

---

# RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

---

## Index des démonstrations rédigées

### Chapitre 12 — Réduction des endomorphismes

|        |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| [3]    | 09-01 | [63]  | 09-05 | [189] | 09-02 |
| [15]   | 09-13 | [72]  | 09-08 | [199] | 09-05 |
| [17.2] | 09-07 | [84]  | 09-09 |       |       |
| [18]   | 09-07 | [116] | 09-03 |       |       |
| [29.1] | 09-06 | [133] | 09-10 |       |       |

## Applications du cours

## Exercice 1

09-01

1. Quelle que soit la matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , l'application

$$[M \mapsto P^{-1}MP]$$

est un automorphisme de l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2. Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices semblables.

2.a. Quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ , les matrices  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables.

2.b. La matrice  $A$  est inversible si, et seulement si, la matrice  $B$  est inversible et dans ce cas,  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$  sont semblables.

2.c. Pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , les matrices  $Q(A)$  et  $Q(B)$  sont semblables. En particulier,  $Q(A) = 0$  si, et seulement si,  $Q(B) = 0$ .

## Exercice 2

09-02

1. Pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , les matrices

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M(0)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expliciter  $M(a)^n$  pour  $a \neq 0$ .

## Exercice 3

09-03

Soit  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -8 & 1 & 6 \\ -8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $(X+1)^2(X-3)$ . Cette matrice est inversible, mais pas diagonalisable.

2. On pose

$$e_1 = (1, 2, 2), \quad e_2 = \mu \cdot (1, 1, 1), \quad e_3 = (0, 1, 0) + \lambda \cdot e_2.$$

La famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base si, et seulement si,  $\mu \neq 0$ .

3. La matrice  $A$  est trigonalisable et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pour un choix convenable de  $\lambda$  et  $\mu$ .

## Exercice 4

09-05

1. On considère un endomorphisme  $u \in L(E)$  dont les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Si  $v \in$

$L(E)$  commute à  $u$ , alors tout vecteur propre de  $u$  est aussi un vecteur propre de  $v$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice admettant  $n$  valeurs propres positives, deux à deux distinctes.

2.a. S'il existe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = A$ , alors il existe une matrice inversible  $Q$  telle que les matrices  $Q^{-1}AQ$  et  $Q^{-1}MQ$  soient diagonales.

2.b. Il existe une, et une seule, matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  admettant  $n$  valeurs propres positives telle que  $M^2 = A$ .

## Exercice 5

09-06

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et, un endomorphisme nilpotent non nul de  $E$ , d'indice  $d$ .

Il existe un vecteur  $x \in E$  tel que la famille

$$(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x))$$

soit une famille libre. En fait, tout vecteur  $x \notin \text{Ker } u^{d-1}$  convient.

## Exercice 6

09-07

1. Soit  $u \in L(E)$ . Quels que soient les polynômes  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , les sous-espaces  $\text{Ker } P(u)$  et  $\text{Im } P(u)$  sont stables par  $Q(u)$ .

2. Si deux endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent, alors

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad P(u) \circ Q(v) = Q(v) \circ P(u).$$

Si de plus  $v$  est inversible, alors  $u$  et  $v^{-1}$  commutent.

## Exercice 7

09-08

Soient  $E$ , un espace de dimension finie;  $\mathcal{B}$ , une base de  $E$ ;  $f$ , un endomorphisme de  $E$  et  $H$ , un hyperplan de  $E$ .

1. Il existe une forme linéaire non nulle  $u$  dont le noyau est égal à  $H$ :

$$H = [u(x) = 0]$$

et l'hyperplan  $H$  est stable par  $f$  si, et seulement si, la forme linéaire  $u \circ f$  est proportionnelle à  $u$ .

2. L'hyperplan  $H$  est stable par  $f$  si, et seulement si, il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $\text{Im}(f + \lambda I) \subset H$ .

3. Soient  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $L = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ .

- 3.a. Quelles sont les tailles respectives de  $A$  et de  $L$ ?

- 3.b. L'hyperplan  $H$  est stable par  $f$  si, et seulement si,  $L^\top$  est un vecteur propre de  $A^\top$ .

