant de t . On a donc démontré que la série de Taylor convergeait uniformément sur tout segment $[-\rho, \rho]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]-r, r[$. (Ce n'est pas une surprise, il en va ainsi pour toutes les séries entières !)

Attention, a priori, la convergence n'est pas uniforme sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$. Les calculs qui précèdent ne donnent en effet qu'une majoration inutile :

$$\forall t \in]-r, r[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \leq M.$$

Solution 37**10-02**

Pour tout $(p, q) \in I = \mathbb{N}^2$, on pose

$$a_{p,q} = \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)}$$

et $b_{p,q} = |a_{p,q}|$.

La famille est sommable

Par définition, la famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille positive $(b_{p,q})_{(p,q) \in I}$ est sommable. Or

$$\forall (p, q) \in I, \quad 0 \leq b_{p,q} \leq \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{3^q}$$

et les séries géométriques $\sum \frac{1}{2^p}$ et $\sum \frac{1}{3^q}$ sont absolument convergentes, donc la famille $(b_{p,q})_{(p,q) \in I}$ est sommable.

Changement d'indices

L'application $[(p, q) \mapsto (p, p+q)]$ réalise clairement une bijection de $I = \mathbb{N}^2$ sur

$$J = \{(p, n) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq p \leq n\}$$

donc la famille $(a_{p,n-p})_{(p,n) \in J}$ est sommable.

Sommation par paquets

En posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \{(p, n) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq p \leq n\},$$

on définit une partition de J :

$$J = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

et comme la famille $(a_{p,n-p})_{(p,n) \in J}$, on déduit du théorème de Fubini que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(a_{p,n-p})_{(p,n) \in J_n}$ est sommable;
- la série de terme général

$$s_n = \sum_{(p,n) \in J_n} a_{p,n-p}$$

est absolument convergente

- et enfin que

$$\sum_{(p,q) \in I} a_{p,q} = \sum_{(p,n) \in J} a_{p,n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(p,n) \in J_n} a_{p,n-p}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{p=0}^n a_{p,n-p} = \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)} \sum_{p=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^p$$

c'est-à-dire (somme géométrique!)

$$s_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right).$$

D'après le développement en série entière de $\ln(1+x)$, on sait que

$$\forall 0 < x < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n = 3 \cdot 2 \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 2 \cdot 3 \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

et donc que

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{p,q} = 6 \cdot (2 \ln 3 - 3 \ln 2).$$

Solution 38**10-03**

Soit x , une fonction développable en série entière au voisinage de 0 : il existe donc un réel $R > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall t \in]-R, R[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Comme $R > 0$, la fonction x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on peut dériver terme à terme :

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}t^n \quad tx''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}t^n$$

donc x vérifie l'équation différentielle

$$4tx''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0 \quad (*)$$

sur l'intervalle $] -R, R[$ si, et seulement si,

$$\forall t \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ([4(n+1)n + 2(n+1)]a_{n+1} + a_n)t^n = 0.$$

Le premier membre est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est supérieur à $R > 0$ (et donc strictement positif) ; le second membre est une fonction constante, donc développable en série entière. Par unicité du développement en série entière, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} a_n$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0.$$

Le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^n$$

est infini puisque le terme général est borné pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On en déduit qu'une fonction développable en série entière x est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(*)$ si, et seulement si, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^n.$$

En particulier,

$$\forall t > 0, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{t})^{2n} = a_0 \cos \sqrt{t}.$$

Ces solutions de $(*)$ suggèrent le changement de variable que nous allons maintenant effectuer.

• La fonction $\varphi = [t \mapsto \sqrt{t}]$ est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de $I =]0, +\infty[$ sur I , dont la réciproque : $[u \mapsto u^2]$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur I . Par conséquent, la relation $x = y \circ \varphi$ équivaut à $y = x \circ \varphi^{-1}$ (ce qui signifie que la fonction y peut être définie à partir de x et d'un changement de variable) et prouve que x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I si, et seulement si, y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

De plus, pour tout $t > 0$,

$$x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} y'(\sqrt{t}) \quad x''(t) = \frac{1}{4t} y''(\sqrt{t}) - \frac{1}{4t\sqrt{t}} y'(\sqrt{t})$$

donc

$$4tx''(t) + 2x'(t) + x(t) = y''(\sqrt{t}) + y(\sqrt{t}) = [(y'' + y) \circ \varphi](t).$$

Comme φ réalise une bijection de I sur I , on en déduit que x est solution de $(*)$ sur I si, et seulement si,

$$\forall u \in I, \quad y''(u) + y(u) = 0. \quad (\dagger)$$

Les solutions de cette équation sont connues ! Une fonction y est solution de $(\dagger)$ sur I si, et seulement si, il existe deux constantes a_0 et b_0 telles que

$$\forall u \in I, \quad y(u) = a_0 \cos u + b_0 \sin u.$$

Par conséquent, x est une solution de $(\star)$ sur I si, et seulement si, il existe deux constantes a_0 et b_0 telles que

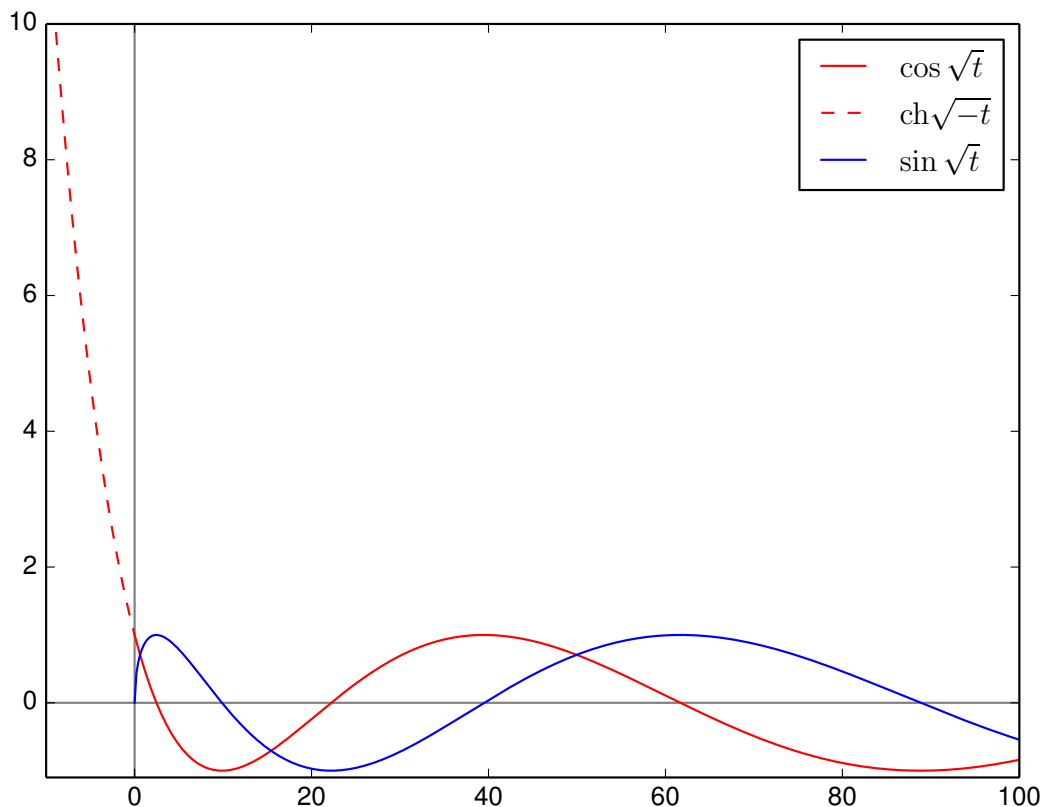
$$\forall t \in I, \quad x(t) = y(\sqrt{t}) = a_0 \cos \sqrt{t} + b_0 \sin \sqrt{t}.$$

Il est évident que la fonction $[t \mapsto \cos \sqrt{t}]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, mais il n'est pas évident qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Les calculs de la première partie prouvent qu'elle peut être prolongée en une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier qu'elle est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$!

Pour tracer le graphe de ce prolongement, il suffit de remarquer que, pour $t < 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!} = \text{ch } \sqrt{-t}.$$

En revanche, la fonction $[t \mapsto \sin \sqrt{t}]$ n'est pas prolongeable en une fonction développable en série entière au voisinage de l'origine : son graphe admet une tangente verticale à l'origine.



Solution 39

10-04

1. Soient $0 < r < R$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k définie par

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad u_k(t) = a_k r^k e^{i(k-n)t}$$

est continue sur le segment $[0, 2\pi]$. De plus,

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad |u_k(t)| = |a_k| r^k$$

et comme le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k z^k$ est infini, la série $\sum a_k r^k$ est absolument convergente, donc la série de fonctions $\sum u_k$ converge *normalement* sur le segment $[0, 2\pi]$.

Par conséquent, la fonction S_n définie par

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad S_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) = S(re^{it})e^{-int}$$

est continue sur le segment $[0, 1]$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale, et on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^{2\pi} S_n(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_k(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = 2\pi a_n r^n.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S(re^{it}) e^{-int} dt.$$

La fonction S_n n'est pas la somme d'une série entière : il faut donc appliquer la théorie des séries de fonctions pour justifier l'intégration terme à terme, la théorie des séries entières ne suffit pas.

2. Supposons que la fonction S soit bornée sur $\mathbb{C}$: il existe donc un réel $M > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |S(z)| \leq M$$

et par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \forall t \in [0, 2\pi], \quad |S(re^{it}) e^{-int}| \leq M.$$

On déduit alors de l'inégalité triangulaire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \quad |a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} (2\pi M).$$

Comme r est quelconque, on peut faire tendre r vers $+\infty$: comme r^n tend vers $+\infty$ pour tout $n \geq 1$ (mais pas pour $n = 0$...), on déduit de cet encadrement que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, la fonction S est constante (théorème de Liouville) :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad S(z) = a_0.$$

3. On sait que la fonction $\cos$ est développable en série entière avec un rayon de convergence infini :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

On sait aussi que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$ mais pas constante.

Il n'y a pas de contradiction avec ce qui précède, car $\cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{C}$! En effet,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(it) = \cosh t.$$

Solution 40

10-05

1. Comme la série numérique $\sum a_k r^k$ converge, son reste

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k r^k$$

est bien défini et la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. En particulier, cette suite est bornée, donc la borne supérieure

$$M_n = \sup\{|R_k|, k \geq n\}$$

est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Il est clair que les M_n sont tous positifs et, par monotonie de la borne supérieure, la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |R_n| \leq \varepsilon.$$

Par passage à la borne supérieure, on en déduit que

$$0 \leq M_{n_0} \leq \varepsilon.$$

Par décroissance, on a en fait prouvé que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq M_n \leq \varepsilon$$

et donc que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendait vers 0.

2. Soit $0 \leq x \leq r$.

— Si $x = r$, alors la suite de terme général $(x/r)^k$ est constante, égale à 1.

— Si $0 \leq x < r$, alors la suite de terme général $(x/r)^k$ est décroissante et tend vers 0.

Dans les deux cas, cette suite est décroissante et convergente. Par conséquent, la série télescopique

$$\sum \left[\left(\frac{x}{r} \right)^k - \left(\frac{x}{r} \right)^{k+1} \right]$$

est une série convergente de terme général positif.

3. Considérons deux entiers $n < N$. Pour tout $x \in [0, r]$,

$$\sum_{k=n+1}^N a_k x^k = \sum_{k=n+1}^N a_k r^k \left(\frac{x}{r} \right)^k \quad (\text{astuce taupinale multiplicative})$$

$$= \sum_{k=n+1}^N (R_{k-1} - R_k) \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^k \quad (\text{astuce taupinale additive})$$

$$= \sum_{k=n+1}^N R_{k-1} \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^k - \sum_{k=n+1}^N R_k \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^k$$

$$= \sum_{k=n}^{N-1} R_k \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^k - \sum_{k=n+1}^N R_k \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^k$$

$$= R_n \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^n + \sum_{k=n}^{N-1} \underbrace{R_k \cdot \left[\left(\frac{x}{r} \right)^{k+1} - \left(\frac{x}{r} \right)^k \right]}_{u_k} - R_N \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^N.$$

On rappelle que l'indice n est fixé.

Pour tout entier $k \geq n$,

$$|R_k| \leq M_k \leq M_n$$

et par conséquent,

$$\forall k \geq n, \quad |u_k| \leq M_n \left[\left(\frac{x}{r} \right)^k - \left(\frac{x}{r} \right)^{k+1} \right].$$

On a vu en 2 que ce majorant était le terme général (positif!) d'une série télescopique convergente. D'après le Théorème de comparaison, la série $\sum u_k$ est absolument convergente.

Lorsque N tend vers $+\infty$, l'expression R_N tend vers 0 et l'expression $(x/r)^N$ reste bornée, donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^N = 0.$$

On peut donc faire tendre N vers $+\infty$ dans l'expression trouvée en 3 et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, r], \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n \cdot \left(\frac{x}{r} \right)^n + \sum_{k=n}^{+\infty} R_k \cdot \left[\left(\frac{x}{r} \right)^{k+1} - \left(\frac{x}{r} \right)^k \right].$$

4.

