Composition de Mathématiques

Le 5 novembre 2025 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices et les objets connectés sont interdits.

On considère la fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad w(x) = \exp(-x^2).$$

On sait que cette fonction w est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on admet que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\, dx = \sqrt{\pi}.$$

On note E, l'ensemble des fonctions u continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big[u(x)\big]^2 w(x)\, dx$$

converge. On note F, l'espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note F_n, le sous-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le degré est inférieur ou égal à n.

Après avoir rappelé le Théorème qui justifie cet usage, on pourra appeler *polynômes* les vecteurs de F.

Partie A. Une structure euclidienne

1. Démontrer que E est un espace vectoriel réel qui contient F.

2. Démontrer que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie par

$$\forall\, (f, g) \in E \times E, \qquad \langle\, f \,|\, g \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) w(x)\, dx$$

est un produit scalaire sur E.

L'espace E sera dorénavant muni de la norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire.

On définit $H_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $H_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$$

où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de l'application w définie ci-dessus.

3. Expliciter les expressions de $H_1(x)$ et de $H_2(x)$.

4. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

En déduire l'expression de $H_3(x)$.

5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application H_n est une application polynomiale de degré n. On précisera son coefficient dominant.

6. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

7. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, P \in F, \qquad \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = \langle\, P' \,|\, H_{n-1} \,\rangle.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n et calculer $\|H_n\|$.

8. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une base orthonormée de F telle que $\deg e_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer e_n en fonction de H_n.

9. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme H_n admet n racines réelles distinctes

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}.$$

☞ *On pourra raisonner par l'absurde en se rappelant que le polynôme H_n est orthogonal au sous-espace F_{n-1}.*

Démontrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad H_{n+1}' = 2(n+1)H_n.$$

En déduire que les racines de H_n séparent les racines de H_{n+1} au sens où

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < \cdots < x_{n+1,k} < x_{n,k} < x_{n+1,k+1} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

Partie B. Un endomorphisme auto-adjoint

On considère trois endomorphismes φ, g et h de F définis par

$$\forall\, P \in F, \qquad h(P) = P', \qquad g(P) = 2XP - P', \qquad \varphi(P) = -P'' + 2XP' + P.$$

10. Démontrer que

$$\forall\,(P,Q) \in F \times F, \qquad \big\langle\, \varphi(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle = \langle\, P \,|\, Q \,\rangle + \langle\, P' \,|\, Q' \,\rangle\,.$$

En déduire que

$$\forall\,(P,Q) \in F \times F, \qquad \big\langle\, \varphi(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle = \big\langle\, P \,\big|\, \varphi(Q) \,\big\rangle\,.$$

11. Vérifier que

$$g \circ h = \varphi - I_F, \qquad h \circ g = \varphi + I_F, \qquad \varphi \circ g - g \circ \varphi = 2g.$$

En déduire que : si $\varphi(P) = \lambda P$, alors $\varphi(g(P)) = (\lambda + 2)g(P)$, puis que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(H_n) = (2n+1)H_n.$$

12. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace F_n est stable par φ. Pourquoi l'endomorphisme φ_n de F_n induit par restriction de φ est-il continu ? Démontrer que

$$\forall\, P \in F_n, \qquad \big\|\varphi_n(P)\big\| \leqslant (2n+1)\|P\|.$$

L'application $\varphi : F \to F$ est-elle continue ?
☞ *On rappelle que la topologie de F, en tant que sous-espace vectoriel de E, est définie par la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$.*

13. On considère un produit scalaire Ψ sur F tel que

$$\forall\,(P,Q) \in F \times F, \qquad \Psi\big(\varphi(P), Q\big) = \Psi\big(P, \varphi(Q)\big).$$

Exprimer Ψ en fonction de $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ et des polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C. Formules de quadrature

Lorsque $f \in E$, on cherche à approcher l'intégrale généralisée

$$J(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)w(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,\langle\, f \,|\, 1 \,\rangle$$

*par une **formule de quadrature***

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) \tag{$\star$}$$

*où les **abscisses** $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont des réels deux à deux distincts : $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ et les **poids** $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels non nuls quelconques.*
*Une formule de quadrature Q est dite **exacte à l'ordre** $m \in \mathbb{N}$ si, et seulement si,*

$$\forall\, P \in F_m, \qquad J(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)w(x)\,dx = Q(P).$$

L'objet de cette partie est de mettre en évidence une formule de quadrature optimale liée aux polynômes de Hermite.

14. Dans cette question, les abscisses $x_0 < \cdots < x_n$ sont choisies de manière arbitraire.

Démontrer qu'il existe au plus une famille $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ telle que la formule de quadrature Q définie par $(\star)$ soit exacte à l'ordre n.

En considérant le polynôme $P_n = (X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_n)$, démontrer que cette formule de quadrature Q est au mieux exacte à l'ordre $(2n+1)$.

15. Dans cette question, on suppose que les abscisses $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et les poids $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont choisis de telle sorte que la formule de quadrature Q définie par $(\star)$ soit exacte à l'ordre $(2n+1)$.

En exploitant le fait que le polynôme de Hermite H_{n+1} soit orthogonal au sous-espace F_n, démontrer que les abscisses $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont nécessairement les racines de H_{n+1}.

16. Dans cette question et la suivante, on suppose que les abscisses $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont les racines du polynôme H_{n+1} et que la formule de quadrature Q définie par $(\star)$ est exacte à l'ordre n.

Démontrer que la formule de quadrature Q est en fait exacte à l'ordre $(2n+1)$.
☞ *On pourra considérer la division euclidienne par H_{n+1}.*

17. En considérant les polynômes
$$P_j = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} (X - x_k)^2,$$
démontrer que les poids $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sont strictement positifs.

Partie D. Un calcul de probabilité conditionnelle

> *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.*
> *Si A et B sont deux évènements et si $\mathbf{P}(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B sera notée $\mathbf{P}_B(A)$ ou $\mathbf{P}(A \mid B)$ (au choix).*
> *Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une **variable aléatoire réelle** si, et seulement si, $[X \leqslant x]$ est un évènement pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut en déduire que $[X \in I]$ est un évènement pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*
> *Étant donnés deux nombres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, on note*
> $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_{m,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2}$$
> *et on dit qu'une variable aléatoire réelle X **suit la loi normale de paramètres** (m, σ^2) si, et seulement si,*
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_{m,\sigma^2}(t)\, dt.$$

18. Calculer les intégrales généralisées suivantes.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{m,\sigma^2}(t)\, dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{m,\sigma^2}(t)\, dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2 f_{m,\sigma^2}(t)\, dt$$

19. Pour 5/2 uniquement.
Démontrer que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(X \leqslant x).$$
En déduire que
$$\forall\, a \leqslant b, \qquad \mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f_{m,\sigma^2}(t)\, dt.$$

20. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y, liées par la relation suivante :
$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \frac{X(\omega) - m}{\sqrt{2}\sigma}.$$
Démontrer que X suit la loi normale de paramètres (m, σ^2) si, et seulement si, Y suit la loi normale de paramètres $(0, 1/2)$.

> *Pour tout $y > 0$, on pose*
> $$\Phi(y) = \int_y^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi} \int_y^{+\infty} f_{0,1/2}(t)\, dt.$$

21. Démontrer que
$$\Phi(y) \underset{y \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-y^2}}{2y}.$$

22. On suppose que la variable aléatoire réelle Y suit la loi normale de paramètres $(0, 1/2)$.
Exprimer la probabilité $\mathbf{P}(Y \leqslant y)$ en fonction de $\Phi(y)$. En déduire que
$$\forall\, c > 0, \qquad \lim_{y \to +\infty} \mathbf{P}(Y \leqslant y + c \mid Y > y) = 1.$$

Peut-on établir un résultat analogue pour une variable aléatoire réelle X qui suit la loi normale de paramètres (m, σ^2) ?

Partie E. Approximation hilbertienne

Les polynômes de Hermite apparaissent en Mécanique quantique dans l'étude des modes propres de l'oscillateur harmonique. Ils constituent une base hilbertienne qui permet de décomposer tous les états possibles de l'oscillateur.