4. En déduire les sous-espaces stables par chacune des matrices suivantes.

- 4.a.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- 4.b.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- 4.c.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 8****09-09**

Si le polynôme caractéristique de  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  est égal à

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

alors le polynôme caractéristique de  $A^{-1}$  est associé à

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + 1.$$

**Exercice 9****09-10**

Démonstration du Théorème de décomposition des noyaux dans le cas général : on considère un polynôme quelconque  $P$  dont on connaît une décomposition en produit de facteurs deux à deux premiers entre eux

$$P = P_1 P_2 \cdots P_r$$

et on considère les endomorphismes définis par

$$p_i = A_i(u) \circ Q_i(u)$$

pour tout  $1 \leq i \leq r$ .

1. Chaque sous-espace  $\text{Ker } P_i(u)$  est contenu dans le noyau de  $p_j$ , quel que soit  $j \neq i$ .

2.

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^r p_i(x).$$

3. Si  $x_i \in \text{Ker } P_i(u)$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ , alors

$$x_i = \left( \sum_{j=1}^r p_j \right)(x_i) = p_i(x_i) = p_i \left( \sum_{j=1}^r x_j \right).$$

**Exercices posés en colle et aux oraux****Exercice 13****CCP19-01**

Démontrer que les matrices suivantes sont semblables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 14****CCP22-01**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  et  $f \in L(E)$ .

Démontrer qu'il existe un endomorphisme  $g \in L(E)$  telle que

$$f \circ g = 0 \quad \text{et} \quad f + g \in GL(E)$$

si, et seulement si,

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

**Exercice 15****IMT24-01**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice telle que

$$A^2 + A + 4I_n = 0_n.$$

1. Démontrer que  $A$  n'a pas de valeur propre réelle.

Les sous-espaces  $\text{Ker } P_i(u)$  sont donc en somme directe.

4. Si  $P = P_1 P_2 \cdots P_r$  est une factorisation en polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i(u).$$

**Exercice 10****09-11**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice telle que

$$A^3 + A - I_n = 0_n.$$

Démontrer que  $\det A > 0$ .

**Exercice 11****09-12**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice telle que

$$A^3 + A^2 + A = 0_n.$$

Démontrer que le rang de  $A$  est pair.

**Exercice 12****09-13**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $\text{rg } B = 1$ , alors

$$\det(A+B)(A-B) \leq (\det A)^2.$$

2. Démontrer que l'entier  $n$  est pair. Calculer le déterminant et la trace de  $A$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 16****IMT24-02**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\text{rg } B = 1$ . Démontrer que

$$\det(A+B) \times \det(A-B) \leq \det(A^2).$$

**Exercice 17****IMT24-03**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in L(E)$ , un endomorphisme nilpotent d'indice  $n = \dim E$ . On considère un vecteur  $x_0 \in E$  tel que

$$u^{n-1}(x_0) \neq 0_E.$$

1. Démontrer que la famille  $\mathcal{F} = (u^k(x_0))_{0 \leq k < n}$  est une base de  $E$ .

2. Pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ , démontrer que

$$\dim \text{Ker } u^k = k.$$

3. Démontrer que  $\text{Ker } u^k$  est le seul sous-espace de  $E$  stable par  $u$  dont la dimension soit égale à  $k$ .

**Exercice 18****IMT24-04**

Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

**Exercice 19****kh09-01**

Soit  $E$ , un espace vectoriel complexe de dimension finie (non nulle). On considère deux endomorphismes  $u$  et  $v$ .

1. On suppose que

$$u \circ v - v \circ u = 0. \quad (1)$$

Démontrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.2. On suppose qu'il existe un complexe  $a$  non nul tel que

$$u \circ v - v \circ u = au. \quad (2)$$

2. a. Démontrer que  $u$  n'est pas inversible.2. b. Calculer  $u^n \circ v - v \circ u^n$  et en déduire que  $u$  est nilpotent.2. c. Démontrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.3. On suppose qu'il existe deux scalaires  $a$  et  $b$  non nuls tels que

$$u \circ v - v \circ u = au + bv. \quad (3)$$

Démontrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.**Exercice 20****kh09-02**Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices carrées de taille  $n$ .

On rappelle que : Si le rang de  $B$  est égal à  $0 \leq r \leq n$ , alors il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $B = P J_r Q$ .

Démontrer que les polynômes caractéristiques de  $AB$  et de  $BA$  sont égaux.**Exercice 21****rms120-877**

Soient  $E$ , un espace vectoriel réel de dimension finie et  $f$ , un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^3 = I_E$ .