Par définition, la série entière converge uniformément sur $[0, r]$ si, et seulement si, la suite des restes

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

converge uniformément sur $[0, r]$ vers la fonction nulle, c'est-à-dire s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall x \in [0, r], \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \varepsilon_n.$$

Comme la série du second membre est *absolument* convergente, on déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, r], \quad & \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq |R_n| \cdot \left| \left(\frac{x}{r} \right)^n \right| + \sum_{k=n}^{+\infty} |R_k| \cdot \left[\left(\frac{x}{r} \right)^k - \left(\frac{x}{r} \right)^{k+1} \right] \\ & \leq M_n \cdot 1 + \sum_{k=n}^{+\infty} M_n \cdot \left[\left(\frac{x}{r} \right)^k - \left(\frac{x}{r} \right)^{k+1} \right] \\ & \leq M_n \left[1 + \left(\frac{x}{r} \right)^n \right] \leq 2M_n. \end{aligned}$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [0, r]$ et d'après 1, ce majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, CQFD.

Solution 41

10-06

Comme $0 \leq r < R$, on sait que la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente.

✎ Tous les arguments de convergence normale qui suivent reposent sur cette remarque simple mais essentielle !

✎ Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on pose

$$S(\theta) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Il s'agit de la somme d'une série de fonctions continues (la variable étant θ) qui converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Cette fonction S est en particulier *continue* sur le segment $[0, 2\pi]$ et par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

est bien définie.

✎ Comme la fonction S est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, elle est bornée. Par conséquent, la fonction intégrande

$$|S(\theta)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \cdot \overline{S(\theta)} \cdot e^{in\theta}$$

apparaît comme la somme d'une série de fonctions *continues* qui converge normalement sur le segment $[0, 2\pi]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad |a_n r^n \cdot \overline{S(\theta)} \cdot e^{in\theta}| \leq \|S\|_\infty |a_n| r^n.$$

On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^{2\pi} |S(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \overline{S(\theta)} \cdot e^{in\theta} d\theta. \quad (*)$$

✎ Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction intégrande

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \overline{S(\theta)} e^{in\theta} = \sum_{m=0}^{+\infty} \overline{a_m} r^m e^{i(n-m)\theta}$$

apparaît une fois encore, une fois de plus ! comme la somme d'une série de fonctions *continues* qui converge *normalement* sur le segment $[0, 2\pi]$:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad |\overline{a_m} r^m e^{i(n-m)\theta}| = |a_m| r^m.$$

On peut donc intégrer terme à terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{2\pi} \overline{S(\theta)} \cdot e^{in\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} \overline{a_m} r^m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 2\pi \overline{a_n} r^n$$

et on déduit de (*) que

$$\int_0^{2\pi} |S(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \cdot 2\pi \overline{a_n} r^n = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

❖ **Variante.**

Comme $0 \leq r < R$, la fonction intégrande $|S(\theta)|^2$ peut aussi être vue comme le produit des sommes de deux séries absolument convergentes :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad |S(\theta)|^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta} \right).$$

On peut donc écrire cette fonction comme somme du produit de Cauchy :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad |S(\theta)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\theta)$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k r^k e^{ik\theta} \overline{a_{n-k}} r^{n-k} e^{-i(n-k)\theta} = r^n \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta}.$$

On en déduit que

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_n(\theta)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k r^k| |a_{n-k} r^{n-k}|.$$

Le majorant obtenu est indépendant de $\theta \in [0, 2\pi]$ et c'est le terme général d'une série convergente.

❧ La série $\sum |a_k r^k|$ est absolument convergente, donc le produit de Cauchy de cette série avec elle-même est une série absolument convergente.

La série $\sum c_n(\theta)$ est donc une série de fonctions continues qui converge normalement sur le segment $[0, 2\pi]$, on peut par conséquent intégrer terme à terme. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |S(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c_n(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} \int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)\theta} d\theta.$$

Or l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)\theta} d\theta$$

est égale à 2π si $n = 2k$ et nulle autrement. Ne subsistent donc que les indices pairs $n = 2p$ et, dans la somme sur k , seulement l'indice $k = p$:

$$\int_0^{2\pi} |S(\theta)|^2 d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} r^{2p} \sum_{k=0}^{2p} a_k \overline{a_{2p-k}} \int_0^{2\pi} e^{2i(k-p)\theta} d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} r^{2p} \cdot |a_p|^2 \cdot 2\pi.$$

Solution 42

10-07

1. Comme la série $\sum a_n = \sum a_n 1^n$ est absolument convergente, le rayon de convergence R_a de la série entière est supérieur à 1.

❧ Sans information supplémentaire, on ne peut pas savoir si $R_a = 1$ ou si $R_a > 1$.

En tant que série de fonctions, la série entière $\sum a_n z^n$ converge donc normalement sur le segment $[-1, 1]$ et sa somme A est donc continue sur le segment $[-1, 1]$.

❖ Comme la série $\sum b_n = \sum b_n 1^n$ est convergente, le rayon de convergence R_b de la série entière est supérieur à 1. Mais comme la série $\sum b_n$ n'est pas absolument convergente, le rayon de convergence R_b est aussi inférieur à 1. Donc $R_b = 1$.

La somme B est donc continue sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$, mais elle est aussi continue au point 1 (Théorème d'Abel radial).

❖ En tant que produit de Cauchy de deux séries entières dont le rayon de convergence est au moins égal à 1, la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur à 1 et sa somme C est donc continue (au moins) sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

❧ Dans le cours, on a établi le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières en supposant que les deux séries étaient absolument convergentes. On sait donc que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad C(x) = A(x).B(x)$$

et, bien que A et B soient continues en $x = 1$, on ne sait a priori pas si C est définie en $x = 1$.

• On a également constaté (sur un contre-exemple) que : si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont toutes les deux semi-convergentes, le produit de Cauchy $\sum c_n$ peut être divergent.

2. Par définition du produit de Cauchy,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N c_n &= \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \sum_{k=0}^N a_k \sum_{n=k}^N b_{n-k} && \text{(intervention des sommes)} \\ &= \sum_{k=0}^N a_k \sum_{m=0}^{N-k} b_m. && \text{(changement d'indice)} \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité (2) en décomposant la somme partielle comme différence de la somme et du reste :

$$\sum_{m=0}^{N-k} b_m = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m - \sum_{m=N-k+1}^{+\infty} b_m = B(1) - \sum_{m=N-k+1}^{+\infty} b_m,$$

ce qui est possible puisque la série $\sum b_m$ est convergente.

3. a. On notera A_n et C_n , les sommes partielles des séries $\sum a_n$ et $\sum c_n$.

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k$$

• Par inégalité triangulaire, on déduit de (2) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |C_n - A_n \cdot B(1)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \cdot \left| \sum_{m=n-k+1}^{+\infty} b_m \right|. \quad (\star)$$

• La série $\sum a_k$ est absolument convergente et, puisque la série $\sum b_k$ est convergente, la suite de ses restes est bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \leq M \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=m}^{+\infty} b_k \right| \leq M. \quad (\dagger)$$

• Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite des restes de la série $\sum b_k$ tend vers 0, il existe un rang $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall m \geq m_0, \quad \left| \sum_{k=m}^{+\infty} b_k \right| \leq \varepsilon. \quad (\ddagger)$$

De plus, $n - k + 1 \geq m_0$ si, et seulement si, $k \leq n - m_0 + 1$.

• On déduit alors de $(\star)$ et de la relation de Chasles que

$$\begin{aligned} \forall n \geq m_0, \quad |C_n - A_n \cdot B(1)| &\leq \sum_{k=0}^{n-m_0} |a_k| \left| \sum_{m=n-k+1}^{+\infty} b_m \right| + \sum_{k=n-m_0+1}^n |a_k| \left| \sum_{m=n-k+1}^{+\infty} b_m \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-m_0} |a_k| \cdot \varepsilon + \sum_{k=n-m_0+1}^n |a_k| \cdot M && \text{d'après } (\ddagger) \text{ et } (\dagger) \\ &\leq M \cdot \varepsilon + M \sum_{k=n-m_0+1}^n |a_k|. && \text{d'après } (\dagger) \end{aligned}$$

Puisqu'on somme de $k = n - m_0 + 1$ à $k = n = n - m_0 + m_0$, la dernière somme compte m_0 termes et on sait que la suite (a_k) tend vers 0 (puisque la série $\sum a_k$ converge). Il existe donc un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_0, \quad |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{m_0}$$

et $n - m_0 + 1 \geq k_0$ si, et seulement si, $n \geq m_0 + k_0 - 1$.

On en déduit que

$$\forall n \geq m_0 + k_0, \quad |C_n - A_n \cdot B(1)| \leq M \cdot \varepsilon + M \cdot m_0 \cdot \frac{\varepsilon}{m_0} = 2M \cdot \varepsilon.$$

✦ On a ainsi démontré que la différence $C_n - A_n.B(1)$ tendait vers 0.

Comme la suite des sommes partielles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $A(1)$, on a en fait démontré que la suite des sommes partielles $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $A(1).B(1)$.

L'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right)$$

est donc vraie pour tout $x \in]-1, 1]$ et comme les sommes A et B sont continues sur cet intervalle, on en déduit en particulier que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

3. b. On peut réécrire l'identité (1) sous la forme

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{k=0}^N a_k \sum_{m=0}^{N-k} b_m = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(N)$$

en posant

$$\forall 0 \leq k \leq N, \quad u_k(N) = a_k \sum_{m=0}^{N-k} b_m \quad \text{et} \quad \forall k > N, \quad u_k(N) = 0.$$

✎ Nous considérons ici une série de fonctions $\sum u_k$ définies sur $\Omega = \mathbb{N}$.

Pour tout $N \in \Omega$, cette série ne compte qu'un nombre fini de termes non nuls, donc cette série de fonctions converge simplement sur Ω et la somme S de cette série de fonctions est une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$.

Par construction,

$$\forall N \in \Omega, \quad \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(N) = S(N).$$

On cherche donc à démontrer que la fonction S tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

Nous allons maintenant vérifier que

— chaque fonction u_k tend vers une limite finie ℓ_k au voisinage de $+\infty$;

— et que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur Ω

et nous pourrons en déduire que $S(N)$ tend vers une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$ avec

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} u_k(N).$$

✦ Comme la série $\sum b_m$ est convergente, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} u_k(N) = a_k \sum_{m=0}^{+\infty} b_m = a_k B(1).$$

De plus, la suite des sommes partielles est bornée (comme toute suite convergente), donc il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{m=0}^n b_m \right| \leq M.$$

On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, \quad |u_k(N)| \leq |a_k|.M.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $N \in \Omega = \mathbb{N}$ et c'est le terme général d'une série convergente (puisque la série $\sum a_k$ est absolument convergente), donc la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur Ω .

On a ainsi démontré que la série $\sum c_n$ était convergente.

✦ D'après le Théorème d'Abel radial, la fonction C est donc continue sur $[0, 1]$. Or on sait que A et B sont continues sur $[0, 1]$ et que

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad C(x) = A(x).B(x)$$

(c'est le théorème classique sur le produit de Cauchy). Par passage à la limite, on en déduit que

$$\forall 0 \leq x \leq 1, \quad C(x) = A(x).B(x).$$

Solution 43**10kh-01**

Le terme général est $\circ(x^{2n})$, donc la série converge absolument pour $|x| < 1$ et donc $R \geq 1$.

Réciproquement, si $|x| > 1$, alors la série diverge grossièrement par croissances comparées, donc $R \leq 1$.

Et donc $R = 1$.

🔗 La règle de D'Alembert est très pratique, il faut penser à s'en servir. Néanmoins, il arrive fréquemment qu'on puisse s'en passer.

• Version pas réveillé : pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

On reconnaît une primitive de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{x}{1-x^2}.$$

On peut alors décomposer en éléments simples :

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

et, après primitivation, on obtient

$$\forall 0 < |x| < 1, \quad f(x) = \frac{-1}{2x} \ln(1-x^2).$$

• Version réveillé (par le résultat trouvé) : si on peut calculer la somme de cette série entière, c'est qu'on va reconnaître une série entière connue, cherchons-la activement !

Pour $x \neq 0$ et $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} = \frac{-1}{2x} \ln(1-x^2).$$

Solution 44**10kh-02**

1. Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $u_n :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad u_n(x) = \frac{a_n}{n-x}$$

est continue sur $]-1, 1[$ (puisque $n \geq 1 > x$). De plus, pour tout $0 < r < 1$,

$$\forall x \in [-r, r], \quad |u_n(x)| \leq \frac{|a_n|}{n-r}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-r, r]$ et ce majorant est le terme général d'une série convergente. En effet, la série $\sum |a_n|^2$ est convergente par hypothèse et

$$\forall 0 < r < 1, \quad \left| \frac{1}{n-r} \right|^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

🔗 D'après l'inégalité de Schwarz, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux familles de carré sommable, alors la famille $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille sommable.