23. Soit $f \in E$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\pi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f \mid H_k \rangle}{\|H_k\|^2} \cdot H_k.$$

Démontrer que la série numérique

$$\sum \frac{\langle f \mid H_k \rangle^2}{\|H_k\|^2}$$

est convergente et que

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|\pi_n(f) - f\big\| = 0 \iff \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f \mid H_k \rangle^2}{\|H_k\|^2} = \|f\|^2.$$

*La fin du problème a pour but de démontrer que la suite $(\pi_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour toute fonction $f \in E$ et, par la même occasion, l'**identité de Parseval** :*

$$\forall\, f \in E, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f \mid H_k \rangle^2}{\|H_k\|^2} = \|f\|^2.$$

24. On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\|P_n - f\|$ tend vers 0. Démontrer que $\|\pi_n(f) - f\|$ tend vers 0.

On note $\mathscr{C}_0$, l'espace vectoriel constitué des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$. Cet espace est muni de la norme uniforme définie par

$$\forall\, f \in \mathscr{C}_0, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \big|f(x)\big|.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varepsilon_k = [x \mapsto e^{-kx}]$. Ces fonctions appartiennent toutes à $\mathscr{C}_0$ et on note $\mathcal{E}$, le sous-espace de $\mathscr{C}_0$ engendré par la famille $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
On pose enfin

$$\mathcal{P} = \big\{[x \mapsto P(x)e^{-x}],\ P \in \mathbb{R}[X]\big\}.$$

Il est clair que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_0$.

25. Démontrer que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left| e^{-2x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right| \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad |e^{-2x} - e^{-x}P(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

26. Démontrer par récurrence que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un polynôme P_k tel que

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad |e^{-kx} - e^{-x}P_k(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

☞ *On substituera $^{(k+1)x}/_2$ à x dans la propriété* (1) *et $^x/_2$ à x dans l'hypothèse de récurrence* (2).

27. Démontrer que $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathscr{C}_0$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathscr{C}_0$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
☞ *Pour $f \in \mathscr{C}_0$, on posera $g(0) = 0$ et $g(t) = f(-\ell n\, t)$ pour tout $t \in\,]0, 1]$ et on appliquera le Théorème de Weierstrass : pour toute fonction g continue sur le segment $[0, 1]$, il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,1]} \big|g(t) - P_n(t)\big| = 0.$$

28. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, paire, qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Démontrer que, pour tout $t > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (qui peut dépendre de t et de ε) tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \big|\varphi(x) - P(x)e^{-tx^2}\big| \leqslant \varepsilon.$$

29. Pour 5/2 uniquement.

Soit $f \in E$. Démontrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, qui tendent vers 0 aux voisinages de $\pm\infty$, qui sont nulles sur un voisinage de 0 et telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

30. On sait qu'on peut décomposer chaque fonction f_n en une somme $g_n + h_n$ où g_n est une fonction paire qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et h_n est une fonction impaire qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et qui est nulle sur un voisinage de 0.

Démontrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes dans F telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\| = 0.$$

Solution ❀ Polynômes de Hermite

Partie A. Une structure euclidienne

1. Il est clair que E est contenu dans l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que la fonction nulle appartient à E. Il reste donc à vérifier que E est stable par combinaison linéaire.

> *Pour toute fonction $u \in E$, le produit u^2w est une fonction* positive. *Par conséquent, l'intégrale généralisée de u^2w est convergente si, et seulement si, la fonction u^2w est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Soient u et v dans E, ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $(\lambda u + v)^2 w$ est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \big(\lambda u(x) + v(x)\big)^2 w(x) = \lambda^2 u^2(x)w(x) + v^2(x)w(x) + 2\lambda u(x)v(x)w(x).$$

Par hypothèse, les deux premiers termes sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Donc le troisième terme est dominé par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \big|2u(x)v(x)w(x)\big| \leqslant u^2(x)w(x) + v^2(x)w(x)$$

(avec l'identité remarquable $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$), donc les trois termes sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et par conséquent l'application $(\lambda u + v)^2 w$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On a ainsi démontré que $\lambda u + v \in E$ et donc que E est bien un espace vectoriel réel.

> *Comme $\mathbb{R}$ est un ensemble <u>infini</u>, l'application*
> $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}$$
> *qui associe une application polynomiale à un polynôme est **injective**.*
> *Pour cette raison, on peut identifier* polynôme *et* application polynomiale.
> *C'est aussi pour cette raison qu'on peut parler du* degré *d'une application polynomiale.*

❧ Soit $P \in F$, une application polynomiale. Cette application est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de plus, si $\deg P \leqslant d$, alors

$$P^2(x)w(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^{2d}e^{-x^2}) = o\big(w(x/2)\big) \qquad \text{puisque} \qquad x^{2d}e^{-x^2} = x^{2d}\exp(-3x^2/4)\cdot w(x/2).$$

Comme w est intégrable sur $\mathbb{R}$ (fait admis par l'énoncé), alors $[x \mapsto w(x/2)]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (changement de variable affine) et, par comparaison, la fonction P^2w est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. D'après **[1.]**, l'intégrale généralisée $\langle f \,|\, g \rangle$ est bien définie, quels que soient les vecteurs f et g de E, donc $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que cette application est bilinéaire (linéarité de l'intégrale), symétrique et positive :

$$\forall\, f \in E, \qquad \langle f \,|\, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f^2(x)w(x)}_{\geqslant 0}\, dx \geqslant 0.$$

De plus, si $\langle f \,|\, f \rangle = 0$, alors f^2w est une fonction *continue* et *positive* sur $\mathbb{R}$ dont l'intégrale est nulle. Par conséquent, $f^2(x)w(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et comme $w(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f = 0_E$. Donc la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est définie positive, c'est bien un produit scalaire (sur E).

3. $H_1 = 2X$, $H_2 = 4X^2 - 2$.

4. En dérivant la définition de $H_n(x)$ (formule de Leibniz),

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_n'(x) = (-1)^n\big[2xe^{x^2}\cdot w^{(n)}(x) + e^{x^2}\cdot w^{(n+1)}(x)\big] = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

❧ On en déduit que $H_3 = 2X(4X^2 - 2) - 8X = 8X^3 - 12X$.

5. On constate sur H_0, H_1, H_2 et H_3 que ce sont bien des polynômes et que, pour $n \in [\![0, 3]\!]$, le degré de H_n est égal à n et que son coefficient dominant est égal à 2^n.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 3$, l'application H_n soit polynomiale, que son degré soit égal à n et que son coefficient dominant soit égal à 2^n. La relation de récurrence **[4.]** nous donne $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$: le second membre est clairement polynomial ; le degré de $2XH_n$ est égal à $(n+1)$ et son coefficient dominant est égal à $2.2^n = 2^{n+1}$; le degré de H_n' est inférieur à $(n-1)$. Par conséquent, H_{n+1} est bien un polynôme de degré $(n+1)$ et son coefficient dominant est 2^{n+1}.

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application H_n est polynomiale, que son degré est égal à n et que son coefficient dominant est égal à 2^n.

6. La propriété de parité est évidente sur H_n pour $n \in [\![0, 3]\!]$.

Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 3$ tel que $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, en dérivant, $-H_n'(-x) = (-1)^n H_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et d'après la relation de récurrence **[4.]**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_{n+1}(-x) = 2(-x)H_n(-x) - H_n'(-x) = (-1)^{n+1}.2xH_n(x) - (-1)^{n+1}H_n'(x) = (-1)^{n+1}H_{n+1}(x).$$

On a ainsi démontré que $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

> *On pourrait aller plus vite en rappelant que la fonction w est* paire. *Par conséquent,*
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H_n(-x) = (-1)^n e^{(-x)^2} \cdot w^{(n)}(-x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot (-1)^n w^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)$$
>
> *puisque*
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad w^{(n)}(-x) = (-1)^n w(x).$$
>
> *(Cette dernière propriété se démontre par récurrence : en considérant qu'elle est "bien connue", on évite la récurrence — mais c'est peut-être un peu audacieux.)*

7. La famille $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est échelonnée en degré : $\deg H_k = k$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ **[5.]**, donc c'est bien une base de F_n.