1. Démontrer que

$$E = \text{Ker}(f - I_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + I_E)$$

puis que

$$\text{Ker}(f^2 + f + I_E) = \text{Im}(f - I_E).$$

2. Démontrer que  $\text{Im}(f - I_E)$  peut être décomposé en somme directe de plans stables par  $f$ .**Exercice 22****rms120-978**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie et  $f$ , un endomorphisme de  $E$  tel que

$$f + f^4 = 0.$$

Démontrer que

$$\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E.$$

**Exercice 23****rms120-982**

On note  $D_n(\mathbb{C})$ , le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

1. On suppose que la matrice  $A \in D_n(\mathbb{C})$  possède  $n$  coefficients diagonaux distincts. Démontrer que la famille

$$\mathcal{F} = (I_n, A, \dots, A^{n-1})$$

est une base de  $D_n(\mathbb{C})$ .2. L'ensemble des matrices diagonalisables est-il un sous-espace de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ?**Exercice 24****rms120-983**Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A^2 = 2A + 8I_n.$$

1. La matrice  $A$  est-elle inversible? diagonalisable?2. Déterminer les matrices  $M \in \text{Vect}(I_n, A)$  telles que

$$M^2 = 2M + 8I_n.$$

**Exercice 25****rms120-985**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f$ , un endomorphisme de  $E$  tel que

$$f \circ f = -I_E.$$

Démontrer que  $n$  est pair.**Exercice 26****rms120-986**Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A^3 = A + I_n.$$

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .2. Démontrer que  $\det A > 0$ .**Exercice 27****rms120-987**

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice ayant  $n$  valeurs propres distinctes. Démontrer qu'il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et des matrices  $M_1, \dots, M_n$  telles que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad M_k \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$$

telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \sum_{k=1}^n \alpha_k^p M_k.$$

**Exercice 28****rms120-988**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.2. Démontrer qu'il existe une matrice  $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$M^5 + M^3 + M = A.$$

**Exercice 29****rms128-646**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  
 $\det A = \det B = \det(A + B) = \det(A - B) = 0$ .

Démontrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \det(xA + yB) = 0.$$

**Exercice 30****rms128-647**

Pour tout entier  $k \geq 2$ , on définit l'application  $f_k$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{x^k}{k!}.$$

Pour tout entier  $n \geq 2$  et tout réel  $x$ , on pose

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_0(x) & 0 & \cdots & 0 \\ f_2(x) & & & & \\ \vdots & & & & \\ f_{n-1}(x) & & & & \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) & \cdots & f_2(x) & f_1(x) \end{vmatrix}$$

Démontrer que  $D_n$  est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire une expression simple de  $D_n(x)$ .

**Exercice 31****rms128-659**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On étudie ici l'ensemble

$$E_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AMA = 0_n\}.$$

1. On suppose pour commencer que la matrice  $A$  est diagonalisable et que son rang est égal à  $r$ . Déterminer la dimension de  $E_A$ .
2. Même question dans le cas général.

**Exercice 32****rms128-663**

1. Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n$ ;  $u$  et  $v$ , des endomorphismes de  $E$ .

On suppose que  $u$  possède  $n$  valeurs propres distinctes et que  $u$  et  $v$  commutent :

$$u \circ v = v \circ u.$$

Que peut-on en conclure sur  $v$ ?

2. Soit  $E$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les fonctions  $\cos$  et  $\sin$ .
- 2.a. Soit  $d \in L(E)$ , l'endomorphisme défini par

$$\forall \varphi \in E, \quad d(\varphi) = \varphi'.$$

Démontrer qu'il existe  $f \in L(E)$  tel que  $f \circ f = d$ .

- 2.b. Soit  $s \in L(E)$ , l'endomorphisme qui échange  $\cos$  et  $\sin$ . Quelle est la nature géométrique de  $s$ ? Existe-t-il  $g \in L(E)$  tel que  $g \circ g = s$ ?

**Exercice 33****rms128-667**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(A)$  soit diagonalisable et que  $P'(A)$  soit inversible. Démontrer que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 34****rms128-759**

Soit  $n$ , un entier supérieur à 2. Déterminer les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que la matrice  $PA$  soit diagonalisable, quelle que soit la matrice inversible  $P$ .

**Exercice 35****rms128-532**

Soit  $E$ , l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  pour lesquelles il existe un entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^p = I_2$ .