On a ainsi démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur tout segment $[-r, r] \subset]-1, 1[$. Par conséquent, la somme S est bien définie sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ et elle est continue sur cet intervalle.

2. Avec $R = 1$, on trouve

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p} \right) x^p.$$

3. Si la somme S est identiquement nulle, alors tous les coefficients de son développement en série entière sont nuls :

$$\forall p \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0$$

(puisque le rayon de convergence est strictement positif).

► Nous allons considérer ici la série de fonctions $\sum f_n$ où

$$f_n : \Omega = \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

• On sait déjà que la série $\sum f_n$ converge simplement sur Ω : pour tout $p \in \Omega$, la série $\sum_n f_n(p)$ est (absolument) convergente.

• Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f_n(p) = 0$$

mais pour $n = 1$, on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f_1(p) = a_1.$$

Chaque fonction f_n tend donc vers une limite finie ℓ_n lorsque p tend vers $+\infty$.

• Enfin, quels que soient $n \geq 1$ et $p \in \Omega$, on a

$$\left| \frac{a_n}{n^p} \right| \leq \frac{|a_n|}{n}.$$

Le majorant est indépendant de $p \in \Omega$ et, par hypothèse, la série $\sum \frac{a_n}{n}$ est absolument convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur Ω .

• On peut donc appliquer le Théorème de la double limite :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^p} = a_1.$$

Or, dans le premier membre, on considère la limite d'une suite identiquement nulle, donc

$$0 = a_1.$$

► Pour la suite de la démonstration, on procède par récurrence en supposant que

$$a_1 = a_1 = \dots = a_r = 0.$$

Notre hypothèse de départ devient donc

$$\forall p \in \Omega, \quad \sum_{n=r+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0.$$

En multipliant par $(r+1)^p$, on en déduit que

$$\forall p \in \Omega, \quad \sum_{n=r+1}^{+\infty} \frac{(r+1)^p a_n}{n^p} = 0.$$

Nous considérons maintenant les fonctions $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$\forall n \geq r, \forall p \in \Omega, \quad f_n(p) = \frac{(r+1)^p a_n}{n^p}.$$

• La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur Ω (déjà fait).

• Pour tout $n \geq r+2$,

$$f_n(p) = a_n \cdot \frac{(r+1)^p}{n^p} = a_n \cdot \left(\frac{r+1}{n} \right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

(puisque $0 < (r+1)/n < 1$) cependant que, pour $n = r+1$,

$$\forall p \in \Omega, \quad f_{r+1}(p) = a_{r+1}.$$

Chaque fonction f_n tend donc vers une limite finie ℓ_n lorsque p tend vers $+\infty$.

• Enfin, pour tout $n \geq r+1$ et tout $p \in \Omega$,

$$|f_n(p)| \leq |a_n| \cdot \frac{r+1}{n}.$$

(Attention, c'est assez rusé : il faut distinguer le cas $n = r+1$ et le cas $n \geq r+2$ pour établir cet encadrement ! Dans le second cas, on a $0 < (r+1)/n < 1$ et donc $0 < [(r+1)/n]^p \leq (r+1)/n$ pour tout $p \in \Omega$.)

On a trouvé un majorant indépendant de $p \in \Omega$ et, le facteur $(r+1)$ étant sans intérêt, ce majorant est le terme général d'une série convergente comme on l'a déjà remarqué.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc normalement sur Ω et, à nouveau par le Théorème de la double limite,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=r+1}^{+\infty} f_n(p) = \sum_{n=r+1}^{+\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} f_n(p).$$

Autrement dit,

$$0 = a_{r+1} + \sum_{n=r+2}^{+\infty} 0$$

donc $a_{r+1} = 0$. On en déduit que

$$a_1 = \dots = a_r = a_{r+1} = 0$$

et la conclusion découle alors du principe de récurrence :

$$\forall r \geq 1, \quad a_r = 0.$$

✎ Dans ce genre d'exercice, il est utile de se servir des notations pour retrouver le cadre habituel bien connu : puisque c'est le paramètre p qu'on souhaite faire varier, j'ai noté Ω au lieu de $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des valeurs prises par p .

L'important est ici de bien distinguer l'indice de sommation (n) et le paramètre qu'on fait varier (p). On sous-estime toujours l'importance des notations pour bien raisonner !

Solution 45

10kh-03

1. Comme $A_n \sim n$, il est clair que le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n x^n$ est égal à 1.

✎ Comme $a_n = A_{n+1} - A_n$ et que les séries $\sum A_n x^n$ et $\sum A_{n+1} x^n$ convergent absolument pour $|x| < 1$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à 1.

Si ce rayon de convergence était strictement supérieur à 1, alors il existerait un réel $r > 1$ tel que la série $\sum a_n r^n$ soit absolument convergente.

✎ Comme $1 < R$, il existe des réels $1 < r < R$ et pour chacun de ces réels, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge absolument.

Dans ce cas,

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{r^n}\right)$$

et comme $r > 1$, la série $\sum a_n$ serait convergente, ce qui contredit l'hypothèse faite sur la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égal à 1.

2. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ est égal à 1, on peut déduire sa somme des séries de référence par dérivation terme à terme sur $] -1, 1[$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

✎ L'intuition nous dit que la relation $A_n \sim n$ pourrait se traduire par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (\dagger)$$

et donc par

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n = 1. \quad (\star)$$

On peut se rendre compte que c'est une piste intéressante si on cherche à comprendre d'où sort cette série entière $\sum A_n x^n$.

En "remarquant" que

$$A_n = a_0 + \dots + a_{n-1} = a_0 \cdot 1_n + \dots + a_{n-1} \cdot 1_1 + a_n \cdot 0_0 = \sum_{k=0}^n a_k \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(n-k),$$

on comprend que la série $\sum A_n x^n$ est le **produit de Cauchy** de la série $\sum a_n x^n$ avec la série $\sum \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(n) x^n$. Par conséquent,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right) = \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On en déduit que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{(1-x)^2}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n$$

et le résultat final découlera directement de la limite (*) — dès qu'elle sera démontrée.

Comme $A_n \sim n$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall n \geq 1, \quad d_n \stackrel{\text{def.}}{=} A_n - n = n\varepsilon_n.$$

• Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad |\varepsilon_n| \leq \varepsilon. \quad (\ddagger)$$

Pour tout $0 \leq x < 1$, la série $\sum n\varepsilon_n x^n$ est absolument convergente. On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n = P_0(x) + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} n\varepsilon_n x^n \quad \text{avec} \quad P_0(x) = \sum_{n=1}^{N_0} d_n x^n$$

et, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq x < 1, \quad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n - \frac{x}{(1-x)^2} \right| &\leq |P_0(x)| + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} n|\varepsilon_n| x^n \\ &\leq |P_0(x)| + \varepsilon \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} n x^n && \text{d'après } (\ddagger) \\ &\leq |P_0(x)| + \varepsilon \frac{x}{(1-x)^2}. && \text{avec } (\ddagger) \text{ (terme général positif)} \end{aligned}$$

La fonction P_0 est polynomiale, donc elle reste bornée au voisinage de 1, alors que la fonction rationnelle $x/(1-x)^2$ tend vers l'infini au voisinage de 1. Il existe donc un réel $0 < x_0 < 1$ tel que

$$\forall x_0 \leq x < 1, \quad |P_0(x)| \leq \varepsilon \frac{x}{(1-x)^2}.$$

• Résumons-nous : pour tout $\varepsilon > 0$, on a justifié l'existence d'un réel $0 < x_0 < 1$ tel que

$$\forall x_0 \leq x < 1, \quad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n - \frac{x}{(1-x)^2} \right| \leq 2\varepsilon \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On a ainsi démontré que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n - \frac{x}{(1-x)^2} \underset{x \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right).$$

Autrement dit, l'équivalence ($\ddagger$) est vraie et, comme on l'a vu, on peut en déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

Solution 46

10kh-04

1. Comme la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est bornée, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k x^k$ est supérieur à 1.

Si $t = 0 \pmod{\pi}$, alors les a_k sont tous nuls et le rayon de convergence est infini.

Si $t \neq 0 \pmod{\pi}$, alors la suite de terme général $\sin kt$ ne tend pas vers 0 (résultat bien connu, mais pas si simple à démontrer) et par conséquent, si $x > 1$, la suite de terme général

$$a_k x^k = \sin kt \cdot \frac{x^k}{k}$$

n'est pas bornée.

En général (c'est-à-dire pour $\sin t \neq 0$), le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k x^k$ est égal à 1.

2. On suppose encore $\sin t \neq 0$ et donc $R = 1$.

🔗 *Ce qui suit est une application archi-classique de la transformation d'Abel — à connaître !*

♣ Comme $\sin t \neq 0$, le complexe e^{it} est différent de 1 et on pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_k = \sum_{\ell=0}^k \sin \ell t.$$

On peut expliciter la somme S_k :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_k = \Im \sum_{\ell=0}^k (e^{it})^\ell = \Im \frac{e^{i(k+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{\sin \frac{(k+1)t}{2} \sin \frac{kt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

On en déduit que la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

🔗 *La suite est bornée pour chaque t fixé tel que $e^{it} \neq 1$ mais elle n'est pas uniformément bornée, il est facile de vérifier que la borne supérieure dépend de t de telle sorte que*

$$\sup_{0 < t < \pi} \sup_{k \in \mathbb{N}} S_k = +\infty.$$

♣ Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\ &= \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

Comme la suite (S_n) est bornée,

$$\frac{S_k}{k(k+1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

donc la série $\sum \frac{S_k}{k(k+1)}$ est absolument convergente et par conséquent la somme partielle

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}$$

tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, le quotient S_n/n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (le numérateur étant borné). Cela prouve que la suite des sommes partielles de la série $\sum a_k$ est convergente et donc que la série $\sum a_k x^k$ est convergente pour $x = +1$.

♣ Pour $x = -1$, il suffit de remarquer que

$$a_k (-1)^k = \frac{(-1)^k \sin kt}{k} = \frac{\sin[k(t + \pi)]}{k}.$$

Le raisonnement précédent valant pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^{it} \neq 1$, il vaut encore pour $t + \pi$.

Donc la série $\sum a_k x^k$ est convergente aussi pour $x = -1$.

Solution 47

10kh-05

1. Quelle que soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(\sin a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc le rayon de convergence R' est supérieur à 1. On a ainsi démontré que : si $0 < R \leq 1$, alors $R' \geq 1 \geq R$.

♣ Supposons maintenant que $R > 1$. Pour tout réel $1 < r < R$, la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente et en particulier

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^n}\right).$$

Comme a_n tend vers 0, on en déduit que

$$\sin a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n,$$

ce qui prouve que, dans ce cas, les rayons de convergence sont égaux : $R' = R$.

♣ On a bien démontré que, dans tous les cas, $R' \geq R$.

2. On a démontré que le quotient R'/R était toujours supérieur à 1 et qu'il pouvait être égal à 1 (pour $a_n = 2^{-n}$, on a $R = 2 > 1$ et donc $R' = R$).

♣ Pour tout $0 < c < 1$, posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\pi}{2} + 2 \left\lfloor \frac{1}{c^n} \right\rfloor \pi.$$

Comme $\sin a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $R' = 1$.

✎ En général, le rayon de convergence R' est supérieur à 1 mais si les a_n sont bizarrement choisis, il pourrait fort bien être strictement supérieur à 1.

Il faut donc que les a_n soient "compliqués" pour que le rayon de convergence R' soit facile à calculer.

D'autre part, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{c^n} - 2\pi \leq a_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{c^n}.$$

Comme $0 < c < 1$, le minorant est strictement positif si n est choisi assez grand et on en déduit que

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{4 - 3c^{n+1}}{4 + c^n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{4 + c^{n+1}}{4 - 3c^n}.$$

Par encadrement, on en déduit que le quotient a_{n+1}/a_n tend vers $1/c$ et donc que $R = c$ (règle de D'Alembert).

Pour chacune de ces séries entières, on a donc $R'/R = 1/c$.

♣ En conclusion, l'ensemble des valeurs possibles pour le quotient R'/R est l'intervalle $[1, +\infty[$.

Solution 48

10kh-06

Comment ne pas penser à la série exponentielle ?

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!}$$

On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^{jz} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{j^p z^p}{p!} \quad \text{et} \quad e^{j^2 z} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{j^{2p} z^p}{p!}.$$

Par conséquent,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z + e^{jz} + e^{j^2 z} = \sum_{p=0}^{+\infty} (1 + j^p + j^{2p}) \frac{z^p}{p!}.$$

S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = 3n$, alors $1 + j^p + j^{2p} = 3$. Sinon, $j^p \neq 0$ et

$$1 + j^p + j^{2p} = \frac{1 - j^{3p}}{1 - j^p} = 0.$$

Par conséquent,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!} = \frac{e^z + e^{jz} + e^{j^2 z}}{3}.$$

✎ Si x est réel, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3} \cdot e^x + \frac{2}{3} \cdot e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

Je ne vois pas comment simplifier l'expression de la somme lorsque z est complexe.