❧ Soit $P \in F$. Par définition du produit scalaire,

$$\sqrt{\pi}\,\langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \cdot (-1)^n w^{(n)}(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\pi}\,\langle\, P' \,|\, H_{n-1} \,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) \cdot (-1)^{n-1} w^{(n-1)}(x)\,dx,$$

ce qui suggère d'intégrer par parties.

Les fonctions P et $(-1)^{n-1}w^{(n-1)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées de w et des applications polynomiales,

$$P(x) \cdot (-1)^{n-1} w^{(n-1)}(x) = P(x)H_{n-1}(x) \cdot w(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0.$$

Par ailleurs, on sait **[1.]** que les produits $P \cdot w^{(n)} = (-1)^n P.H_n.w$ et $P' \cdot w^{(n-1)} = (-1)^{n-1} P'.H_{n-1}.w$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. On déduit donc de la formule d'intégration par parties que

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\,\langle\, P \,|\, H_n \,\rangle &= [0-0] - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) \cdot (-1)^n w^{(n-1)}(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) \cdot (-1)^{n-1} w^{(n-1)}(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,\langle\, P' \,|\, H_{n-1} \,\rangle.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, P \in F, \qquad \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = \langle\, P' \,|\, H_{n-1} \,\rangle.$$

❧ On en déduit par récurrence que

$$\forall\, P \in F,\ \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = \langle\, P^{(k)} \,|\, H_{n-k} \,\rangle.$$

En particulier, comme $\deg H_k = k$ **[5.]**,

$$\forall\, 0 \leqslant k < \ell \leqslant n, \qquad \langle\, H_k \,|\, H_\ell \,\rangle = \langle\, H_k^{(k+1)} \,|\, H_{\ell-(k+1)} \,\rangle = \langle\, 0 \,|\, H_{\ell-(k+1)} \,\rangle = 0,$$

ce qui prouve que la base $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est orthogonale.

> *Le quantificateur $(\forall\, 0 \leqslant k < \ell \leqslant n)$ garantit que l'indice $\ell - (k+1)$ appartient bien à $\mathbb{N}$. (Les polynômes H_k sont définis seulement pour $k \in \mathbb{N}$, pas pour $k \in \mathbb{Z}$.)*

❧ Enfin, d'après le préambule du sujet, $\langle\, 1 \,|\, 1 \,\rangle = \langle\, H_0 \,|\, H_0 \,\rangle = 1$. Comme H_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est égal à 2^n **[5.]**, le polynôme $H_n^{(n)}$ est égal à $2^n n! H_0$ et

$$\|H_n\|^2 = \langle\, H_n \,|\, H_n \,\rangle = \langle\, H_n^{(n)} \,|\, H_{n-n} \,\rangle = 2^n n!\,\langle\, H_0 \,|\, H_0 \,\rangle = 2^n n!.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|H_n\| = \sqrt{2^n n!}.$$

8. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\deg e_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est clair que $(e_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de F_n et on connaît la décomposition de $H_n \in F_n$ dans une telle base :

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} \langle\, e_k \,|\, H_n \,\rangle \cdot e_k.$$

Or **[7.]** H_n est orthogonal aux polynômes $H_0, \ldots, H_{n-1}$, donc

$$H_n \perp \mathrm{Vect}(H_0, \ldots, H_{n-1}) = F_{n-1} = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_{n-1})$$

et par conséquent $H_n = \langle e_n \,|\, H_n \rangle \cdot e_n$. Les vecteurs H_n et e_n sont donc colinéaires et comme e_n est unitaire, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad H_n = \pm\|H_n\| \cdot e_n.$$

❧ **Variante (savante).**
On connaît déjà **[7.]** une base orthogonale du sous-espace F_n : la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. En normalisant ces vecteurs :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \widehat{H_k} = \frac{H_k}{\|H_k\|}$$

on obtient une base orthonormée $(\widehat{H_k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ de F_n.

Soit $P_n \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, la matrice de passage de $(\widehat{H_k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ à $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. En tant que matrice de changement de base orthonormée, cette matrice de passage est une matrice orthogonale.

D'autre part, comme les deux familles $(\widehat{H_k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont échelonnées en degré ($\deg \widehat{H_k} = \deg e_k = k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$), la matrice de passage P_n est également une matrice triangulaire supérieure.

Or une matrice qui est à la fois orthogonale et triangulaire est diagonale, donc

$$P_n = \mathrm{Diag}(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1),$$

c'est-à-dire $e_n = \pm H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

> *Autrement dit, il existe essentiellement une seule base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ qui soit échelonnée en degré : la base orthonormée produite par l'algorithme de Gram-Schmidt quand on l'applique à la base canonique.*

9. Comme le degré du polynôme H_n est égal à n, ce polynôme admet au plus n racines réelles distinctes.

Supposons qu'il admette exactement $r < n$ racines réelles *de multiplicité impaire* : $u_1 < \cdots < u_r$. On peut alors factoriser H_n dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme suivante :

$$H_n = 2^n \prod_{k=1}^{r} (X - u_k)^{2p_k+1} \cdot \prod_{k=r+1}^{r+q} (X - u_k)^{2p_k} \cdot \prod_{k=r+q+1}^{s} (X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^{m_k}$$

où les polynômes $(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)$ sont irréductibles (discriminant strictement négatif).

> *Ce ne serait pas grave pour la suite du raisonnement, mais ça ferait quand même mauvaise impression d'oublier le coefficient dominant dans la factorisation de H_n.*

Il est alors clair que le produit

$$H_n \cdot P_r \qquad \text{avec} \qquad P_r = \prod_{k=1}^{r} (X - u_k)$$

est un polynôme qui ne prend que des valeurs positives (éventuellement nulles) sur $\mathbb{R}$. Comme ce polynôme n'est pas identiquement nul, on en déduit que

$$\langle H_n \,|\, P_r \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \cdot \prod_{k=1}^{r} (x - u_k) \cdot w(x)\, dx > 0.$$

Mais $\deg P_r = r < n$, donc $\langle H_n \,|\, P_r \rangle = 0$ d'après **[7.]** : c'est absurde.

Par conséquent, le polynôme H_n admet au moins n racines réelles distinctes de multiplicité impaire. Comme son degré est égal à n, il admet exactement n racines réelles distinctes.

> *Le degré d'un polynôme scindé est égal à la somme des multiplicités de ses racines. Les racines de H_n sont toutes de multiplicité 1 par conséquent.*

❧ Nous allons démontrer par récurrence que $H'_{n+1} = 2(n+1)H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il est clair **[3.]** que $H'_1 = 2 \cdot 1 \cdot H_0$.
Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $H'_{n+1} = 2(n+1)H_n$.
On sait que $H_{n+2} = 2XH_{n+1} - H'_{n+1}$ d'après **[4.]**, donc $H'_{n+2} = 2H_{n+1} + 2XH'_{n+1} - H''_{n+1}$ en dérivant.
Mais $H'_{n+1} = 2(n+1)H_n$ par hypothèse de récurrence, donc $H''_{n+1} = 2(n+1)H'_n$ en dérivant. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} H'_{n+2} &= 2H_{n+1} + 2X \cdot 2(n+1)H_n - 2(n+1)H'_n = 2H_{n+1} + 2(n+1)H_{n+1} && \text{(d'après \textbf{[4.]})} \\ &= 2(n+2)H_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

> *Il n'est pas raisonnable de présenter cette démonstration par récurrence comme "évidente".*

❧ Soient $a < b$, deux racines consécutives de H_{n+1}. Comme H_{n+1} est un polynôme, on peut appliquer le Théorème de Rolle sur le segment $[a, b]$: il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $H'_{n+1}(c) = 0$.

> *Pour mémoire : la fonction H_{n+1} est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, à valeurs réelles et prend la même valeur en a et en b.*

La relation qu'on vient d'établir nous démontre que ce réel c est une racine de H_n.

Comme H_n (resp. H_{n+1}) possède exactement n (resp. $(n+1)$) racines réelles distinctes, on peut considérer n segments $[x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1}]$ et chacun de ces segments contient exactement une racine de H_n : c'est donc bien $x_{n,k}$ qui se trouve (strictement) entre $x_{n+1,k}$ et $x_{n+1,k+1}$.

