
Fonctions hyperboliques réciproques

[1.] Les trois fonctions hyperboliques sh, ch et th sont des fonctions usuelles. Les trois fonctions hyperboliques réciproques Arg sh, Arg ch et Arg th méritent d'être aussi bien connues.

[2.] Rappelons avant tout que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On déduit facilement de ces définitions que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}' x = \text{ch } x, \quad \text{ch}' x = \text{sh } x, \quad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1, \quad \text{th}' x = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}.$$

La fonction Arg sh

[3.] D'après le Théorème de la bijection monotone, la fonction impaire sh réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sa réciproque est également impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Cette bijection réciproque est notée Arg sh (pour *argument sinus hyperbolique*) et vérifie bien sûr :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(\text{Arg sh } x) = \text{Arg sh}(\text{sh } x) = x.$$

Comme ch est à valeurs positives, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(\text{Arg sh } x) = \sqrt{1 + \sin^2(\text{Arg sh } x)} = \sqrt{1 + x^2}.$$

[4.] La formule de dérivation des fonctions réciproques nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arg sh}'(x) = \frac{1}{\text{ch}[\text{Arg sh}(x)]} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

À ce propos, il est important de savoir qu'on peut exprimer Arg sh à l'aide des fonctions usuelles :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh } t = x &\iff (e^t)^2 - 2xe^t - 1 = 0 \\ &\iff e^t = x + \sqrt{1 + x^2} && \text{(l'autre racine est négative)} \\ &\iff t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \end{aligned}$$

et il est bon de retenir (par cœur!) que

$$\text{sur } \mathbb{R}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \equiv \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

[5.] L'expression logarithmique de Arg sh nous donne aussi le développement asymptotique :

$$\text{Arg sh } x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln x + \ln 2 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

qu'il faut rapprocher de l'équivalent $\text{sh } x \sim \frac{e^x}{2}$.

La fonction Arg ch

[6.] La fonction ch est paire. Le Théorème de la bijection monotone assure que cette fonction réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$ et que la bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ seulement (puisque la dérivée de ch est nulle en 0).

On a donc

$$\forall x \geq 1, \quad \text{ch}(\text{Arg ch } x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arg ch}(\text{ch } x) = |x|.$$

Comme Arg ch est à valeurs positives et que sh est à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\forall x \geq 1, \quad \text{sh}(\text{Arg ch } x) = \sqrt{\text{ch}^2(\text{Arg ch } x) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

[7.] La formule de dérivation des fonctions réciproques nous donne cette fois :

$$\forall x > 1, \quad \text{Arg ch}'(x) = \frac{1}{\text{sh}(\text{Arg ch } x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

On peut aussi calculer une expression logarithmique de Arg ch :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1, \quad \text{ch } t = x &\iff (e^t)^2 - 2xe^t + 1 = 0 \\ &\iff e^t = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad (\text{l'autre racine est inférieure à 1}) \\ &\iff t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned}$$

(Remarque technique : le produit des racines du trinôme est égal à 1, donc les racines sont de même signe et comme on a trouvé une racine supérieure à 1, l'autre est nécessairement comprise entre 0 et 1.)

On en déduit un développement asymptotique :

$$\text{Arg ch } x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln x + \ln 2 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et on rappelle au passage que $\text{ch } x \sim \text{sh } x \sim e^x/2$ lorsque x tend vers $+\infty$.

[8.] Il est bon de retenir par cœur que

$$\text{sur } [1, +\infty[, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \equiv \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

La fonction Arg th

[9.] D'après le Théorème de la bijection monotone, la fonction impaire th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ et sa réciproque, notée Arg th, est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arg th}(\text{th } x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in] -1, 1[, \quad \text{th}(\text{Arg th } x) = x.$$

[10.] On déduit de la formule de dérivation des fonctions composées que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \text{Arg th}'(x) = \frac{1}{1 - \tan^2(\text{Arg th } x)} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

[11.] Il y a deux manières d'obtenir une expression logarithmique de Arg th x.

— Soit on décompose sa dérivée en éléments simples :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right)$$

en tenant compte de $\text{Arg th}(0) = 0$;

— soit on résout une équation du premier degré :

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, 1[, \quad \text{th } t = x &\iff \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = x \\ &\iff e^{2t} = \frac{1 + x}{1 - x} \\ &\iff t = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \end{aligned}$$

Quoi qu'il en soit, la relation

$$\text{sur }] -1, 1[, \quad \int \frac{dx}{1 - x^2} \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

est facile à retrouver.