Solution 49**10kh-07**

Supposons que les a_n ne soient pas tous nuls : il existe alors un premier coefficient non nul, c'est-à-dire un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall |z| < R, \quad f(z) = a_{n_0} z^{n_0} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} z^k \right).$$

🔗 *Toujours penser à la valuation d'une série entière !*

Par hypothèse sur la série entière $\sum a_n z^n$, la série numérique

$$\sum a_{n_0+k} z^k$$

converge (absolument) pour $|z| < R$, donc la somme

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} z^k$$

est continue sur le disque ouvert $D = \{|z| < R\}$. La valuation de cette série entière est supérieure à 1, donc cette somme tend vers 0 lorsque z tend vers 0 et

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} z^k \right| = 1.$$

Il existe donc un rayon $0 < \rho < R$ tel que

$$\forall |z| \leq \rho, \quad \left| 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} z^k \right| \geq \frac{1}{2}$$

et par conséquent,

$$\forall 0 < |z| \leq \rho, \quad |f(z)| \geq \frac{1}{2} \cdot \underbrace{|a_{n_0}|}_{>0} \cdot \underbrace{|z^{n_0}|}_{>0}$$

ce qui contredit l'existence d'une suite $(z_n)_{n \geq p}$ de nombres complexes de limite nulle et non stationnaire telle que $f(z_p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

🔗 *Cette propriété est connue sous le nom de principe des zéros isolés.*

Solution 50**10kh-08**

1. Il est clair que le rayon de convergence de la série entière est égal à 1.

🔗 *On peut appliquer la règle de D'Alembert ou remarquer que la série converge absolument pour $|x| \leq 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$.*

Comme la série (de Riemann) $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, la série entière converge normalement sur le segment $[-1, 1]$, donc la somme F est continue sur $[-1, 1]$.

2. Comme le rayon de convergence est égal à 1, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$. Comme elle est continue sur le segment $[-1, 1]$, on peut déduire du Théorème fondamental de l'analyse que

$$\forall x \in [0, 1], \quad F(1) - F(x) = \int_x^1 F'(t) dt.$$

🔗 *Le Théorème fondamental nous dit que*

$$\forall 0 \leq x \leq y < 1, \quad F(y) - F(x) = \int_x^y F'(t) dt.$$

La continuité de F au point $t = 1$ nous permet de passer à la limite en faisant tendre y vers 1 et prouve au passage que l'intégrale généralisée

$$\int_x^1 F'(t) dt$$

est convergente.

Pour le moment, on sait que F' est continue sur l'intervalle $[0, 1[$, on ne connaît pas encore son comportement sur $[0, 1]$, il faut donc bien considérer que cette intégrale est une intégrale généralisée.

• Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut dériver terme à terme :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad F'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$$

et en particulier,

$$\forall 0 < x < 1, \forall t \in [x, 1[, \quad F'(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = \frac{-\ln(1-t)}{t}.$$

Il est clair que

$$F'(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\ln(1-t)}{t}. \quad (*)$$

Or la fonction $t \mapsto -\ln(1-t)$ est continue, positive et intégrable sur $[0, 1[$. Par intégration des relations de comparaison, on déduit de (*) que

$$\int_x^1 F'(t) dt \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \int_x^1 -\ln(1-t) dt = \int_0^{1-x} -\ln u du = (1-x)[- \ln(1-x) + 1]$$

et donc que

$$F(1) - F(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (x-1) \ln(1-x).$$

3. D'après l'équivalent trouvé, la fonction F n'est pas dérivable en 1 :

$$\frac{F(1) - F(x)}{1-x} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty.$$

• Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et continue sur $[0, 1]$, on peut aussi appliquer le Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$: si la dérivée F' tend vers $+\infty$ au voisinage de 1, alors F n'est pas dérivable en 1.

On sait que

$$\forall t \in [0, 1[, \quad F'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} \quad \text{et que} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty.$$

Comme la dérivée F' est la somme d'une série de fonctions positives,

$$\forall 0 \leq t < 1, \forall N \geq 1, \quad F'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} \geq \sum_{n=1}^N \frac{t^{n-1}}{1} n. \quad (\dagger)$$

Les deux sommes sont des fonctions croissantes de t , donc on peut faire tendre t vers 1 :

$$\forall N \geq 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1} F'(t) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

et comme la série harmonique $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, on en déduit que la limite de $F'(t)$ lorsque t tend vers 1 est égale à $+\infty$.

• On peut éviter de recourir aux limites infinies, mais cela demande un peu d'adresse.

Fixons un réel $A > 0$. Comme la série harmonique est une série divergente de terme général positif, il existe un rang N_0 tel que

$$\forall N \geq N_0, \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq A + 1.$$

Toute fonction polynomiale est continue, donc

$$\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{t^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n} > A.$$

Du fait de l'inégalité **stricte**, il existe un seuil $0 < t_0 < 1$ tel que

$$\forall t \in [t_0, 1[, \quad \sum_{n=1}^{N_0} \frac{t^{n-1}}{n} \geq A.$$

On peut alors déduire de (†) que

$$\forall t \in [t_0, 1[, \quad F'(t) \geq A$$

c'est-à-dire que F' tend vers $+\infty$ au voisinage gauche de 1.

Solution 51

10kh-09

1. La fonction $\tan$ est continue sur le segment $[0, \pi/4]$, donc les intégrales I_n sont toutes bien définies (ce ne sont pas des intégrales généralisées).

• Pour tout $0 \leq x \leq \pi/4$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $0 \leq \tan^n x \leq 1$, donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Par conséquent, la série $\sum I_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in [0, 1[$ et le rayon de convergence est au moins égal à 1.

• Les fonctions $a_n = [t \mapsto \tan^n t]$ sont continues et positives sur $[0, \pi/4[$ et la série de fonctions $\sum a_n$ converge simplement sur cet intervalle vers une fonction continue :

$$\forall 0 \leq t < \frac{\pi}{4}, \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tan^n t = \frac{1}{1 - \tan t}.$$

Par conséquent, la fonction S est intégrable sur $[0, \pi/4[$ si, et seulement si, la série numérique $\sum I_n$ est convergente. Comme la fonction $\tan$ est dérivable en $t = \pi/4$ et que sa dérivée en ce point est égale à 2,

$$\lim_{t \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan t}{(\pi/4) - t} = 2$$

donc

$$S(t) \underset{t \rightarrow \pi/4}{\sim} \frac{2}{(\pi/4) - t}$$

ce qui prouve que S n'est pas intégrable au voisinage de $\pi/4$ et donc que la série $\sum I_n$ est divergente.

• On aurait pu raisonner de manière plus élémentaire et plus rapide pour justifier la divergence de cette série : le changement de variable $u = \tan t$ nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du \geq \int_0^1 \frac{u^n}{1+1^2} du = \frac{1}{2(n+1)}. \quad (*)$$

Je n'ai pas voulu manquer une occasion d'appliquer le Théorème de convergence croissante...

En particulier, le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$ est inférieur à 1.

On a démontré (par double inégalité) que le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$ est égal à 1.

2. Pour $x = 1$, on a déjà prouvé que la série $\sum I_n$ était divergente.

• Considérons $x = -1$. La série $\sum (-1)^n I_n$ est alternée. De plus, son terme général tend vers 0 par convergence dominée :

- pour tout $0 \leq t < \pi/4$, on a $0 \leq \tan t < 1$, donc $\tan^n t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;
- la convergence est dominée puisque

$$\forall 0 \leq t < \frac{\pi}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \tan^n t \leq 1$$

et que la fonction constante $t \mapsto 1$ est intégrable sur le segment $[0, \pi/4]$.

• Une fois encore, on aurait pu se passer du Théorème de convergence dominée grâce à l'encadrement (*).

Enfin, comme $0 \leq \tan t \leq 1$ sur $[0, \pi/4]$, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \tan^{n+1} t \leq \tan^n t \quad \text{donc} \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n I_n$ est donc convergente.

3. Soit $x \in]-1, 1[$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie par

$$\forall t \in [0, \pi/4], \quad f_n(t) = x^n \tan^n t.$$

Il est clair que f_n est continue sur le segment $[0, \pi/4]$ (et en particulier intégrable sur cet intervalle). De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad |f_n(t)| \leq |x|^n.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t et comme $|x| < 1$, la série (géométrique!) $\sum |x|^n$ est absolument convergente. Cela prouve que la série de fonctions continues $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, \pi/4]$ et nous permet d'intégrer terme à terme.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} x^n \tan^n t \, dt = \int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{+\infty} (x \tan t)^n \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x \tan t}.$$

✚ Pour calculer cette intégrale, on commence par changer de variable ($u = \tan t$) et on décompose en éléments simples la fraction obtenue.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x \tan t} &= \int_0^1 \frac{du}{(1 - xu)(1 + u^2)} = \frac{1}{1 + x^2} \int_0^1 \frac{x^2}{1 - xu} + \frac{1 + xu}{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \int_0^1 (-x) \cdot \frac{-x}{1 - xu} + \frac{1}{1 + u^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{2u}{1 + u^2} du \end{aligned}$$

Le calcul des primitives ne pose alors aucune difficulté particulière et on peut alors conclure.

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x \tan t} = \frac{1}{1 + x^2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \cdot \ln 2 - x \ln(1 - x) \right)$$

Solution 52

10kh-10

1. La suite de terme général $\ln(1 + 1/n)$ tend clairement vers 0 en décroissant. On déduit alors du Critère spécial des séries alternées que la série $\sum a_n$ est convergente.

✚ En dépit des apparences, la série $\sum a_n$ n'est pas une série télescopique!
En travaillant sur les sommes partielles, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \ln \frac{2p+1}{2p} = \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \ln \frac{3 \cdots (2N-1)}{2 \cdots (2N)} + \ln(2N+1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \ln \frac{(2N)!}{4^N (N!)^2} + \ln(2N+1)$$

et on déduit de la formule de Stirling que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln \frac{2}{\pi}.$$

2. Il est clair que $a_n \sim (-1)^n/n$ et donc que le rayon de convergence est égal à 1.

✚ Comme d'habitude, on peut invoquer la règle de D'Alembert (le rapport $|a_{n+1}|/|a_n|$ tend vers 1) ou plus directement remarquer que la série $\sum a_n 1^n$ est convergente alors que la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement pour tout $x > 1$.

✚ Comme la série $\sum a_n$ est convergente, on déduit du Théorème d'Abel que la série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et en particulier que la somme de la série entière est continue à gauche en 1.

✚ En règle générale, la somme est continue sur $]-R, R[=]-1, 1[$. En l'occurrence, la somme est donc continue sur $] -1, 1[$.
La somme ne peut être continue à droite en -1 puisque la série $\sum (-1)^n a_n$ est divergente.

✚ Il n'est pas nécessaire d'appliquer ici le Théorème d'Abel. En effet, comme la série $\sum a_n$ vérifie les hypothèses du Critère spécial des séries alternées, la série $\sum a_n x^n$ vérifie aussi les hypothèses du Critère spécial pour tout $x \in [0, 1]$. On en déduit une majoration du reste :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq |a_{n+1} x^{n+1}| \leq |a_{n+1}|$$

et on constate que ce majorant est indépendant de $x \in [0, 1]$ et de limite nulle, ce qui prouve que la série de fonctions converge uniformément sur $[0, 1]$.

Solution 53**10kh-11**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. D'après le cours,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

✱ On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad \ln[n^{\alpha+1}|a_n|] = (\alpha+1) \ln n + \sum_{k=1}^n \ln \left| 1 - \frac{\alpha+1}{k} \right|.$$

Or

$$\ln \left| 1 - \frac{\alpha+1}{k} \right| = \frac{-(\alpha+1)}{k} + w_k \quad \text{avec} \quad w_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Comme la série $\sum w_k$ est (absolument) convergente, il existe un réel C tel que

$$\sum_{k=1}^n w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} C + o(1).$$

✎ Pour toute série convergente, la somme de la série est la somme de la somme partielle d'ordre n et du reste d'ordre n . Ce réel C est donc la somme de la série $\sum w_k$ et le terme en $o(1)$ est l'opposé du reste d'ordre n .

Par ailleurs, on sait qu'il existe un réel γ (la **constante d'Euler**) tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

Donc

$$\ln[n^{\alpha+1}|a_n|] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (\alpha+1) \ln n - (\alpha+1)(\ln n + \gamma + o(1)) + (C + o(1)).$$

On en déduit que la suite de terme général $n^{\alpha+1}|a_n|$ tend vers une limite $c > 0$, c'est-à-dire que

$$|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n^{\alpha+1}}.$$

✎ Le réel c est "égal" à $\exp[(\alpha+1)\gamma + C]$ et donc strictement positif.

✎ On peut remarquer que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\alpha - n|}{n+1} = \frac{n - \alpha}{n+1}$$

pour tout n assez grand et donc que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha+1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Nous avons donc démontré un cas particulier du Théorème de Raabe-Duhamel.