Partie B. Un endomorphisme auto-adjoint

10. Soient P et Q, deux polynômes. Par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$\left\langle \varphi(P) \,\middle|\, Q \right\rangle = \langle P \,|\, Q \rangle + \langle -P'' + 2XP' \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, Q \rangle - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \cdot \big[P''(x) - 2xP'(x)\big] w(x)\, dx.$$

> *L'expression fournie par l'énoncé indique assez clairement qu'il faut intégrer par parties.*

On remarque que (cf **[4.]**)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{d}{dx}\big[P'(x)w(x)\big] = \big[P''(x) - 2xP'(x)\big]w(x).$$

Comme on l'a déjà vu **[7.]**, le produit $Q(x) \cdot P'(x)w(x)$ tend vers 0 aussi bien au voisinage de $+\infty$ qu'au voisinage de $-\infty$ et le produit $Q' \cdot P'w$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ **[1.]**, donc

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \cdot \big[P''(x) - 2xP'(x)\big] w(x)\, dx = [0 - 0] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q'(x).P'(x)w(x)\, dx = -\langle P' \,|\, Q' \rangle.$$

On a donc bien démontré que $\langle \varphi(P) \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, Q \rangle + \langle P' \,|\, Q' \rangle$.

❧ En intervertissant les rôles de P et Q et par symétrie du produit scalaire, on en déduit que

$$\langle P \,|\, \varphi(Q) \rangle = \langle \varphi(Q) \,|\, P \rangle = \langle Q \,|\, P \rangle - \langle Q' \,|\, P' \rangle = \langle P \,|\, Q \rangle - \langle P' \,|\, Q' \rangle.$$

On a ainsi démontré que l'endomorphisme φ était auto-adjoint :

$$\forall\, (P, Q) \in F \times F, \qquad \left\langle \varphi(P) \,\middle|\, Q \right\rangle = \left\langle P \,\middle|\, \varphi(Q) \right\rangle.$$

> *Si on s'en tient à la lettre du programme, la notion d'**endomorphisme auto-adjoint** est réservée aux espaces euclidiens, c'est-à-dire à la dimension finie.*
> *En fait, le principal problème lié à la dimension infinie est que l'existence de l'adjoint n'est pas certaine (la version générale du Théorème de Riesz ne permet de représenter que les formes linéaires* continues*).*

11. Il est immédiat de vérifier que $g \circ h = \varphi - I_F$ et que $h \circ g = \varphi + I_F$. On en déduit que

$$\varphi \circ g - g \circ \varphi = (g \circ h + I_F) \circ g - g \circ (h \circ g - I_F) = 2g.$$

❧ Si $\varphi(P) = \lambda P$, on en déduit que

$$\varphi\big(g(P)\big) = (g \circ \varphi + 2g)(P) = g\big(\varphi(P)\big) + 2g(P) = g(\lambda P) + 2g(P) = (\lambda + 2)g(P).$$

❧ Comme $H_0 = 1$, il est clair que $\varphi(H_0) = H_0 = (2 \times 0 + 1) \cdot H_0$.

Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(H_n) = (2n+1)H_n$. D'après **[4.]**, $H_{n+1} = g(H_n)$ et on déduit de ce qui précède que

$$\varphi(H_{n+1}) = \big[(2n+1) + 2\big] \cdot H_{n+1} = \big[2(n+1) + 1\big] \cdot H_{n+1}.$$

On a ainsi démontré par récurrence que $\varphi(H_n) = (2n+1)H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

> *Comme les polynômes de Hermite ne sont pas nuls, on vient en fait de démontrer que chaque polynôme H_n est un vecteur propre de φ, la valeur propre associée à H_n étant égale à $(2n+1)$.*
> *Quand on sait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux, l'orthogonalité des polynômes de Hermite **[7.]** n'est plus une surprise.*

12. Si $\deg P \leqslant n$, alors $\deg P' \leqslant (n-1)$ et $\deg P'' \leqslant (n-2)$, donc le degré de la somme $\varphi(P)$ est bien inférieur à n.

Par conséquent, le sous-espace F_n est bien stable par φ, ce qui prouve l'existence de l'endomorphisme induit par restriction φ_n.

❧ Comme F_n est un espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme de F_n est continu.

❧ On connaît **[7.]** une base orthogonale de F_n. Par conséquent, pour tout polynôme $P \in F_n$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle P \mid H_k \rangle}{\|H_k\|^2} \cdot H_k \quad \text{et par linéarité de } \varphi_n, \quad \varphi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle P \mid H_k \rangle}{\|H_k\|^2} \cdot (2k+1) \cdot H_k.$$

Comme les H_k sont deux à deux orthogonaux, on déduit du Théorème de Pythagore (π) que

$$\left\|\varphi_n(P)\right\|^2 \overset{(\pi)}{=} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(2k+1)^2}_{\leqslant (2n+1)^2} \cdot \underbrace{\frac{\langle P \mid H_k \rangle^2}{\|H_k\|^2}}_{\geqslant 0} \leqslant (2n+1)^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle P \mid H_k \rangle^2}{\|H_k\|^2} \overset{(\pi)}{=} (2n+1)^2 \|P\|^2$$

et donc que

$$\forall\, P \in F_n, \qquad \left\|\varphi_n(P)\right\| \leqslant (2n+1)\|P\|.$$

Cela signifie que $|||\varphi_n||| \leqslant (2n+1)$ et les calculs qui vont suivre nous permettraient de prouver que $|||\varphi_n||| = (2n+1)$.

❧ Si l'endomorphisme φ était continu, alors il existerait une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, P \in F, \qquad \left\|\varphi(P)\right\| \leqslant K\|P\|.$$

En particulier, on aurait donc $\|\varphi(H_n)\| \leqslant K\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors que, d'après ce qui précède,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|\varphi(H_n)\| = (2n+1)\|H_n\|$$

et que $\|H_n\| \neq 0$ (puisque H_n n'est pas le polynôme nul) : c'est contradictoire, donc l'endomorphisme φ n'est pas continu.

13. Comme les polynômes de Hermite sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes et que φ est auto-adjoint pour Ψ, il faut que les polynômes H_n soient deux à deux orthogonaux pour Ψ : en effet, l'égalité

$$\forall\, (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad (2m+1)\Psi(H_m, H_n) = \Psi\big(\varphi(H_m), H_n\big) = \Psi\big(H_m, \varphi(H_n)\big) = (2n+1)\Psi(H_m, H_n)$$

nous donne $2(n-m)\Psi(H_m, H_n) = 0$ et donc $\Psi(H_m, H_n) = 0$ quels que soient $m \neq n$.

❧ Comme $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de F pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ **[7.]**, on peut facilement décomposer chaque polynôme $P \in F$ dans cette base :

$$\forall\, P \in F, \qquad P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle P \mid H_n \rangle}{\|H_n\|^2} \cdot H_n.$$

Bien entendu, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans cette décomposition.

Par bilinéarité du produit scalaire Ψ, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, (P,Q) \in F \times F, \quad \Psi(P,Q) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle P \mid H_m \rangle}{\|H_m\|^2} \cdot \frac{\langle H_n \mid Q \rangle}{\|H_n\|^2} \cdot \Psi(H_m, H_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Psi(H_n, H_n)}{\langle H_n \mid H_n \rangle} \cdot \frac{\langle P \mid H_n \rangle \langle H_n \mid Q \rangle}{\|H_n\|^2}. \qquad \text{(orthogonalité des } H_k \text{ pour } \Psi) \end{aligned}$$

Pour comprendre l'intérêt de cette expression, il faut se rappeler la formule qui donne le produit scalaire dans une base orthogonale :

$$\forall\, (P,Q) \in F \times F, \quad \langle P \mid Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle P \mid H_n \rangle \langle H_n \mid Q \rangle}{\|H_n\|^2}.$$

Le produit scalaire Ψ n'est pas fondamentalement différent du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

D'après le Théorème spectral, pour tout endomorphisme auto-adjoint φ d'un espace euclidien V, il existe une base orthogonale de V constituée de vecteurs propres de φ.
Nous avons ici pris le problème à l'envers : la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Hermite est une base de F constituée de vecteurs propres pour un endomorphisme φ particulier et le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ a été défini de telle sorte que cet endomorphisme φ soit auto-adjoint.