1. Démontrer que toute matrice  $M \in E$  est diagonalisable.
2. Déterminer l'adhérence de  $E$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

**Exercice 36****rms128-533**

La **classe de similitude** d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est l'ensemble  $S(A)$  défini par

$$S(A) = \{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

1. Démontrer que l'application  $[M \mapsto \chi_M]$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
2. On suppose que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est diagonalisable. Démontrer que la classe de similitude de  $A$  est une partie fermée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- 3.a. On suppose que la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est nilpotente. Démontrer que la matrice nulle  $O_n$  appartient à l'adhérence de la classe de similitude  $S(A)$ .
- 3.b. Étudier la réciproque.
4. On suppose que la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable. Démontrer que sa classe de similitude  $S(A)$  n'est pas fermée.
5. Démontrer que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , l'intérieur de la classe de similitude  $S(A)$  est vide.
6. Caractériser les matrices  $A$  dont la classe de similitude  $S(A)$  est bornée.

**Exercice 37****rms128-454**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . On suppose que leurs déterminants, respectivement notés  $a$  et  $b$ , sont premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices  $U$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$AU + BV = I_n.$$

**Exercice 38****rms130-482**

Soit  $E$ , un espace vectoriel réel de dimension finie. On considère deux endomorphismes  $f$  et  $g$  de  $E$ , en supposant que  $f$  est inversible et que le rang de  $g$  est égal à 1. Démontrer que  $f + g$  est inversible si, et seulement si,  $\text{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$ .

**Exercice 39****rms130-483**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{K}$ , un corps. On considère une application non constante

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(AB) = f(A).f(B).$$

Démontrer que  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible si, et seulement si,  $f(M) \neq 0$ .

**Exercice 40** rms130-493

Quelles sont les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  qui sont égales à leur comatrice ?

**Exercice 41** rms130-494

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $(AB)^n = 0_n$ . Démontrer que  $(BA)^n = 0_n$ .

**Exercice 42** rms130-498

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie sur le corps  $\mathbb{K}$  et  $f$ , un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^2$  soit un projecteur.

1. Démontrer que  $f$  est trigonalisable.
2. Démontrer que  $f$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ .

**Exercice 43** rms130-503

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  qui sont stables par  $A$ .
2. Déterminer les matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $AM = MA$ .

**Exercice 44** rms130-511

Soient  $E$ , un espace vectoriel complexe de dimension finie (non nulle) et  $u, v$ , deux endomorphismes de  $E$ . Démontrer que  $u$  et  $v$  admettent un vecteur propre commun dans chacun des trois cas suivants.

1.  $u \circ v = 0$
2.  $u \circ v \in \mathbb{C} \cdot u$
3.  $u \circ v \in \text{Vect}(u, v)$

**Exercice 45** rms130-513

1. Soit  $f$ , un endomorphisme non identiquement nul de  $\mathbb{R}^3$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^3(x) + f(x) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Que dire d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f^3 + f = 0$ ?

**Exercice 46** rms130-516

Soient  $E$ , un espace vectoriel réel de dimension finie  $n \geq 2$  et  $u$ , un endomorphisme de  $E$ . On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels stables par  $u$  sont  $\{0_E\}$  et  $E$ . Démontrer que  $n = 2$ .

**Exercice 47** rms130-541

On considère deux suites  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui convergent respectivement vers les matrices  $A$  et  $B$ .

1. On suppose que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les matrices  $A_k$  et  $B_k$  sont semblables. Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles semblables ?

2. Même question en supposant cette fois que les matrices  $A$  et  $B$  sont orthosemblables ?

**Exercice 48** rms130-761

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Résoudre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'équation

$$X^T + X = \text{tr}(X) \cdot A.$$

**Exercice 49** rms130-768

Soient  $E$ , un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $f$ , un endomorphisme de  $E$ .

1. Pour tout endomorphisme  $g \in L(E)$  tel que  $f \circ g = g \circ f$ , les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $g$ .
2. Soit  $p \in L(E)$ , un projecteur. Démontrer que  $p$  et  $f$  commutent si, et seulement si,  $\text{Im } p$  et  $\text{Ker } p$  sont stables par  $f$ .

**Exercice 50** rms130-772

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice nilpotente.

1. Démontrer que la matrice

$$I_n + N + \dots + N^{n-1}$$

est inversible et calculer son inverse.