2. D'après l'équivalent trouvé, si $\alpha > 0$, la série $\sum a_n$ est absolument convergente et donc convergente. Le théorème d'Abel radial nous assure alors que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f_\alpha(1) = 2^\alpha.$$

✱ De même, si $\alpha \leq -1$, la série $\sum a_n$ est grossièrement divergente.

✱ Enfin, si $-1 < \alpha \leq 0$, alors a_n est un produit de n facteurs strictement négatifs, donc

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = (-1)^n |a_n|$$

et la série $\sum a_n$ est alternée. L'équivalent trouvé plus haut nous assure que, dans ce cas, a_n tend vers 0 et comme

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n - \alpha}{n+1} < 1$$

(puisque $\alpha > -1$), la suite de terme général $|a_n|$ est strictement décroissante.

Le Critère spécial des séries alternées prouve alors que la série $\sum a_n$ est convergente et, comme plus haut, le théorème d'Abel radial prouve que la somme de la série est égale à 2^α .

Solution 54**10kh-12**

1. Comme la série $\sum a_n$ converge, on déduit du Théorème d'Abel radial que la série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

✎ Il est utile de connaître la démonstration du Théorème d'Abel, elle est riche d'enseignements. Cf 10-05.

En particulier, la somme de la série entière est continue sur $[0, 1]$ et tend donc vers une limite à gauche finie en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

2. La réciproque est fautive, il suffit de bien connaître les séries entières de référence pour s'en rendre compte : avec $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{et en particulier} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

alors que la série $\sum a_n$ est grossièrement divergente.

Solution 55**10kh-13**

1. L'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ et $a_0 > 0$, donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Par concavité de $\ln$, on a $0 < a_{n+1} = \ln(1+a_n) \leq a_n$, donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (décroissante et positive) et sa limite ℓ est positive.

Par continuité de $\ln$, la limite ℓ vérifie $\ell = \ln(1+\ell)$, donc $\ell = 0$.

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à 1.

✎ Pour trouver la valeur exacte du rayon de convergence, il faut maintenant minorer la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour cela, nous allons calculer un équivalent par une méthode classique.

♣ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme a_n tend vers 0,

$$a_{n+1}^\alpha = [\ln(1+a_n)]^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left[a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2) \right]^\alpha = a_n^\alpha - \frac{\alpha}{2} a_n^{\alpha+1} + o(a_n^{\alpha+1}).$$

Avec $\alpha = -1$, on trouve que $a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}$ tend vers $1/2$ (= une limite finie non nulle). La série $\sum 1/2$ est une série divergente de terme général positif et

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

donc (somme des relations de comparaison, cas divergent)

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Comme a_0 est une constante, on en déduit un équivalent de $1/a_n$ et donc que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

♣ Par conséquent, la série $\sum a_n$ est divergente (comparaison par équivalence de séries de terme général positif), ce qui prouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est inférieur à 1.

♣ Par double inégalité, le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est égal à 1.

2. Pour $x = 1$, on a déjà démontré que la série $\sum a_n x^n = \sum a_n$ était divergente.

♣ Pour $x = -1$, la série $\sum a_n x^n = \sum (-1)^n a_n$ est une série alternée et on a déjà démontré que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendait vers 0 en décroissant. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

✎ La somme de la série entière est donc continue sur $] -1, 1[$ (= l'intervalle ouvert de convergence) et continue au point 1 (théorème d'Abel radial ou convergence uniforme sur $[-1, 0]$ avec le Critère spécial des séries alternées), donc en fait continue sur $[-1, 1]$.

3. On a démontré que $a_n \sim 2/n$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \delta_n \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} a_n - \frac{2}{n} = \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

• Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un entier $N_0 \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad |\varepsilon_n| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f(x) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{2}{n} \right) x^n = P_0(x) + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \delta_n x^n \quad \text{où} \quad P_0(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N_0} \delta_n x^n.$$

Comme P_0 est une fonction polynomiale, elle est continue sur le segment $[0, 1]$ et reste donc bornée au voisinage gauche de $x = 1$.

La série $\sum \delta_n x^n$, en tant que différence de deux séries entières dont le rayon de convergence est égal à 1, est absolument convergente pour tout $0 \leq x < 1$. Par inégalité triangulaire et par positivité de x ,

$$\left| \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \delta_n x^n \right| \leq \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |\delta_n| x^n \leq \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n} x^n \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad |f(x) + 2 \ln(1-x)| \leq -\varepsilon \ln(1-x) + |P_0(x)|.$$

Comme $\ln(1-x)$ tend vers l'infini et que P_0 est bornée au voisinage de 1, il existe un réel $0 < \alpha < 1$ (qui dépend de ε) tel que

$$\forall \alpha \leq x < 1, \quad -\varepsilon \ln(1-x) + |P_0(x)| \leq -2\varepsilon \ln(1-x).$$

On a ainsi démontré que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} -2 \ln(1-x) + o(\ln(1-x)) \sim -2 \ln(1-x).$$

Solution 56

10kh-14

1. Comme u_n tend vers 0, alors $u_n t^n = o(t^n)$ et par conséquent le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n t^n$ est supérieur à 1.

La somme de cette série entière est donc définie (au moins) sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad |u_n| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $t \in [0, 1[$,

$$(1-t)f(t) = P_0(t) + (1-t) \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} u_n t^n \quad \text{avec} \quad P_0(t) = (1-t) \sum_{n=0}^{N_0} u_n t^n.$$

Comme la série $\sum u_n t^n$ est absolument convergente, on déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \left| (1-t) \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} u_n t^n \right| \leq (1-t) \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |u_n| t^n \leq (1-t) \varepsilon \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} t^n \leq (1-t) \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \varepsilon. \quad (\dagger)$$

Par ailleurs, la fonction P_0 est une fonction polynomiale (donc continue) qui s'annule en $t = 0$, donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_0(t) = 0$$

et il existe donc un réel $0 \leq t_0 < 1$ tel que

$$\forall t_0 \leq t < 1, \quad |P_0(t)| \leq \varepsilon. \quad (\ddagger)$$

On déduit alors de $(\dagger)$ et de $(\ddagger)$ que

$$\forall t_0 \leq t < 1, \quad |(1-t)f(t)| \leq 2\varepsilon.$$

• On a ainsi démontré que

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1-t)f(t) = 0.$$

Solution 57**10Kh-51**

1. Comme la série harmonique est une série divergente de terme général positif et que

$$\frac{1}{2k+1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k},$$

la série $\sum \frac{1}{2k+1}$ est une série divergente et (Théorème de sommation des relations de comparaison)

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On en déduit donc que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \ln n}{2n}.$$

Par conséquent,

- si $0 < x < 1$, la suite de terme général $a_n x^n$ tend vers 0 (produit de deux suites de limite nulle);
- si $x > 1$, la suite de terme général $|a_n| x^n$ tend vers $+\infty$ (par croissances comparées de la suite géométrique (x^n) , qui tend vers $+\infty$, et de la suite $(1/n)$, qui tend vers 0).

On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1.

🔗 Comme on sait calculer un équivalent simple de a_n , on pourrait aussi appliquer la règle de d'Alembert pour calculer R , mais ce ne serait pas une très bonne idée — en tout cas, ce ne serait pas plus simple que ce qu'on vient d'exposer.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_n = (n+1)a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

si bien que

$$\forall 0 < x < 1, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x} g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Il est clair que $g(0) = 0$.

🔗 Il faut ici reconnaître une série primitivée terme à terme.

D'après la question précédente, le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est égal à 1 et donc en particulier strictement positif.

Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières nous assure donc que le rayon de convergence de la série dérivée $\sum b_n x^n$ est aussi égal à 1 et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n dt.$$

🔗 Ce n'est pas parce que $g(0)$ est nul qu'on peut se permettre de l'oublier !

🔗 Nous allons maintenant expliciter la somme $g'(t)$ au moyen d'un produit de Cauchy.

🔗 Seule la formule du produit de Cauchy permet d'expliquer la présence d'une somme dans l'expression des coefficients a_n !

Les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \frac{(-1)^k}{2k+1} t^k \quad \text{et} \quad \sum (-1)^k t^k$$

sont tous les deux égaux à 1.

🔗 Les coefficients de ces deux séries étant très simples, on doit arriver à cette conclusion sans hésiter.

Par conséquent, le rayon de convergence du produit de Cauchy de ces deux séries entières est au moins égal à 1 et les coefficients du produit de Cauchy sont donnés par la formule du cours :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = b_n.$$

On en déduit que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k \right).$$

• Si la deuxième somme est bien connue :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t},$$

la première somme demande un peu d'astuce.

En se bornant au cas $0 < t < 1$, on peut remarquer que $t^k = (\sqrt{t})^{2k} = \frac{(\sqrt{t})^{2k+1}}{\sqrt{t}}$ et retrouver ainsi une série entière bien connue :

$$\forall 0 < t < 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^k = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} (\sqrt{t})^{2k+1} = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{t}}{\sqrt{t}}.$$

Par conséquent,

$$\forall 0 < t < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{t}}.$$

• On déduit donc de ce qui précède que

$$\forall 0 < x < 1, \quad g(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{t}} dt.$$

• Tiens ! Une division par zéro... Pas de panique ! Ainsi écrite, il s'agit bien d'une intégrale généralisée et nous devrions nous inquiéter toutes affaires cessantes de sa convergence.

Mais c'est inutile : cette expression est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1, donc en dépit des apparences c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$, donc une fonction continue sur le segment $[0, x] \subset] -1, 1[$ et donc une fonction intégrable sur $[0, x]$ pour tout $0 < x < 1$.

• Il nous reste à calculer cette intégrale.

Pour tout $0 < x < 1$, l'application $[t \mapsto u = \sqrt{t}]$ réalise une bijection (croissante) de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $]0, x]$ sur l'intervalle $]0, \sqrt{x}]$. On peut donc déduire du Théorème de changement de variable que

$$g(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{t}} dt = \int_0^x \frac{2 \operatorname{Arctan} \sqrt{t}}{1 + (\sqrt{t})^2} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2 \operatorname{Arctan} u}{1 + u^2} du.$$

On reconnaît ici la forme $2vv'$, d'où

$$\forall 0 < x < 1, \quad g(x) = [(\operatorname{Arctan} u)^2]_0^{\sqrt{x}} = (\operatorname{Arctan} \sqrt{x})^2.$$

• Il est temps de conclure :

$$\forall 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{1}{x} g(x) = \frac{(\operatorname{Arctan} \sqrt{x})^2}{x}.$$

On ne doit pas perdre de vue que f est continue en 0 et que $f(0) = a_0 = 1$.

• On pourrait calculer $f(x)$ pour $-1 < x < 0$, mais ce serait plus délicat :

$$\forall -1 < t < 0, \quad \frac{(-1)^k t^k}{2k+1} = \frac{(-t)^k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{-t}} \cdot \frac{(\sqrt{-t})^{2k+1}}{2k+1}$$

puisque $-t > 0$. On doit alors "reconnaître" le développement en série entière de la fonction Argth — qui n'est pas au programme !

On calcule ensuite l'intégrale au moyen du changement de variable (décroissant, c'est plus drôle) $u = \sqrt{-t}$ après avoir remarqué que

$$\forall -1 < t < 0, \quad \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1 - (\sqrt{-t})^2}.$$

Bref, les pièges ne manquent pas...

3. Les calculs précédents nous assurent en particulier du résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow \mathbb{R}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\operatorname{Arctan} \sqrt{x})^2}{x} = \frac{(\operatorname{Arctan} 1)^2}{1} = \frac{\pi^2}{16}.$$

Mais on cherche ici $f(1)$ et non pas la limite à gauche en 1 de f ...

• D'après le Théorème d'Abel, si la série $\sum a_n R^n$ converge, alors la somme de la série est continue sur $[0, R]$ et en particulier continue au point R .

Il suffit donc de justifier la convergence de la série $\sum a_n$ (puisque $R = 1$) pour en déduire que

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi^2}{16}.$$

• Il est clair que la série $\sum a_n$ est alternée et que son terme général tend vers 0.

✎ On a calculé un équivalent de a_n pour commencer.

Il suffit donc de vérifier que la suite de terme général $\alpha_n = |a_n|$ est décroissante pour pouvoir conclure à l'aide du Critère spécial des séries alternées.

✎ Un dernier piège ici, "énorme, immobile" (vous avez la réf ?) : on a obtenu

$$\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2n}$$

et il est clair que l'équivalent obtenu est le terme général d'une suite décroissante.

Cela prouve que la série alternée

$$\sum \frac{(-1)^n \ln n}{2n}$$

est convergente (CSSA), mais cela ne prouve rien sur la série $\sum a_n$.