Partie C. Formules de quadrature

14. Comme les abscisses $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont $(n+1)$ réels deux à deux distincts, on peut considérer la base de Lagrange $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de F_n associée à ces abscisses.

Chaque polynôme interpolateur L_k est un polynôme de degré n. Si la formule de quadrature Q est exacte à l'ordre n, alors il faut nécessairement que

$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant n,\qquad J(L_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}L_k(x)w(x)\,dx=Q(L_k)=\sum_{\ell=0}^{n}\lambda_\ell\underbrace{L_k(x_\ell)}_{=\delta_{k,\ell}}=\lambda_k.$$

Cela prouve qu'il existe **au plus une** formule de quadrature exacte à l'ordre n et que cette formule est définie par

$$\forall\, f\in E,\qquad Q(f)=\sum_{k=0}^{n}J(L_k)\cdot f(x_k)$$

où $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée aux réels $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

> *En admettant que tous les λ_k soient distincts de 0, on peut vérifier que cette formule de quadrature est bien exacte à l'ordre n.*
> *Il s'agit pour cela de vérifier que $Q(P)=J(P)$ pour tout polynôme $P\in F_n$.*
> *Il est grand temps de remarquer que $[P\mapsto Q(P)]$ et $[P\mapsto J(P)]$ sont deux* formes linéaires *sur F_n. De plus, ces formes linéaires coïncident sur la base des polynômes de Lagrange, puisque*
>
> $$\forall\, 0\leqslant k\leqslant n,\qquad Q(L_k)=\sum_{\ell=0}^{n}J(L_\ell)\cdot L_k(x_\ell)=J(L_k).$$
>
> *Par conséquent, ces deux formes linéaires sont égales sur l'espace vectoriel F_n tout entier — autrement dit, la formule de quadrature Q est exacte à l'ordre n.*
> *Mais* a priori *rien ne prouve que les λ_k trouvés ci-dessus soient tous différents de 0 !*

> *La dimension de l'espace dual de $\mathbb{R}_n[X]$ est égale à $(n+1)$ (c'est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ lui-même). Il s'agissait donc ici de démontrer que la famille des formes linéaires $[P\mapsto P(x_k)]$ forme, pour $0\leqslant k\leqslant n$, une* base *de cet espace dual.*
> *On a vu en cours que cette famille était la base duale de la famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux abscisses $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, on ne doit donc pas être étonné de voir apparaître ces polynômes.*

❧ Le degré du polynôme P_n^2 est égal à $(2n+2)$ et il est clair que $Q(P_n^2)=0$.

> *Tous les termes de la somme sont nuls !*

Par ailleurs,

$$J(P_n^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_n^2(x)w(x)\,dx>0$$

puisque le produit $P_n^2\cdot w$ est une fonction positive, continue et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Il existe donc un polynôme $P_n^2\in V_{2n+2}$ tel que $J(P_n^2)\neq Q(P_n^2)$. La formule de quadrature Q est donc exacte à l'ordre $(2n+1)$ **au plus**.

15. On sait **[5.]** que le degré de H_{n+1} est égal à $(n+1)$. D'après **[7.]**, les polynômes de Hermite sont deux à deux orthogonaux, le polynôme H_{n+1} est en particulier orthogonal au sous-espace $F_n=\mathrm{Vect}(H_0,H_1,\dots,H_n)$.

Considérons à nouveau la base de Lagrange $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ associée aux abscisses $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$: comme on l'a déjà dit, tous les polynômes L_k appartiennent au sous-espace F_n et par conséquent

$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant n,\qquad J(H_{n+1}L_k)=\sqrt{\pi}\,\langle\, H_{n+1}\,|\,L_k\,\rangle=0.$$

Or $\deg(H_{n+1}L_k)=(n+1)+n=2n+1$ et la formule de quadrature Q est supposée exacte à l'ordre $(2n+1)$, donc

$$\forall\, 0\leqslant k\leqslant n,\quad 0=Q(H_{n+1}L_k)=\sum_{\ell=0}^{n}\lambda_\ell H_{n+1}(x_\ell)\underbrace{L_k(x_\ell)}_{=\delta_{k,\ell}}=\underbrace{\lambda_k}_{\neq 0}H_{n+1}(x_k).$$

Par conséquent, chaque abscisse x_k est une racine de H_{n+1}. Or le polynôme H_{n+1} admet exactement $(n+1)$ racines réelles distinctes **[9.]**, donc les abscisses $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ (qui sont des réels deux à deux distincts) sont bien <u>les</u> racines du polynôme H_{n+1}.

16. D'après **[14.]** et **[15.]**, on considère ici la formule de quadrature Q définie par

$$\forall\, f\in E,\qquad Q(f)=\sum_{k=0}^{n}J(L_k)f(x_k)$$

où les $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont les racines de H_{n+1} et les $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. La division euclidienne de P par H_{n+1} (= un polynôme de degré $(n+1)$) nous donne un quotient $Q_0 \in \mathbb{R}[X]$ et un reste $R_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P = H_{n+1}Q_0 + R_0$.

En particulier, $\deg(H_{n+1}Q_0) = \deg(P - R_0) \leqslant (2n+1)$ puisque $\deg R_0 \leqslant n$ et $\deg P \leqslant (2n+1)$. Donc

$$\deg Q_0 \leqslant (2n+1) - \deg H_{n+1} = n$$

et $Q_0 \in F_n$. Par linéarité de J, on en déduit que

$$J(P) = J(H_{n+1}Q_0) + J(R_0) = \sqrt{\pi}\langle H_{n+1} \mid Q_0 \rangle + J(R_0) = J(R_0)$$

puisque $Q_0 \in F_n$ et que H_{n+1} est orthogonal au sous-espace F_n **[16.]**.

Par ailleurs, comme les x_k sont les racines de H_{n+1},

$$Q(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\big(Q_0(x_k)H_{n+1}(x_k) + R_0(x_k)\big) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k R_0(x_k) = Q(R_0).$$

Or la formule de quadrature est exacte à l'ordre n et $\deg R_0 \leqslant n$, donc $J(R_0) = Q(R_0)$ et par conséquent

$$\forall\, P \in F_{2n+1}, \qquad J(P) = Q(P).$$

La formule de quadrature Q est donc exacte à l'ordre $(2n+1)$.

> *Cette formule de quadrature est donc optimale. Elle n'a qu'un seul défaut : le calcul (précis !) des racines de H_{n+1} n'est pas simple — et <u>tout</u> repose sur ce calcul.*

17. Le degré de chaque polynôme P_j est égal à $2n$ et notre formule de quadrature est exacte à l'ordre $(2n+1)$, donc

$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant n, \qquad J(P_j) = Q(P_j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_j(x_k) = \lambda_j P_j(x_j).$$

Comme P_j est une fonction continue, positive et non identiquement nulle, alors $J(P_j) > 0$. D'autre part, $P_j(x_j)$ est un produit de n réels strictement positifs, donc $P_j(x_j) > 0$. On en déduit que $\lambda_j > 0$.

Partie D. Un calcul de probabilité conditionnelle

18. Pour pouvoir utiliser les polynômes de Hermite, nous allons commencer par effectuer le changement de variable affine $x = (t-m)/(\sqrt{2}\sigma)$ dans ces trois intégrales.

❧ D'après le préambule, $\langle 1 \mid 1 \rangle = \langle H_0 \mid H_0 \rangle = 1$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{m,\sigma^2}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 1.$$

❧ La fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après **[1.]**, donc son intégrale est nulle et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf_{m,\sigma^2}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma x + m)e^{-x^2}\,dx = 0 + m \times 1 = m.$$

❧ Enfin $2X^2 = {}^{H_2}\!/_2 + 1$ d'après **[3.]**, donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2 f_{m,\sigma^2}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2x^2e^{-x^2}\,dx &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{H_2(x)}{2} + H_0(x)\Big)\cdot H_0(x)w(x)\,dx \\ &= \sigma^2\Big[\frac{\langle H_2 \mid H_0 \rangle}{2} + \langle H_0 \mid H_0 \rangle\Big] = \sigma^2\end{aligned}$$

d'après **[7.]** et le préambule à nouveau.