2. Démontrer que la matrice

$$I_n + 2N + 3N^2 + \dots + nN^{n-1}$$

est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 51** rms130-779

Soit  $f \in L(\mathbb{R}^4)$ , l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de  $f$ .
2. Démontrer que l'image de  $f$  est stable par  $f$ .
3. On note  $g$ , l'endomorphisme de  $\text{Im } f$  induit par  $f$ . Donner la matrice de  $g$  dans une base de  $\text{Im } f$ .
4. Déterminer les éléments propres de  $g$ .
5. En déduire les éléments propres de  $f$ .

**Exercice 52** rms130-783

Deux matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ayant  $(X-1)(X-2)^2$  sont-elles semblables ?

**Exercice 53** rms130-785

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(M) = \text{tr}(M) \cdot I_n + M.$$

**Exercice 54****rms130-787**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Diagonaliser  $A$ . En déduire une expression de  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , trois suites réelles telles que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} &= -4u_n + 6v_n, \\ v_{n+1} &= 3u_n + 5v_n, \\ w_{n+1} &= 3u_n + 6v_n + 5w_n. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = (u_n \quad v_n \quad w_n)^\top.$$

- 2.a. Exprimer  $X_{n+1}$  en fonction de  $A$  et de  $X_0$ .
- 2.b. En déduire une expression de  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ .

**Exercice 55****rms130-834**

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , une matrice telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \operatorname{tr} M^k = 0.$$

Démontrer que  $M$  est nilpotente.

2. Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $A$  soit semblable à  $A + tB$  pour tout  $t \in \mathbb{C}$ . Démontrer que  $B$  est nilpotente.
3. Soit  $(M_k)_{k \geq 1}$ , une suite de matrices semblables entre elles. On suppose que  $M_k$  converge vers la matrice nulle  $0_n$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ . Démontrer que  $M_0$  est nilpotente.
4. Réciproquement, soit  $M_0$ , une matrice nilpotente. Démontrer qu'il existe une suite  $(M_k)_{k \geq 1}$  de matrices semblables entre elles qui converge vers la matrice nulle.

**Exercice 56****rms130-954**

1. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice nilpotente d'indice  $d$ .
  - 1.a. Démontrer que  $d \leq n$ .
  - 1.b. Démontrer que  $M^2 - I_n$  est inversible et exprimer son inverse.
2. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose que

$$M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0_n.$$

- 2.a. Démontrer que  $|\operatorname{tr} M| \leq n$ .
- 2.b. Étudier le cas d'égalité.
- 2.c. Étudier le cas  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 57****rms130-956**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k).$$

1. Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles semblables?
2. Démontrer que les polynômes caractéristiques de  $A$  et de  $B$  sont égaux.

**Exercice 58****rms130-972**

1. Soient  $E$ , un espace vectoriel et  $u$ , un endomorphisme nilpotent de  $E$ . Démontrer que  $v = \operatorname{Id}_E + u$  est inversible et déterminer  $v^{-1}$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .
  - 2.a. Démontrer qu'il existe un unique polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$Q'' + Q = P.$$

- 2.b. On suppose que  $P \in \mathbb{Z}[X]$  et que  $P$  est divisible par  $X^n$ . Démontrer que  $Q \in \mathbb{Z}[X]$  et que  $Q(0)$  est divisible par  $n!$ .
3. On suppose que  $\pi = p/q$  avec  $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$P_n = (p - qX)^n$$

et on note  $Q_n$ , l'unique polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  tel que

$$Q_n'' + Q_n = P_n.$$

En considérant

$$\frac{1}{n!} \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt,$$

démontrer que  $\pi$  est irrationnel.

**Exercice 59****rms130-973**

On appelle **dérivation** sur  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  tout endomorphisme  $\delta$  de  $E$  tel que

$$\forall f, g \in E, \quad \delta(fg) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g).$$

1. Soit  $\delta$ , une dérivation de  $E$ . Quelle est l'image d'une fonction constante?
2. Soit  $f \in E$  telle que  $f(0) = 0$ . Démontrer qu'il existe une fonction  $g \in E$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xg(x).$$

3. Déterminer les dérivations de  $E$ .

**Exercice 60****rms130-988**

Soient  $A$  et  $B$ , deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $a$ , un nombre réel. On suppose que  $A(a) \neq 0$  et on considère l'ensemble

$$E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P + P(a)A = B\}$$

ainsi que l'application  $f$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P(a).A.$$

1. Démontrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Calculer son rang.
2. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable?
3. Déterminer l'ensemble  $E$ .