En effet, la série $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{2n}$ est convergente sans être absolument convergente, donc on ne peut pas appliquer le Théorème de comparaison.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{n+2} \left((n+1)\alpha_n + \frac{1}{2n+3} \right)$$

donc

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \left(1 - \frac{n+1}{n+2} \right) \alpha_n - \frac{1}{(n+2)(2n+3)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \frac{n+1}{2n+3} \right).$$

Il est clair (somme de termes positifs!) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \geq \sum_{k=0}^0 \frac{1}{2k+1} = 1$$

et on vérifie facilement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{2n+3} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

(fonction croissante de $x \in \mathbb{R}_+$). On en déduit que la différence $\alpha_n - \alpha_{n+1}$ est positive pour tout n , donc la série $\sum a_n$ est convergente et $f(1) = \pi^2/16$.

Solution 58

10Kh-52

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n = \frac{(2n)(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1}.$$

✎

— Donc $a_0 = 0$?

— Non.

— Pourtant, pour $n = 0$, il y a un facteur $2n = 0$ dans l'expression de a_0 .

— Non.

— ???

✚ Pour traiter correctement cet exercice, il faut comprendre correctement la définition des coefficients a_n : le numérateur est un produit d'entiers pairs et le dénominateur est un produit d'entiers impairs. Plus précisément, le numérateur fait apparaître les entiers $2k$ pour $1 \leq k \leq n$ et le dénominateur fait apparaître les entiers $(2k+1)$ pour $0 \leq k \leq n$. Le numérateur de a_n est donc un produit de n facteurs et son dénominateur, un produit de $(n+1)$ facteurs.

Pour $n = 0$, il n'y a donc aucun facteur au numérateur et, **par convention**, le produit est égal à 1 (= l'élément neutre pour la multiplication). Donc $a_0 = 1$.

✚ La même convention s'applique pour les sommes : la somme qui ne contient aucun terme est égale à 0 (= l'élément neutre pour l'addition).

Elle s'applique aussi aux boucles **for** : le bloc qui commence par

for k in range(0) :

n'est pas exécuté, car il doit commencer avec $k = 0$ et finir avec $k = -1$ (donc l'ensemble des indices k possibles est vide).

✚ Cette même convention a fait poser $0! = 1$ et il serait plus sage de poser l'exercice avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

puisque

$$a_n = \frac{(2n)(2n)(2n-2)(2n-2) \cdots 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{(2n+1)!} \left(\prod_{k=1}^n 2k \right)^2.$$

Cette réécriture est sujette à caution pour $n = 0$, puisqu'on a fait apparaître le quotient $\frac{2n}{2n}$ et, comme chacun sait, pour $n = 0$, le quotient $\frac{0}{0}$ est NaN (Not a Number). Mais la convention usuelle s'applique : pour $n = 0$, on a intercalé 0 facteur — pas de division par zéro, de ce fait !

Il est clair que

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}.$$

Par conséquent, pour tout $r > 0$,

$$\frac{a_n r^n}{a_{n-1} r^{n-1}} = \frac{2n}{2n+1} \cdot r \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r.$$

D'après la règle de d'Alembert,

- si $0 < r < 1$, alors la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente (en particulier, le terme général tend vers 0);
- si $r > 1$, alors la série $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente (et même *très* grossièrement divergente, puisque le terme général n'est pas borné).

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égal à 1.

✚ Dans l'expression de a_n , la présence du facteur $(2n+1)$ au dénominateur incite à considérer la somme

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n+1} = t \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t^2)^n$$

pour mettre en évidence une primitive : $\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

✚ On l'a remarqué plus haut : il y a toujours au moins un facteur au dénominateur de a_n , donc le facteur $(2n+1)$ est bien présent quel que soit n , même pour $n = 0$.

- ✚ Comme $a_n t^{2n+1} = t \cdot a_n (t^2)^n$ et que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1,
 - si $0 \leq t < 1$, alors $x = t^2 < 1$ et la suite $(a_n t^{2n+1})$ est bornée (elle tend même vers 0);
 - si $t > 1$, alors $x = t^2 > 1$ et la suite $(a_n t^{2n+1})$ n'est pas bornée.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^{2n+1}$ est aussi égal à 1.

✚ On en déduit que la somme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ et que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad g'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n t^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) a_n t^{2n}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{4n^2}{2n} \cdot \frac{4^{n-1} [(n-1)!]^2}{(2n-1)!} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{4^{n-1} [(n-1)!]^2}{[2(n-1)+1]!}$$

donc

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot a_{n-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (2n+1)a_n = 2na_{n-1}.$$

Par conséquent,

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad g'(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_{n-1}t^{2n} = 1 + t \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \cdot (2n)t^{2n-1}.$$

On reconnaît ici une dérivée terme à terme.

▮ Quelques calculs pas méchants permettent d'identifier au brouillon une primitive de cette dérivée. Pour une meilleure lisibilité du corrigé, je commence par la formule que j'ai obtenue à la fin de mon brouillon.

• Pour $t \in]-1, 1[$, on pose $h(t) = tg(t)$. La fonction h est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad h'(t) = g(t) + tg'(t).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1, 1[, \quad h(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^{2n} \end{aligned} \quad (\text{changement d'indice } n \leftarrow n-1)$$

et comme on peut dériver terme à terme la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence,

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad h'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n)a_{n-1}t^{2n-1}.$$

▮ On a retrouvé le cofacteur de t dans l'expression de $g'(t)$!

En commençant les calculs ci-dessus par la fin, c'est-à-dire en cherchant une primitive, on aboutit à l'expression de $h(t)$ sans être obligé de recourir à la magie ou à une illumination.

On a donc démontré que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad g'(t) = 1 + th'(t) = 1 + tg(t) + t^2 g'(t).$$

Autrement dit, la fonction g est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad (1-t^2)y'(t) - ty(t) = 1.$$

▮ La définition de $g(t)$ nous indique que $g(0) = 0$, ce qui nous permettra d'exprimer $g(t)$ en résolvant cette équation différentielle.

• Comme

$$\frac{t}{1-t^2} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2t}{1-t^2},$$

la solution générale de l'équation homogène est

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{1-t^2}}.$$

On fait varier la constante pour trouver l'expression de $g(t)$: il existe une fonction γ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad g(t) = \frac{\gamma(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

En reportant dans l'équation différentielle, cette fonction γ vérifie

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad (1-t^2) \frac{\gamma'(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 1$$

donc il existe une constante C telle que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad g(t) = \frac{C + \operatorname{Arcsin} t}{\sqrt{1-t^2}}$$

et comme $g(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad g(t) = \frac{\operatorname{Arcsin} t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

✚ Et enfin, puisque $x = t^2$,

$$\forall 0 < x < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{t} g(t) = \frac{\operatorname{Arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

d'où

$$\forall 0 < x < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\operatorname{Arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Solution 59

rms128-705

La fonction rationnelle définie par

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (ses pôles sont complexes : j et j^2) et $\varphi(t) \sim 1/t^2$ au voisinage de $-\infty$, donc φ est intégrable sur l'intervalle $]-\infty, x]$ pour tout réel x et l'application f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

✚ Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f est en fait la primitive de φ qui tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ (Théorème fondamental).

✚ D'après la relation de Chasles et l'Astuce taupinale,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) &= f(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} \\ &= f(0) + \int_0^x \frac{1-t}{1-t^3} dt = f(0) + \int_0^x (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^{3n} dt. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence des deux séries entières $\sum t^{3n}$ et $\sum t^{3n+1}$ est évidemment égal à 1.

✚ Le terme général est borné pour $|t| \leq 1$ et non borné pour $|t| > 1$.

Une série entière converge normalement sur tout segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence, donc les deux séries convergent normalement sur le segment $[0 \leftrightarrow x] \subset]-1, 1[$. On peut donc intégrer terme à terme et en déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}.$$

✚ Cela prouve que f est développable en série entière et que le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à 1.

On a remarqué plus haut que $f' = \varphi$ et la théorie des séries entières nous assure que le rayon de convergence du développement de f est égal au rayon de convergence du développement de φ . Or la décomposition en éléments simples

$$\forall t \in \mathbb{C} \setminus \{j, j^2\}, \quad \varphi(t) = \frac{a}{j-t} + \frac{\bar{a}}{j^2-t}$$

montre que le rayon de convergence du développement de φ est égal à 1.

✚ Il reste à calculer $f(0)$ en se rappelant d'une formule bien utile :

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{t}{a}.$$

Il suffit donc de remarquer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+t+t^2} = \frac{1}{(t+1/2)^2 + 3/4} = \frac{1}{(t+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

pour en déduire que

$$f(0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (t+1/2) \right) \right]_{-\infty}^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Solution 60**rms130-1401**

1.
2. La fonction x est une solution de l'équation homogène si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall t < 1, \quad x(t) = \lambda \cdot \frac{1}{1-t}.$$

La fonction $x_0 = [t \mapsto K(t)x(t)]$ est une solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\forall t < 1, \quad (1-t) \cdot \left[K'(t) \cdot \frac{1}{1-t} \right] = \frac{1}{1-t}$$

c'est-à-dire

$$\forall t < 1, \quad K(t) = K_0 - \ln(1-t).$$

La fonction x est donc solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe un réel K_0 tel que

$$\forall t < 1, \quad x(t) = \frac{K_0}{1-t} - \frac{\ln(1-t)}{1-t}.$$

Comme $\frac{1}{1-t}$ et $\ln(1-t)$ sont développables en série entière au voisinage de l'origine, alors toute solution de l'équation différentielle est développable en série entière au voisinage de l'origine (par produit et somme).

3. S'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $r > 0$ tels que

$$\forall t \in]-r, r[, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k,$$

alors

$$\forall t \in]-r, r[, \quad x'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} t^k$$

puisque l'on peut dériver terme à terme la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif. L'équation (E) devient alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} t^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

c'est-à-dire (en ajoutant un terme nul dans la seconde somme)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ((k+1) a_{k+1} - (k+1) a_k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k.$$

pour tout $t \in]-r, r[$. Comme $r > 0$, on peut en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)(a_{k+1} - a_k) = 1$$

par identification terme à terme.

Comme toutes les solutions de (E) sont développables en série entière, on en déduit (par télescopage) que x est solution de (E) si, et seulement si, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On retrouve ainsi que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

en notant comme d'habitude les nombres harmoniques :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On vérifie ainsi l'expression générale trouvée précédemment :

$$x(t) = a_0 \cdot \frac{1}{1-t} + (-\ln(1-t)) \cdot \frac{1}{1-t}.$$

On aurait pu aussi bien tirer les coefficients du développement en série entière de $x(t)$ en appliquant le Théorème sur le produit de Cauchy : sachant que

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot t^n \\ -\ln(1-t) &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot t^n \end{aligned}$$

et que $c_0 = 0 \times 1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0 \times 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times 1 = H_n,$$

on a bien

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

Au passage, on a enfin prouvé ainsi que le rayon de convergence était égal à 1 (au moins égal à 1 avec les calculs qui précèdent, pas plus grand que 1 au vu de la somme de la série entière).

Solution 61

rms132-610

Tout d'abord, la série de Poisson $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toute sous-famille d'une famille sommable étant elle-même sommable, on en déduit que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. On sait (cours sur la fonction Γ) que $[x \mapsto x^n e^{-x}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx = 1.$$

Par linéarité de l'intégrale (puisque I est un ensemble fini, il est permis d'invoquer la linéarité!), on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx = \sum_{n \in I} 1 = \#(I).$$

Or $I \subset A$ et le terme général est positif, donc

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \sum_{n \in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq e^{-x} f(x)$$

et par hypothèse, la fonction $[x \mapsto e^{-x} f(x)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

$$\#(I) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx.$$

Le majorant ne dépendant pas de I , on peut en conclure que la partie A est finie.

Par définition, le cardinal d'une partie A est infini si, et seulement si, on peut extraire de A une partie finie de cardinal arbitrairement grand.

2. Puisque A est un ensemble fini d'indices, la fonction f est en fait polynomiale. Par conséquent, l'équivalent proposé est impossible!

Solution 62

rms132-1171

1. Il est clair que f est continue sur I . En posant $x = 1 + h$ (avec $h \in]-1, 0[$),

$$f(x) = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)-1} = \frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Donc f peut être prolongée en une fonction continue sur $]0, 1]$ avec $f(1) = 1$.

2. La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert I .

Elle tend vers une limite finie au voisinage de 1 (comme on vient de le voir) et donc intégrable au voisinage de 1.

Lorsque x tend vers 0, on a $f(x) \sim \ln x$. Comme $\ln x$ est une fonction de référence intégrable au voisinage (droit!) de 0, on en déduit que f est intégrable au voisinage de 0.

Donc f est bien intégrable sur $]0, 1[$.