19. Comme X est une variable aléatoire réelle, alors $[X \leqslant x - \frac{1}{n}]$ est un évènement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, comme $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Big[X \leqslant x - \frac{1}{n}\Big] \subset \Big[X \leqslant x - \frac{1}{n+1}\Big],$$

donc on a une suite croissante d'évènements. D'après le Théorème de continuité monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(X \leqslant x - \frac{1}{n}\Big) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big[X \leqslant x - \frac{1}{n}\Big]\Big).$$

Par définition de la densité normale et continuité de l'intégrale en fonction de la borne supérieure,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(X \leqslant x - \frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{x_n} f_{m,\sigma^2}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_{m,\sigma^2}(t)\,dt$$

et comme

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[X \leqslant x - \frac{1}{n}\Big] = [X < x]$$

(par double inclusion), on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_{m,\sigma^2}(t)\,dt = \mathbf{P}(X \leqslant x).$$

> *On vient en fait de démontrer que $\mathbf{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, propriété commune à toutes les variables aléatoires à densité.*

❧ Pour $a \leqslant b$, il est clair que $]-\infty, b] =]-\infty, a[\sqcup [a, b]$. Par conséquent,

$$\mathbf{P}(X \leqslant b) = \mathbf{P}(X < a) + \mathbf{P}(X \in [a, b]),$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbf{P}(X \leqslant b) - \mathbf{P}(X < a) = \int_{-\infty}^{b} f_{m,\sigma^2}(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_{m,\sigma^2}(t)\,dt = \int_{a}^{b} f_{m,\sigma^2}(t)\,dt.$$

20. Comme $[x \mapsto (x - m)/(\sqrt{2}\sigma)]$ est une fonction strictement croissante,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, \omega \in \Omega, \qquad X(\omega) \leqslant x \iff Y(\omega) \leqslant \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}\Big(Y \leqslant \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\Big)$$

et donc, en posant $y = (x - m)/(\sqrt{2}\sigma)$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_{m,\sigma^2}(t)\,dt \iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}\Big(Y \leqslant \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\Big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} w\Big(\frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}\Big)\frac{dt}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$\iff \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(Y \leqslant y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y} w(u)\,du = \int_{-\infty}^{y} f_{0,1/2}(u)\,du.$$

Cette équivalence signifie que X suit la loi normale de paramètres (m, σ^2) si, et seulement si, Y suit la loi normale de paramètres $(0, 1/2)$.

> *Lorsqu'on change de paramètre en posant $y = f(x)$, il faut que f soit injective pour qu'on puisse conserver une équivalence.*
> *Si x parcourt un ensemble I, on peut alors substituer $(\forall\, y \in J)$ à $(\forall\, x \in I)$ et conserver l'équivalence en prenant pour J l'image $f_*(I)$ de I par f.*
> *Ici, l'application f est affine et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc substituer $(\forall\, y \in \mathbb{R})$ à $(\forall\, x \in \mathbb{R})$ et conserver l'équivalence.*

21. On intègre par parties (archi-classique) en remarquant que :

$$\Phi(y) = \frac{-1}{2} \int_{y}^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{t}\,dt.$$

Les fonctions $[t \mapsto e^{-t^2}]$ et $[t \mapsto 1/t]$ sont continues et intégrables sur l'intervalle $[y, +\infty[$ (quel que soit $y > 0$). Il est clair que le produit de ces deux fonctions tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Enfin, on sait que w est intégrable au voisinage de $+\infty$ et il est donc clair que le quotient $w(t)/t^2$ est lui aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.

On a donc

$$\forall\, y > 0, \qquad -2\Phi(y) = \Big[\frac{e^{-t^2}}{t}\Big]_{y}^{+\infty} - \int_{y}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{-t^2}\,dt = -\frac{e^{-y^2}}{y} + \int_{y}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\forall\, y > 0, \qquad \Phi(y) = \frac{e^{-y^2}}{2y} - \frac{1}{2} \int_{y}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt.$$

❧ De plus, pour tout $y > 0$,

$$0 \leqslant \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \int_y^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{t^3}\,dt \leqslant \int_y^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{y^3}\,dt = \frac{e^{-y^2}}{2y^3}.$$

L'intégration par parties nous a donc donné

$$\Phi(y) \underset{y\to+\infty}{=} \frac{e^{-y^2}}{2y} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-y^2}}{y^3}\Big) \sim \frac{e^{-y^2}}{2y}.$$

22. Avec **[18.]** et la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\forall\, y \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{P}(Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{y} f_{0,1/2}(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1/2}(t)\,dt - \int_y^{+\infty} f_{0,1/2}(t)\,dt \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Phi(y)\end{aligned}$$

et donc

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{P}(Y > u) = 1 - \mathbf{P}(Y \leqslant u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Phi(u).$$

❧ Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\mathbf{P}(Y \leqslant y + c \mid Y > y) = \frac{\mathbf{P}\big([Y \leqslant y + c] \cap [Y > y]\big)}{\mathbf{P}(Y > y)} = \frac{\mathbf{P}(y < Y \leqslant y + c)}{\mathbf{P}(Y > y)}.$$

Or $[Y \leqslant y] \sqcup [y < Y \leqslant y + c] = [Y \leqslant y + c]$ pour les mêmes raisons qu'au **[19.]** donc

$$\mathbf{P}(Y \leqslant y + c \mid Y > y) = \frac{\mathbf{P}(Y \leqslant y + c) - \mathbf{P}(Y \leqslant y)}{\mathbf{P}(Y > y)} = \frac{\Phi(y) - \Phi(y + c)}{\Phi(y)} = 1 - \frac{\Phi(y + c)}{\Phi(y)}.$$

L'équivalent trouvé en **[21.]** nous donne alors

$$\forall\, c > 0, \qquad \frac{\Phi(y + c)}{\Phi(y)} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{2y}{2(y + c)} \cdot e^{-(y+c)^2+y^2} \sim e^{-2cy-c^2} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$$

et donc

$$\forall\, c > 0, \qquad \lim_{y\to+\infty} \mathbf{P}(Y \leqslant y + c \mid Y > y) = 1.$$

❧ D'après **[20.]**, si X suit la loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $Y = (X - m)/(\sqrt{2}\sigma)$ suit la loi normale de paramètres $(0, 1/2)$. Or

$$[X > x] = \Big[Y > \frac{x - m}{\sqrt{2}\sigma}\Big] \qquad \text{et} \qquad [x < X \leqslant x + c] = \Big[\frac{x - m}{\sqrt{2}\sigma} < Y \leqslant \frac{x - m}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{c}{\sqrt{2}\sigma}\Big].$$

Comme

$$c' = \frac{c}{\sqrt{2}\sigma} > 0 \qquad \text{et que} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x - m}{\sqrt{2}\sigma} = +\infty,$$

on déduit du calcul précédent que

$$\forall\, c > 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathbf{P}(X \leqslant x + c \mid X > x) = 1$$

pour toute variable aléatoire réelle X suivant la loi normale de paramètres (m, σ^2).

Partie E. Approximation hilbertienne

23. D'après **[7.]**, la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale du sous-espace F_n, donc $\pi_n(f)$ est en fait le projeté orthogonal de $f \in E$ sur F_n. Par conséquent, les vecteurs $\pi_n(f)$ et $f - \pi_n(f)$ sont orthogonaux et

$$\|f\|^2 = \big\|\pi_n(f)\big\|^2 + \big\|f - \pi_n(f)\big\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\, f \,|\, H_n \,\rangle^2}{\|H_k\|^2} + \big\|f - \pi_n(f)\big\|^2$$

en appliquant deux fois le Théorème de Pythagore.