**Exercice 61** rms130-996

Soient  $E$ , un espace vectoriel réel et  $v$ , un endomorphisme de  $E$  tel que

$$v^2 + v + I_E = \omega_E.$$

1. Soit  $x \in E$ , non nul. Démontrer que le couple  $(x, v(x))$  est une famille libre.
2. Soient  $x$  et  $y$ , deux vecteurs de  $E$  tels que la famille

$$(x, y, v(x))$$

soit libre. Démontrer que la famille

$$(x, y, v(x), v(y))$$

est libre.

3. On suppose que  $\dim E = 4$ .
- 3.a. Démontrer qu'il existe une base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $E$  qui vérifie

$$e_3 = v(e_1) \quad \text{et} \quad e_4 = v(e_2).$$

- 3.b. Donner la matrice de  $v$  dans cette base. Cette matrice est-elle diagonalisable?

**Exercice 62** rms130-1000

1. Soient  $M$  et  $N$ , deux matrices semblables. Alors les matrices  $P(M)$  et  $P(N)$  sont semblables, quel que soit le polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
2. Soient  $A$ , une matrice diagonalisable et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de matrices qui converge vers la matrice  $B$ . Si toutes les matrices  $B_n$  sont semblables à  $A$ , alors la limite  $B$  est aussi semblable à  $A$ .
3. Ce résultat subsiste-t-il si la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable?

**Exercice 63** rms130-1054

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\psi_A$ , l'application définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi_A(M) = AM - MA.$$

1. L'endomorphisme  $\psi_A$  est-il injectif?
2. Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\psi_A(B) = B$ .
- 2.a. Démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad AB^k - B^kA = kB^k.$$

- 2.b. En déduire que  $B$  est nilpotente.
3. Soit  $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf  $n_{i,i+1} = 1$  pour  $1 \leq i < n$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  pour que  $N$  soit un vecteur propre de  $\psi_A$  associé à la valeur propre 1.

**Exercice 64** rms130-1133

Soient  $u$ , un endomorphisme non nul de  $\mathbb{R}^3$  tel que

$$u^3 + u = \omega$$

et  $A$ , la matrice de  $u$  relative à la base canonique.

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

2. Déterminer le rang de  $u$ .
3. Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$$

puis que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}).$$

4. Démontrer que  $\text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ .
5. Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 65** rms130-1135

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à  $a \in \mathbb{C}$  et les coefficients non-diagonaux sont tous égaux à  $b \in \mathbb{C}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $M$ .
2. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable?
3. Calculer le polynôme minimal de  $M$ .
4. Calculer le déterminant de  $I_n + M$ .

**Exercice 66** rms130-1202

Soit  $u$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $u^3 = \text{Id}$  et  $u \neq \text{Id}$ .

1. Démontrer que 1 est une valeur propre de  $u$ .
2. Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}).$$

3. Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 67** rms130-1203

Soient  $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $F$ , le sous-espace engendré par les vecteurs

$$e_1 = \cos \quad \text{et} \quad e_2 = \sin.$$

Pour toute fonction  $f \in E$ , on pose

$$T_f = [t \mapsto (10f(0) - 6f'(0)) \cos t + (12f(0) - 7f'(0)) \sin t]$$

et on note  $u = [f \mapsto T_f]$ .

1. Démontrer que  $e_1$  et  $e_2$  sont linéairement indépendants.
2. Démontrer que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif?
3. Démontrer qu'il existe un endomorphisme  $v$  de  $F$  induit par restriction de  $u$ .
4. Quelles sont les valeurs propres de  $v$ ?

**Exercice 68** rms130-1204

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie sur le corps  $\mathbb{K}$  et  $f$ , un endomorphisme de  $E$  dont le rang est égal à  $r$ . Démontrer que le degré du polynôme minimal de  $f$  est inférieur ou égal à  $(r + 1)$ .

**Exercice 69****rms130-1206**

Soient  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , une colonne non nulle, et  $A = X.X^T$ .

1. Calculer le rang et le spectre de  $A$ .
2. En déduire le polynôme caractéristique de  $A$ .
3. Démontrer que

$$\det(I_n + A) = 1 + X^T.X.$$

**Exercice 70****rms130-1208**

1. Soient  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , ses valeurs propres (comptées avec multiplicité). Démontrer que

$$\text{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

2. Pour  $n \geq 3$ , on considère la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux situés sur les quatre "bords", qui sont tous égaux à 1. Déterminer les éléments propres de  $A$ .