3. On a déjà posé $h = x - 1$ à la première question : pour $-1 < h < 0$,

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{h^n}{n}$$

donc

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n+1}.$$

4. Le changement de variable affine $x = 1 + h$ nous montre que

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(1+h) dh = \int_{-1}^0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n+1} dh.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in]-1, 0[$, on pose

$$\forall h \in]-1, 0[, \quad u_n(h) = \frac{(-1)^n h^n}{n+1}.$$

Chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $] -1, 0[$; la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $] -1, 0[$ et la somme de cette série est continue sur $]0, 1[$ (on sait la calculer, elle est égale à $f(1-h)$). Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-1}^0 |u_n(h)| dh = \int_0^1 \frac{h^n}{n+1} dh = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et on reconnaît le terme général d'une série convergente. D'après le Théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$ (ce qu'on avait déjà démontré...) et

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{-1}^0 \frac{h^n}{n+1} dh = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution 63

rms132-1173

1. Il est clair que la fonction f définie par

$$\forall 0 < t < 1, \quad f(t) = \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2}$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

On sait que $\ln$ est intégrable au voisinage (droit!) de 0. On sait aussi que $\ln(a-u)$ est intégrable au voisinage (gauche!) de a pour tout $a \in \mathbb{R}$ (changement de variable affine).

• Lorsque t tend vers 0, on a $f(t) \sim -2 \ln t$, donc f est intégrable au voisinage de 0.

• Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{2 \ln(1+t)}{t^2} \cdot \ln t \cdot \ln(1-t) = o(\ln(1-t)),$$

donc f est intégrable au voisinage de 1.

Ainsi, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ et l'intégrale généralisée est (absolument) convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_n = [t \mapsto t^{2n-2} \ln(t^2)]$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$ et dominée par $\ln t$ au voisinage de $t = 0$.

On a en fait $\varphi_1(t) = 2 \ln t$ et $\varphi_n(t) = o(\ln t)$ pour $n \geq 2$.

Par conséquent, l'intégrale généralisée u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, en intégrant par parties,

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt = \left[\ln(t^2) \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{2}{t} \cdot \frac{t^{2n-1}}{2n-1} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 - \frac{2}{2n-1} \int_0^1 t^{2n-2} dt.$$

Par définition des intégrales généralisées convergentes, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^{2n-2} \ln(t^2) dt = \frac{-2}{(2n-1)^2}.$$

3. D'après le développement en série entière de $\ln(1-u)$ au voisinage de 0,

$$\forall t \in]0, 1[, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \quad \text{où} \quad \psi_n(t) = \frac{-t^{2n-2} \ln(t^2)}{n} = \frac{-1}{n} \cdot \varphi_n(t).$$

D'après la question précédente, la série $\sum \psi_n$ est une série de fonctions intégrables sur $]0, 1[$; cette série converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme, la fonction f , est continue sur cet intervalle.

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 |\psi_n(t)| dt = \frac{-1}{n} \int_0^1 \varphi_n(t) dt = \frac{2}{2(2n-1)^2},$$

donc la série $\sum \int_0^1 |\psi_n(t)| dt$ est convergente.

On déduit alors du Théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$ (ce qu'on avait déjà prouvé) et que

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \psi_n(t) dt = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}.$$

Solution 64

rms132-1224

1. La fonction $\left[\theta \mapsto \sin^k \theta \right]$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale I_k est bien définie.

Une intégration par parties montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_{k+2} = (k+1)(I_k - I_{k+2})$$

et on en déduit la relation de récurrence entre I_k et I_{k+2} .

Qui ne connaît pas l'intégration par parties des intégrales de Wallis?

On en déduit (par récurrence) que

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 3 \cdot 1}{2p \cdot (2p-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot I_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Cette transformation aussi est très classique et doit être connue comme si c'était du cours.

2. Le cours nous donne le développement en série entière de $(1+u)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha = -1/2$ en particulier,

$$\begin{aligned} \forall u \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} \cdot (-u)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)(-3) \cdots (-2n+1)}{2 \cdot 2 \cdots 2} \cdot \frac{(-u)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \cdot u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \cdot u^n. \end{aligned}$$

3. Pour $|x| < 1$, on a $0 \leq x^2 \sin^2 \theta \leq x^2 < 1$, donc la fonction

$$\left[\theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} \right]$$

est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, donc l'intégrale $f(x)$ est bien définie.

• La fonction $[u \mapsto (1-u)^{-1/2}]$ est développable en série entière et son rayon de convergence est égal à 1. Pour $\theta \in [0, \pi/2]$, la variable $u = x^2 \sin^2 \theta$ reste dans le segment $[0, x^2] \subset]-1, 1[$, donc

$$\sum \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (x^2 \sin^2 \theta)^n$$

est une série de fonctions continues sur $[0, \pi/2]$ qui converge normalement sur ce segment. Par conséquent, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (x^2 \sin^2 \theta)^n d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n} \sin^{2n} \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot x^{2n}. \end{aligned}$$

✎ Pour la convergence normale en fonction de θ , on cherche un majorant indépendant de θ . Ici, le réel x est fixé (c'est un simple paramètre, ce n'est pas la variable d'intégration), donc on ne cherche pas un majorant indépendant de x . (Heureusement, car on n'en trouverait pas.)

4. La fonction f est clairement paire, donc nous allons travailler au voisinage de 1.

• Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} \right]$$

est croissante sur $[0, 1[$. Par positivité de l'intégrale, la fonction f est aussi croissante sur $[0, 1[$.

Elle admet donc une limite, finie ou infinie, au voisinage de 1.

• D'après la formule de Stirling,

$$\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

ce qui prouve que la série

$$\sum \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2$$

est divergente. Comme il s'agit d'une série de terme général positif, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Fixons $A > 0$ (arbitrairement grand). Il existe donc un rang $N_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{N_A} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq A.$$

✎ Pour une série convergente de terme général positif, la somme majore toutes les sommes partielles.

Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot x^{2n} \geq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{N_A} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot x^{2n}$$

On a justifié que $f(x)$ tendait vers $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ lorsque x tend vers 1 et le second membre, fonction polynomiale de x , est continu en $x = 1$. On peut donc faire tendre x vers 1 et en déduire que

$$\ell \geq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{N_A} \frac{1}{16^n} \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq A.$$

On a ainsi démontré que, pour tout $A > 0$, la limite ℓ est supérieure à A , donc $\ell = +\infty$.

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

✎ Les théorèmes de cours qui justifient un passage à la limite terme à terme ne s'appliquent qu'à des fonctions qui ont des limites finies : aucun d'eux ne peut donc s'appliquer ici.

✎ On peut adapter cette démonstration au cas plus général suivant.

- On suppose que les fonctions u_n sont croissantes et positives sur $[a, b[$;
- que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b[$ vers une somme notée f ;
- que chaque fonction u_n tend vers une limite finie ℓ_n au voisinage de b ;
- et que la série $\sum \ell_n$ est divergente.

Alors la somme f de la série de fonctions tend vers $+\infty$ au voisinage de b .

La démonstration repose sur les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \sup_{a \leq x < b} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n u_k(x) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{a \leq x < b} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow b} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k \end{aligned}$$

Solution 65

rms133-1327

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$$

est continue sur le segment $[0, 1]$, donc a_n est bien défini.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $[t \mapsto 1]$ sur l'intervalle $[0, 1[$ et la convergence est dominée :

$$\forall t \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq f_n(t) \leq 1.$$

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est égale à

$$\int_0^1 1 \, dt = 1.$$

✎ En général, pour calculer un développement asymptotique d'une intégrale, on intègre par parties.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - a_n = \int_0^1 1 - f_n(t) \, dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \, dt = \int_0^1 t \cdot \frac{t^{n-1}}{1+t^n} \, dt.$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} 1 - a_n &= \left[t \cdot \frac{\ln(1+t^n)}{n} \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) \, dt \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) \, dt. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, par concavité du logarithme,

$$0 \leq \ln(1+t^n) \leq t^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) \, dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) \, dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et finalement

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On peut être beaucoup plus précis !

Pour $0 \leq t < 1$, on peut développer $\ln(1+t^n)$ en série entière et intégrer terme à terme ce développement sur $[0, 1[$:

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{nk}}{k} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}.$$

On en déduit que

$$n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(1+1/kn)}.$$

On remarque alors que

$$\forall k \geq 1, \quad 0 \leq \frac{1}{kn} \leq \frac{1}{n}$$

et on déduit que

$$n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{(kn)^\ell}.$$

Pour $n \geq 2$ (mais pas pour $n = 1$!), on peut appliquer le Théorème de Fubini :

$$n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2+\ell}} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^\ell = G(1/n)$$

où G est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à 1.

On en déduit que, pour tout $N \geq 2$,

$$a_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \sum_{\ell=2}^N \frac{u_\ell}{n^\ell} + o\left(\frac{1}{n^N}\right) \quad \text{où} \quad u_\ell = (-1)^\ell \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^\ell}.$$

Remarque : pour établir le développement limité, on peut se passer du Théorème de Fubini en se souvenant que

$$\forall 0 \leq u \leq r, \quad \left| \frac{1}{1+u} - \sum_{\ell=0}^N (-1)^\ell u^\ell \right| = \frac{u^{N+1}}{1+u} \leq r^{N+1}.$$

Solution 66

rms134-1497

Il faut d'abord comprendre que la série entière étudiée est la somme de deux séries entières :

$$\sum (2k)x^{2k} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Il est clair que, pour $|x| < 1$, les deux termes généraux sont des suites bornées, donc le rayon de convergence de la somme est au moins égal à 1.

D'autre part, pour $|x| > 1$, la suite de terme général $n^{(-1)^n} x^n$ n'est pas bornée (par croissances comparées d'une suite géométrique divergente et d'une suite de puissances). Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière est inférieur à 1.

En conclusion, le rayon de convergence est égal à 1.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2kx^{2k} = x \sum_{k=1}^{+\infty} 2kx^{2k-1}.$$

(Le terme en $k = 0$ est nul!)

On reconnaît ici la série dérivée de $\sum x^{2k}$. Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad S_1(x) &= x \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k \right) \\ &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \\ &= x \frac{2x}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et on reconnaît cette fois la série primitive de $\sum x^{2k}$. On peut primitiver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence (toujours parce que le rayon de convergence est strictement positif) et comme $S_2(0) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad S_2(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

Solution 67

rms134-1498-1503

1. La fonction $\tan$ est croissante sur $[0, \pi/4]$, donc

$$\forall t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leq \tan t \leq 1. \quad (*)$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leq \tan^n t \leq 1$$

et comme l'intégration conserve les inégalités, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}.$$

• Comme la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on a donc

$$I_n x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x^n)$$

et comme la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in]-1, 1[$, on déduit du théorème de comparaison que la série $\sum I_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < 1$.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est au moins égal à 1.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité,

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 t) \tan^n t dt = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

Il faut reconnaître immédiatement la forme $u' \cdot u^n$!

• D'après (*),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad 0 \leq \tan^{n+1} t = \tan^n t \cdot \tan t \leq \tan^n t$$

et donc, en intégrant,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+2} \leq I_{n+2} + I_n \leq 2I_n$$

et on déduit de la relation précédente que

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)},$$

ce qui prouve que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

• De ce fait, pour $|x| > 1$, la suite de terme général $I_n x^n$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum I_n x^n$ est grossièrement divergente.

Cela prouve que le rayon de convergence est au plus égal à 1 et finalement

$$R = 1.$$

3. Soit $|x| < 1$.

• On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad u_n(t) = x^n \tan^n t.$$

Chaque fonction u_n est continue sur le segment $[0, \pi/4]$ et donc intégrable sur ce segment.

Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], \quad |u_n(t)| \leq x^n.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t et comme $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ est convergente, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0, \pi/4]$.

Par conséquent, la somme de la série de fonctions est continue sur $[0, \pi/4]$ et

$$\int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n.$$

• Puisqu'il s'agit d'une série géométrique de raison $x \tan t$, on connaît sa somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x \tan t}.$$

On change de variable :

$$u = \tan t, \quad \frac{du}{1+u^2} = dt$$

pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)(1-xu)}.$$

Il reste à décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+u^2)(1-xu)} = \frac{a+bu}{1+u^2} + \frac{c}{1-xu}.$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant terme à terme, on trouve

$$c+a=1, \quad b=ax, \quad c=bx=ax^2$$

donc

$$a = \frac{1}{1+x^2}, \quad b = \frac{x}{1+x^2}, \quad c = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{2u}{1+u^2} - x \cdot \frac{-x}{1-xu} du$$

et donc

$$\forall |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \ln 2 - x \ln(1-x) \right).$$

4. Il est clair que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

est convergente (Critère spécial des séries alternées).

On a justifié que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2n+1} = I_{2n+2} + I_{2n}$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n I_{2n} - (-1)^{n+1} I_{2(n+1)}.$$

Comme la suite $(I_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle, la série $\sum (-1)^n I_{2n}$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). Par linéarité, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} I_{2(n+1)} = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Solution 68

rms134-1499

1. Lorsque n tend vers $+\infty$, le quotient $1/\sqrt{n}$ tend vers 0, donc

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x}} x^n \sim \frac{x^n}{n^{1/2}}.$$

Par croissances comparées, le terme général de la série entière

- tend vers 0 pour $|x| \leq 1$;
- tend vers l'infini pour $|x| > 1$.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1 et, d'après le cours,

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1].$$

Pour $x = 1$, l'équivalent calculé plus haut prouve que la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (comparaison avec une série de Riemann divergente).