On en déduit dans un premier temps que la série

$$\sum \frac{\langle f \,|\, H_k \rangle^2}{\|H_k\|^2}$$

est convergente (c'est une série de terme général *positif* et ses sommes partielles sont majorées par la constante $\|f\|^2$) et dans un second temps que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f \,|\, H_k \rangle^2}{\|H_k\|^2} = \|f\|^2 \iff \lim_{n\to+\infty} \left\|f - \pi_n(f)\right\|^2 = 0.$$

24. Pour une série de terme général *positif*, la suite des sommes partielles est *croissante*. D'après **[23.]**, la suite de terme général $\|\pi_n(f) - f\|$ est décroissante.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \qquad \|P_n - f\| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons en particulier le polynôme P_{N_0} et notons d, son degré. Le polynôme P_{N_0} appartient donc au sous-espace F_d et (caractérisation du projeté orthogonal)

$$\left\|f - \pi_d(f)\right\| = \min_{Q\in F_d} \|f - Q\| \leqslant \|f - P_{N_0}\| \leqslant \varepsilon.$$

Par monotonie, on a ainsi démontré que

$$\forall\, n \geqslant d, \qquad \left\|f - \pi_n(f)\right\| \leqslant \left\|f - \pi_d(f)\right\| \leqslant \varepsilon$$

et donc que la suite de vecteurs $\big(\pi_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f (pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$).

25. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \qquad \left|e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |(-1)^{n+1} e^{-t}| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

> *On obtiendrait le même encadrement en appliquant le Critère spécial des séries alternées.*
> *Mais ici x parcourt $\mathbb{R}_+$ et il faut que $x^n/n!$ soit décroissante en fonction de n pour pouvoir appliquer le Critère spécial : c'est possible pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ mais seulement à partir d'un rang N_0 qui dépend de x.*
> *Il est donc impossible d'invoquer le Critère spécial des séries alternées pour justifier un encadrement qui soit vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Reprenons : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \qquad \left|e^{-x}\left(e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!}.$$

La fonction $x \mapsto x^{n+1}e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc elle est bornée. Une étude de variation (très simple) montre que la quantité *positive* $x^{n+1}e^{-x}$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$ pour $x = (n+1)$. Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|e^{-2x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n e^{-(n+1)}}{n!}.$$

D'après la formule de Stirling, le majorant est équivalent à $1/\sqrt{2\pi n}$, donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|e^{-2x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right| \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

❧ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite de terme général $1/\sqrt{n}$ tend vers 0, on a démontré que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|e^{-2x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right| = 0.$$

Il existe donc un entier n assez grand pour que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|e^{-2x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \varepsilon$$

et le polynôme défini par

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot X^k \in \mathbb{R}[X]$$

répond alors à la question.

> *Si on regarde ce qui précède avec un œil plus géométrique, on vient de démontrer que : pour tout rayon $r > 0$, il existe un vecteur $u = [x \mapsto e^{-x}P(x)] \in \mathcal{P}$ tel que $\|\varepsilon_2 - u\|_\infty \leqslant r$. Autrement dit : ε_2 appartient à l'adhérence $\overline{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$.*

26. **Initialisation —** Pour $k = 1$, le polynôme $P_1 = 1$ convient !
Pour $k = 2$, on a démontré en **[25.]** que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existait un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, y \geqslant 0, \qquad |e^{-2y} - e^{-y}P(y)| \leqslant \varepsilon.$$

[HR] Supposons qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, y \geqslant 0, \qquad |e^{-ky} - e^{-y}P(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Hérédité — Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\varepsilon/2 > 0$, on déduit de **[25.]** qu'il existe un polynôme $P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, y \geqslant 0, \qquad |e^{-2y} - e^{-y}P_2(y)| \leqslant \varepsilon/2$$

et donc tel que

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad \left|e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1)x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

> *On a suivi l'indication en remarquant que : si $x \geqslant 0$, alors $y = (k+1)x/2 \geqslant 0$.*

La fonction $x \mapsto e^{-x/2}P_2\big((k+1)x/2\big)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc elle est bornée. Il existe donc un réel $M_k > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad \left|e^{-x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big)\right| \leqslant M_k. \tag{4}$$

Comme $\varepsilon/(2M_k) > 0$, on déduit de l'hypothèse de récurrence **[HR]** qu'il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, y \geqslant 0, \qquad \left|e^{-ky} - e^{-y}P_k(y)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M_k}$$

et donc tel que

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad \left|e^{-kx/2} - e^{-x/2}P_k(x/2)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M_k}. \tag{5}$$

> *Ici aussi, on a suivi l'indication en remarquant que : si $x \geqslant 0$, alors $y = x/2 \geqslant 0$.*

Comme P_2 et P_k sont des polynômes, on peut définir un polynôme $P_{k+1} \in \mathbb{R}[X]$ en posant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad P_{k+1}(x) = P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big)P_k\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

Il reste à appliquer massivement l'astuce taupinale : pour tout $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
e^{-(k+1)x} &= e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1)x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big) + e^{-kx/2}e^{-x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big) \\
&= \left[e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1)x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big)\right] \\
&\qquad + e^{-x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big)\cdot\left[e^{-kx/2} - e^{-x/2}P_k\Big(\frac{x}{2}\Big)\right] + e^{-x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big)\cdot e^{-x/2}P_k\Big(\frac{x}{2}\Big)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne (avec l'inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned}
\left|e^{-(k+1)x} - e^{-x}P_{k+1}(x)\right| &\leqslant \left|e^{-(k+1)x} - e^{-(k+1)x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big)\right| + \left|e^{-x/2}P_2\Big(\frac{(k+1)x}{2}\Big)\right|\left|e^{-kx/2} - e^{-x/2}P_k\Big(\frac{x}{2}\Big)\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M_k \cdot \frac{\varepsilon}{2M_k} = \varepsilon. \qquad \text{(avec (3), (4) et (5))}
\end{aligned}$$

Mission accomplie !

Nous avons donc démontré que ε_k appartient à l'adhérence de $\mathcal{P}$ pour tout entier $k \geqslant 1$ (adhérence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$).

27. Soit $f \in \mathscr{C}_0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 0$ et $g(t) = f(-\ell n\, t)$ est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[0,1]$.

D'après le Théorème de Weierstrass, il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction g. En particulier, la suite réelle de terme général $Q_n(0)$ converge vers $g(0) = 0$. On considère alors les polynômes $P_n = Q_n - Q_n(0)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \qquad \begin{aligned} \big|g(t) - P_n(t)\big| &= \big|g(t) - Q_n(t) - g(0) + Q_n(0)\big| \\ &\leqslant \big|g(t) - Q_n(t)\big| + \big|g(0) - Q_n(0)\big| \\ &\leqslant 2 \sup_{s\in[0,1]} \big|g(s) - Q_n(s)\big|. \end{aligned}$$

Le majorant est indépendant de $t \in [0,1]$ et (par hypothèse de convergence uniforme) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers g <u>**et**</u> $P_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc une famille réelle presque nulle $(\alpha_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall\, t \in \,]0,1]\,, \qquad P_n(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{n,k} t^k,$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad P_n(e^{-x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{n,k} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{n,k} \cdot \varepsilon_k(x).$$

La fonction ε_0 n'appartient pas à $\mathcal{E}$, ni à $\mathscr{C}_0$ d'ailleurs ! Imposer $P_n(0) = 0$ était bien une nécessité pour que les sommes commencent à $k = 1$ (et non pas à $k = 0$).

On dispose ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un vecteur

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{n,k} \cdot \varepsilon_k \in \operatorname{Vect}(\varepsilon_k,\ k \in \mathbb{N}^*) = \mathcal{E}$$

tel que

$$\begin{aligned} \|f - u_n\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \big|f(x) - u_n(x)\big| \\ &= \sup_{t\in]0,1]} \big|g(t) - P_n(t)\big| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

*On pourra relire les commentaires du **[20.]** pour se convaincre de l'égalité des deux bornes supérieures via le changement de paramètre $x = -\ell n\, t$.*

On a ainsi démontré que $\mathcal{E}$ était dense dans $\mathscr{C}_0$ pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$: toute fonction $f \in \mathscr{C}_0$ est limite (pour $\|\cdot\|_\infty$) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathcal{E}$.

Dans ce qui suit, toutes les notions topologiques sont relatives à la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ dont est muni l'espace $\mathscr{C}_0$.

❧ Comme $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_0$, son adhérence $\overline{\mathcal{P}}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}_0$.