**Exercice 71****rms130-1212**

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit  $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_A(M) = AM.$$

1. Démontrer que  $f_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Démontrer que : si  $A^2 = A$ , alors  $f_A$  est un projecteur.
3. Démontrer que  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $f_A$  est diagonalisable.
4. Construire une matrice propre de  $f_A$  à l'aide d'un vecteur propre de  $A$ .
5. Construire un vecteur propre de  $A$  à l'aide d'une matrice propre de  $f_A$ .

**Exercice 72****rms130-1296**

Pour  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ , on pose

$$M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que les matrices  $M(a, b, c)$  commutent entre elles.
2. Démontrer que  $J$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . Préciser ses éléments propres.
3. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ . Démontrer que  $M(a, b, c)$  est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

**Exercice 73****rms130-1287**

Soit  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1. On considère les vecteurs  $\varepsilon_1 = (1, 1)$  et  $\varepsilon_2 = (2, 1)$ .
- 1.a. Démontrer que  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

1.b. Donner la matrice de passage  $P$  de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}$ .

1.c. Quelle est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ ?

2. On suppose que l'endomorphisme  $g \in L(\mathbb{R}^2)$  vérifie

$$g \circ g = f.$$

2.a. Démontrer que  $g \circ f = f \circ g$ .

2.b. Vérifier que

$$\text{Ker}(f - \text{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{et que} \quad \text{Ker}(f - 4 \text{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_2.$$

2.c. En déduire que la matrice de  $g$  relative à la base  $\mathcal{B}$  est diagonale.

3. Résoudre l'équation  $M^2 = A$  dont l'inconnue est une matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 74****rms130-1289**

On considère l'application  $f$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P - P'.$$

1. Démontrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Quelle est l'image de la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$  par  $f$ ?
3. Démontrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .
4. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le sous-espace  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $f$ .
5. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ .
- 5.a. Démontrer qu'il existe un unique polynôme

$$P \in \mathbb{R}_n[X]$$

tel que  $f(P) = Q$ .

- 5.b. Calculer  $f(P')$ ,  $f(P'')$ , ...,  $f(P^{(n)})$  en fonction de  $P$ .
- 5.c. En déduire le polynôme  $Q$ .

**Exercice 75****rms130-1301**

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de  $M$ ?
2. La matrice  $M$  est-elle inversible?
3. Quelle est la dimension du noyau de  $M$ ? Donner une base de ce sous-espace.
4. Calculer  $M^2$  et  $M^3$ . En déduire un polynôme annulateur de  $M$ .
5. Déterminer les éléments propres de  $M$ . La matrice  $M$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 76****rms132-455**

1. Soit  $E$ , un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . On rappelle que, par définition, un sous-espace  $H$  de  $E$  est un **hyperplan** si, et seulement si, il existe une droite vectorielle  $D$  telle que  $H$  et  $D$  soient supplémentaires dans  $E$ .

Démontrer qu'un sous-espace  $H$  de  $E$  est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire  $\ell$  sur  $E$ , non identiquement nulle, telle que

$$H = \text{Ker } \ell.$$

2. Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on pose

$$\Phi(A) = [M \mapsto \text{tr}(AM)].$$

Démontrer que l'application  $\Phi$  est un isomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sur son dual  $E^* = L(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ .

3. Démontrer que la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible et calculer  $\text{tr}(J_r C)$  pour  $1 \leq r \leq n$ .

4. En déduire que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  contient une matrice inversible.

**Exercice 77****rms132-464**

Soient  $E$ , un espace vectoriel et  $\mathcal{A}$ , une sous-algèbre de  $L(E)$ . On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels de  $E$  qui sont stables par *tous* les éléments de  $\mathcal{A}$  sont  $\{0_E\}$  et  $E$ .

Démontrer que, quels que soient les vecteurs  $x \neq 0$  et  $y$  dans  $E$ , il existe un endomorphisme  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $u(x) = y$ .

**Exercice 78****rms132-466**

1. Démontrer que, pour toute matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , il existe un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que

$$M^{-1} = P(M).$$

2. Existe-t-il un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que

$$M^{-1} = P(M)$$

pour toute matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ?

**Exercice 79****rms132-467**

On note  $D$ , l'opérateur de dérivation sur l'espace  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f'.$$

Démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme  $\Phi \in L(E)$  tel que  $\Phi \circ \Phi = D$ .