Pour $x = -1$, la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{x}} x^n$ est alternée, la valeur absolue $\sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ du terme général tend vers 0 en décroissant, donc la série converge d'après le Critère spécial des séries alternées.

⚡ On ne peut pas appliquer le Théorème de comparaison avec une série semi-convergente, mais seulement avec une série absolument convergente.

Dans le cas $x = -1$, l'équivalent prouve seulement que la série n'est pas absolument convergente et il faut étudier le comportement du terme général (et non pas celui de l'équivalent trouvé) pour pouvoir conclure.

En conclusion, $D = [-1, 1[$ et, d'après le Théorème d'Abel, la somme S est continue sur D .

⚡ D'après le cours, la somme d'une série entière est toujours continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Le Théorème d'Abel nous dit que : si $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et si la série $\sum a_n R^n$ converge, alors la convergence est uniforme sur $[0, R]$ et la somme est donc continue sur $[0, R]$.

Pour $x = -1$, on peut donc appliquer le Théorème d'Abel avec

$$a_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad R = 1$$

ou vérifier directement que la série de fonctions converge uniformément sur $[-1, 0]$ en exploitant le Critère spécial des séries alternées (domination du reste d'ordre n) : pour $-1 \leq x \leq 0$, la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ est alternée et la valeur absolue

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} |x|^n$$

du terme général tend vers 0 en décroissant, donc

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [-1, 0], \quad |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

où le majorant est indépendant de x et tend vers 0.

⚡ Comme la série $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série divergente de terme général positif, on peut démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = +\infty,$$

ce qui justifie qu'on cherche un ordre de grandeur de $S(x)$ au voisinage gauche de 1.

- Considérons une série $\sum a_n$ de terme général positif, qu'on suppose divergente.
Pour $A > 0$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N_0} a_n \geq A + 1.$$

Une fonction polynomiale étant continue, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n > A$$

et donc qu'il existe un seuil $0 < x_0 < 1$ tel que

$$\forall x \in [x_0, 1[, \quad \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geq A.$$

Comme les a_n et x sont positifs, on en déduit que

$$\forall x \in [x_0, 1[, \quad S(x) \geq \sum_{n=1}^{N_0} a_n x^n \geq A$$

et on a prouvé que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = +\infty.$$

2. Comme $\sin' = \cos$, on déduit de l'Inégalité des accroissements finis que la fonction $\sin$ est lipschitzienne de constante 1 :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |\sin a - \sin b| \leq |a - b|.$$

Par conséquent, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n \right| &\leq \left| \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}. \end{aligned}$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-1, 1]$ et ce majorant est équivalent à $1/n^{3/2}$, c'est donc le terme général d'une série convergente.

On a ainsi démontré que la série entière convergeait normalement sur le segment $[-1, 1]$.

3. On déduit de la question précédente que la fonction T définie par

$$T(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n$$

est continue sur le segment $[-1, 1]$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} (1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} x^{n+1} \\ &= \sin 1 \cdot x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n \\ &= \sin 1 \cdot x + T(x). \end{aligned}$$

Comme T est continue sur $[-1, 1]$, elle admet en particulier une limite finie, égale à $T(1)$, au voisinage gauche de 1, ce qui prouve que

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)S(x) = \sin 1 + T(1).$$

✎ Il se trouve qu'on peut calculer $T(1)$! En effet, il s'agit de la somme d'une série télescopique :

$$T(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin 1 = -\sin 1.$$

On a donc en fait démontré que

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)S(x) = 0$$

et donc que

$$S(x) \underset{x \nearrow 1}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

On a bien calculé un ordre de grandeur de $S(x)$, mais pas un équivalent !

Solution 69

rms135-962

1. Soit y , une fonction développable en série entière : il existe un réel $r > 0$ et une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Comme $r > 0$, la fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et (indéfiniment) dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in]-r, r[, \quad y'(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}x^k, & 3xy'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} 3ka_kx^k, \\ xy''(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)ka_{k+1}x^k, & x^2y''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_kx^k. \end{aligned}$$

✎ Il faut d'abord effectuer tous les changements d'indice nécessaire pour obtenir des sommes dont le terme général est toujours de la forme $b_k x^k$.

Il faut ensuite penser à ajouter, autant que possible, de termes nuls pour que les index des différentes sommes soient analogues, voire, dans le meilleur des cas, égaux.

Par conséquent, pour tout $x \in]-r, r[$, l'expression $x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x)$ est égale à

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)ka_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)a_kx^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} 3ka_kx^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_kx^k.$$

Après simplification, la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2(a_{k+1} - a_k)x^k = 0.$$

Comme $r > 0$ et que les deux membres de l'égalité sont développables en série entière, on peut identifier les deux sommes terme à terme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = a_k.$$

On a ainsi démontré que toute solution développable en série entière de (E) est proportionnelle à la fonction $[x \mapsto 1/(1-x)]$.

✎ On a raisonné par condition nécessaire en commençant par **supposer** que y était une solution développable en série entière.

Il faut maintenant vérifier que les fonctions trouvées (qui sont les seules possibles) sont effectivement des solutions de (E).

Au lieu de raisonner sur la série entière (ce qui nous obligerait à rester sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$), nous allons calculer sur la somme et donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

♣ Réciproquement, avec

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{on a} \quad f_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad f_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On en déduit facilement que f_1 est solution de (E) sur les deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

✎ L'équation différentielle homogène (E) peut être écrite sous la forme canonique

$$\forall x \in I, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \quad (C)$$

avec

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(x) = \frac{1}{(1-x)x} \begin{pmatrix} 0 & (1-x)x \\ 1 & 3x-1 \end{pmatrix}.$$

L'application A est continue sur les trois intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz sur ces trois intervalles (et sur tout sous-intervalle d'un de ces trois intervalles).

On en déduit que, pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, pour tout instant $x_k \in I_k$ et toute "position initiale" $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ de l'équation canonique (C) sur l'intervalle I_k telle que $Y(x_k) = (y_k, v_k)$.

En remarquant que y est solution de (E) sur I si, et seulement si, Y est solution de (C) sur I , on peut reformuler les conséquences du Théorème de Cauchy-Lipschitz : pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, pour tout instant $x_k \in I_k$ et pour tout couple $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ de l'équation (E) sur l'intervalle I_k telle que

$$y(x_k) = y_k \quad \text{et} \quad y'(x_k) = v_k.$$

Quelle que soit la formulation (canonique ou non), l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et pour l'instant, les solutions que nous avons trouvées sont toutes proportionnelles à f_1 — nous étudions un plan et nous n'en connaissons qu'une droite.

2. La théorie de Cauchy nous assure que l'ensemble des solutions de (E) sur I_1 (resp. sur I_2 , resp. sur I_3) est un plan vectoriel. Nous connaissons un vecteur $f_1 \neq 0$ de ce plan et nous allons chercher un second vecteur de ce plan, non proportionnel au premier, en faisant varier la constante.

✎ Comme c'est le cas la plupart du temps, les calculs de dérivées et de primitives sont les mêmes sur les trois intervalles I_1 , I_2 et I_3 . Nous allons donc rédiger la résolution sur un intervalle I_k indéterminé.

Nous cherchons donc une fonction $a \in \mathcal{C}^2(I_k, \mathbb{R})$ telle que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto a(x)f_1(x) = \frac{a(x)}{1-x} \right]$$

soit une solution de (E) sur I_k . On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall x \in I_k, \quad f_2'(x) &= a'(x) \cdot f_1(x) + a(x) \cdot f_1'(x), \\ f_2''(x) &= a''(x) \cdot f_1(x) + 2a'(x)f_1'(x) + a(x)f_1''(x). \end{aligned}$$

✎ On aura bien sûr pensé à utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée seconde !

✎ On injecte ensuite ces expressions dans (E) en regroupant les termes en facteur de $a(x)$, de $a'(x)$ et de $a''(x)$. On peut se dispenser de calculer le cofacteur de $a(x)$, puisqu'il est nul : par définition, la fonction f_1 est une solution de (E) !

Ainsi,

$$\forall x \in I_k, \quad \left[\frac{a''(x)}{1-x} + \frac{2xa'(x)}{(1-x)^2} \right] + \frac{2a''(x)}{(1-x)^3} = 0$$

ou, plus simplement,

$$\forall x \in I_k, \quad xa''(x) + a'(x) = 0.$$

✎ Il ne s'agit pas vraiment d'une équation du second ordre, mais d'une équation du premier ordre en a' . Il en va toujours ainsi lorsqu'on applique la méthode de variation de la constante.

On en déduit tout d'abord que $a'(x)$ est proportionnelle à $1/x$, puis que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto \frac{\ell n|x|}{1-x} \right]$$

est une solution de (E) sur I_k .

• En conclusion, pour $1 \leq k \leq 3$, une fonction y est solution de (E) sur l'intervalle I_k si, et seulement si, il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$\forall x \in I_k, \quad y(x) = a_k \cdot \frac{1}{1-x} + b_k \cdot \frac{\ln|x|}{1-x}.$$

🔗 Il est clair que la fonction f_2 n'est pas développable en série entière au voisinage de l'origine (limite infinie en $x = 0$!). C'est pourquoi toutes les solutions développables en série entière sont proportionnelles à f_1 .

3. Si y est une solution de (E) autour de $x = 0$, alors il existe des réels a_1, b_1, a_2 et b_2 tels que

$$\forall x < 0, \quad y(x) = \frac{a_1 + b_1 \ln|x|}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2 \ln x}{1-x}.$$

Comme $\ln|x|$ tend vers 0 au voisinage de 0, il faut que $b_1 = b_2 = 0$ pour que y soit bornée au voisinage de 0. Il faut de plus que $a_1 = a_2$ pour que y soit continue en 0.

Réciproquement, on sait déjà que la fonction f_1 est une solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

• Si y est une solution de (E) autour de $x = 1$, alors il existe des réels a_2, b_2, a_3 et b_3 tels que

$$\forall 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2 \ln x}{1-x} \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad y(x) = \frac{a_3 + b_3 \ln x}{1-x}.$$

On sait que $\ln x \sim (x-1)$ pour x voisin de 1, donc

$$y(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{a_k}{1-x} - b_k + o(1).$$

Pour que y soit continue en 1, il faut donc que $a_2 = a_3 = 0$ et que $b_2 = b_3$.

Réciproquement, la fonction f_2 est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I_2 \cup I_3$. En posant $f_2(1) = -1$, on définit un prolongement de f_2 qui est même développable en série entière au voisinage de 1 : comme

$$\forall h \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(1+h)}{-h} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} h^n}{n+1},$$

on a

$$f_2(x) = f_2(1 + (x-1)) \underset{x \rightarrow 1}{=} -1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} + \mathcal{O}((x-1)^3).$$

Cela nous montre que $f_2'(1) = 1/2$ et donc que la fonction f_2 ainsi prolongée vérifie (E) pour $x = 1$ également.

🔗 La formule de Taylor donne le développement en série entière et le développement limité de f_2 : inutile de se fatiguer pour calculer un développement limité si on connaît un développement en série entière !

• Enfin, les discussions précédentes montrent que la seule solution de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ est la fonction nulle.

Solution 70

rms135-1498

1. Par croissances comparées, il est clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} \cdot t^n = 0.$$

Puisque le terme général de la série entière reste borné quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière est infini.

2. Remarquons que $n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) &= t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)t^{n-2}}{n!} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= (t^2 + 2t + 1)e^t = (t+1)^2 e^t. \end{aligned}$$

🔗 Ce n'est pas une astuce, c'est une méthode !

La présence de la factorielle au dénominateur doit nous conduire à interpréter la série entière comme une série de Taylor et donc à penser en termes de dérivée.

Il faut donc raisonner, non pas sur la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$, mais sur la base de Newton

$$(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3), \dots)$$

qui nous a rendu de grands services dans l'étude des séries génératrices.

Il est bon de retenir que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)t^n}{n!} = Q(t)e^t.$$

La réciproque est vraie : quel que soit le polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$, il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t)e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

et (formule du produit de Cauchy)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

donc

$$\forall n \geq d, \quad c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^d a_k \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

Cette formule est encore vraie pour $0 \leq n < d$ (les derniers termes de la somme sont nuls puisqu'un facteur est nul) et on reconnaît ici une expression de la forme $P(n)/n!$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ (donné par sa décomposition dans la base de Newton).

3. a. Par définition, $G_X(1) = 1$, donc $\lambda S(1) = 4\lambda e = 1$. On a donc nécessairement $\lambda = 1/4e$.

3. b. Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda(n^2+n+1)}{n!} \cdot t^n.$$

Par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence est strictement positif), on peut identifier terme à terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{n^2+n+1}{4n!e}.$$

3. c. Puisque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1, la fonction génératrice G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert qui contient le segment $[-1, 1]$ et la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre.

En particulier,

$$\mathbf{E}(X) = G'_X(1) = 8\lambda e = 2$$

puisque $S'(t) = (t^2 + 4t + 3)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

De même,

$$\mathbf{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = 14\lambda e = 7/2$$

puisque $S''(t) = (t^2 + 6t + 7)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 3/2.$$