D'après **[26.]**, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le vecteur ε_k appartient à l'adhérence de $\mathcal{P}$ et comme $\overline{\mathcal{P}}$ est un espace vectoriel, alors

$$\mathcal{E} = \operatorname{Vect}(\varepsilon_k,\ k \in \mathbb{N}^*) \subset \overline{\mathcal{P}}.$$

L'adhérence $\overline{\mathcal{E}}$ est le plus petit fermé qui contienne $\mathcal{E}$, donc $\overline{\mathcal{E}} \subset \overline{\mathcal{P}}$. Or on vient de démontrer que $\overline{\mathcal{E}} = \mathscr{C}_0$, donc $\mathscr{C}_0 \subset \overline{\mathcal{P}}$, ce qui signifie que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathscr{C}_0$.

28. Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, paire, qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et deux réels $\varepsilon > 0$ et $t > 0$ (fixés). La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, y \geqslant 0, \qquad f(y) = \varphi\big(\sqrt{y/t}\big)$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

D'après la question précédente **[27.]**, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}_+, \qquad \big|f(y) - Q(y)e^{-y}\big| \leqslant \varepsilon.$$

L'application $\left[x \mapsto tx^2\right]$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et le changement de paramètre $y = tx^2$ **[20.]** nous donne alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad \left|f(tx^2) - Q(tx^2)e^{-tx^2}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Par construction de f, on a $f(tx^2) = \varphi(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Mais φ est paire (par hypothèse) et $x \mapsto Q(tx^2)e^{-tx^2}$ est paire aussi, donc en fait

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\varphi(x) - Q(tx^2)e^{-tx^2}\right| \leqslant \varepsilon.$$

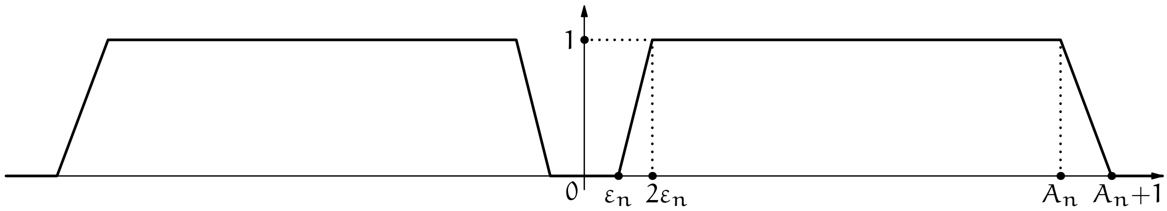
Il reste à constater que la relation $P(x) = Q(tx^2)$ définit bien un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (puisque $Q \in \mathbb{R}[X]$).

> *Le polynôme Q dépend de la fonction f et du réel ε, mais pas du réel t. Le polynôme P dépend de f, de ε et de t.*

29. Considérons deux suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on suppose que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et tend vers 0 ; que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et que $2\varepsilon_n < A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une, et une seule, application continue et paire $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

— $H_n(x) = 0$ sur le segment $[0, \varepsilon_n]$ et sur l'intervalle $[A_n + 1, +\infty[$;
— $H_n(x) = 1$ sur le segment $[2\varepsilon_n, A_n]$;
— H_n soit affine sur les segments $[\varepsilon_n, 2\varepsilon_n]$ et $[A_n, A_n + 1]$.



La fonction $f_n = f \cdot H_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions continues), nulle sur le segment $[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$ qui est un voisinage de 0 (puisque $\varepsilon_n > 0$), tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ (elle est même **à support compact**) et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f_n(x)\right| = H_n(x) \cdot \left|f(x)\right| \leqslant \left|f(x)\right|.$$

Comme $f \in E$, cet encadrement prouve que les fonctions f_n appartiennent à E.

Il est de plus clair que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left|f(x) - f_n(x)\right|^2 w(x) = 0$$

et la convergence est dominée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad 0 \leqslant \left|f(x) - f_n(x)\right|^2 w(x) = \big(1 - H_n(x)\big)^2 \cdot \left|f(x)\right| w(x) \leqslant \left|f(x)\right|^2 w(x).$$

> *Le majorant est indépendant du paramètre $n \in \mathbb{N}$ et comme $f \in E$, ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$ en fonction de x.*
> *Le fait que la limite simple ne soit pas nulle en $x = 0$ est sans aucune importance dans ce contexte : l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est la somme de l'intégrale sur $]-\infty, 0[$ et de l'intégrale sur $]0, +\infty[$ (relation de Chasles).*

Par conséquent,

$$\|f - f_n\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x) - f_n(x)\right|^2 w(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

30. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

❧ On sait que la décomposition (unique !) de f_n en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est donnée par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \frac{f_n(x) + f_n(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(-x)}{2}.$$

Comme f_n est nulle au voisinage de 0, il en va de même de la fonction $f_n^* = [x \mapsto f_n(-x)]$ et donc pour g_n et h_n. De même, comme f_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, il en va de même pour f_n^*, ainsi que pour g_n et h_n.

❧ Choisissons $\varepsilon = 2^{-n} > 0$ (par exemple) et $t = 1/4$ (ce choix sera justifié plus loin).

Rappelons que les fonctions $[x \mapsto e^{-x^2/2}]$ et $[x \mapsto xe^{-x^2/2}]$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

❧ D'après les propriétés de g_n, la fonction

$$\varphi = \left[x \mapsto g_n(x)e^{-tx^2}\right]$$

est continue, paire et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. D'après **[28.]**, il existe un polynôme $G_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left|g_n(x)e^{-tx^2} - G_n(x)e^{-tx^2}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|g_n(x) - G_n(x)\right|^2 w(x)\, dx \leqslant \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2tx^2} e^{-x^2}\, dx = \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$

puisqu'on a choisi $t = 1/4$.

❧ D'après les propriétés de h_n, la fonction

$$\varphi = \left[x \mapsto \frac{h_n(x)}{x}\, e^{-tx^2}\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque h_n est identiquement nulle sur un voisinage de 0 !), paire (quotient de deux fonctions impaires, multiplié par une fonction paire) et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (en fait, son support est compact). D'après **[28.]**, il existe un polynôme $H_{0,n}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{h_n(x)}{x}\, e^{-tx^2} - H_{0,n}(x)e^{-tx^2}\right| \leqslant \varepsilon.$$

> *Il n'y a pas lieu de s'inquiéter d'une division par zéro : la fonction h_n est identiquement nulle sur un voisinage de 0, il en va donc de même pour le quotient $h_n(x)/x$.*

Par conséquent,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left|h_n(x) - xH_{0,n}(x)\right| \leqslant \varepsilon|x|\, e^{tx^2}.$$

En posant $H_n = XH_{0,n} \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|h_n(x) - H_n(x)\right|^2 w(x)\, dx \leqslant \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2\, e^{(2t-1)x^2}\, dx = \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2\, e^{-x^2/2}\, dx$$

(avec toujours $t = 1/4$).

❧ Il existe donc deux constantes C_0 et C_2 et deux polynômes G_n et H_n tels que

$$\|g_n - G_n\| \leqslant 2^{-n} C_0 \qquad \text{et} \qquad \|h_n - H_n\| \leqslant 2^{-n} C_2.$$

> *Les valeurs des constantes*
>
> $$C_0 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx\right]^{1/2} \qquad \textit{et} \qquad C_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2\, e^{-x^2/2}\, dx\right]^{1/2}$$
>
> *sont sans importance, seule compte l'intégrabilité des deux fonctions (cf **[1.]**) et le fait que ces réels ne dépendent d'aucun des objets étudiés par ailleurs (qu'il s'agisse de n, de t, des fonctions g_n et h_n...).*

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, deux polynômes G_n et H_n tels que

$$\begin{aligned} \|f - (G_n + H_n)\| &= \|(f - f_n) + (g_n - G_n) + (h_n - H_n)\| \\ &\leqslant \|f - f_n\| + \|g_n - G_n\| + \|h_n - H_n\| \leqslant \|f - f_n\| + 2^{-n}(C_0 + C_1). \end{aligned}$$

Avec $P_n = G_n + H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes qui converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$.

❧ On peut alors déduire de **[24.]** que

$$\forall\, f \in E, \qquad f = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle\, f \mid H_k\,\rangle}{\|H_k\|^2} \cdot H_k \qquad \text{et que} \qquad \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle\, f \mid H_k\,\rangle^2}{\|H_k\|^2}.$$