**Exercice 80****rms132-488**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^4 = A^2$ .

1. On suppose que  $\text{Sp}(A) \subset \{\pm 1\}$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

2. On suppose que  $\{\pm 1\} \subset \text{Sp}(A)$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 81****rms132-498**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On considère l'application  $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f_A(M) = AM.$$

Démontrer que  $A$  et  $f_A$  ont même spectre.

**Exercice 82****rms132-755**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . On suppose que

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad \det(A + kB) = \pm 1.$$

1. Démontrer que la matrice  $A$  est inversible.

2. Démontrer que  $\det B = 0$ .

**Exercice 83****rms132-759**

Soit  $\varphi$ , une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A).$$

Démontrer qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\varphi = \lambda \cdot \text{tr}$ .

**Exercice 84****rms132-1111**

Soient  $E$ , un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et  $u$ , un endomorphisme de  $E$  ayant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes. Déterminer le nombre d'endomorphismes  $v$  tels que  $v^2 = u$ .

**Exercice 85****rms132-1122**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que  $A$  est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres.

2. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = x & + 2z \\ y' = & y \\ z' = 2x & + z \end{cases}$$

**Exercice 86****rms132-1125**

Trouver toutes les matrices  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 87****rms132-1127**

Soit  $f$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  différent de l'endomorphisme nul  $\omega_E$  et représenté par une matrice  $A$  dans la base canonique. On suppose que  $f + f^3 = 0$ .

1. Démontrer que  $A$  n'est pas inversible.

2. Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + I).$$

3. Démontrer que  $\text{Ker } f$  n'est pas réduit au vecteur nul.
4. Démontrer que  $A$  est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 88****rms132-1128**

1. Soit  $u$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que  $u^2 = 0$  et  $\text{rg } u = n$ .
  - 1.a. Démontrer que  $\text{Ker } u = \text{Im } u$ .
  - 1.b. En déduire qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $u$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{3n}$  tel que  $u^3 = 0$  et  $\text{rg } u = 2n$ .
  - 2.a. Démontrer que  $\text{Ker } u = \text{Im } u^2$ .
  - 2.b. En déduire qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^{3n}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 89****rms132-1129**

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable?

2. Démontrer que la matrice  $A$  est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire l'expression de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Retrouver cette expression en décomposant  $A$  sous la forme  $I_3 + N$ .

**Exercice 90****rms132-1131**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension trois, et  $(e_1, e_2, e_3)$ , une base de  $E$ .

Pour  $a \in \mathbb{C}$ , on définit l'endomorphisme  $f_a$  de  $E$  en posant

$$f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3 \quad \text{et} \quad f_a(e_2) = 0_E.$$

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de  $f_a$ .
2. Écrire la matrice  $A$  de  $f_a$  relative à la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
3. Calculer  $A^2$ . Qu'en déduire?
4. Quelles sont les valeurs propres de  $f_a$ ? Cet endomorphisme est-il inversible? diagonalisable?

**Exercice 91****rms132-1132**

Soit  $\varphi$ , l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \psi(P) = P + P'.$$

1. Démontrer que  $\psi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. La matrice  $M_\varphi$  qui représente  $\psi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est-elle inversible?
3. Cette matrice est-elle diagonalisable?

**Exercice 92****rms132-1133**

Soit  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^2$  canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

On suppose que  $a + c = b + d = 1$ .

1. Démontrer que : si

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

alors  $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ .

2. Démontrer que  $(1, -1)$  est un vecteur propre de  $f$ . Quelle est la valeur propre associée?
3. Soit  $V$ , un vecteur propre non colinéaire à  $(1, -1)$ , alors  $V$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

**Exercice 93****rms132-1134**

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable? Déterminer ses éléments propres.

2. Trouver une matrice  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$ .
3. Les matrices  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $B^2 = A$  sont-elles diagonalisables?

**Exercice 94****rms132-1135**

1. Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

1.a. Démontrer que, si la matrice  $A$  est inversible, alors  $AB$  et  $BA$  ont même polynôme caractéristique.

1.b. Démontrer que cette propriété reste vraie lorsque  $A$  n'est pas inversible.

2. Soient  $f$  et  $g$ , deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère une valeur propre non nulle  $\lambda$  de  $f \circ g$  et on pose

$$E_\lambda = \text{Ker}(f \circ g - \lambda I) \quad \text{et} \quad F_\lambda = \text{Ker}(g \circ f - \lambda I).$$

- 2.a. Démontrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $g \circ f$ , puis que

$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \quad \text{et} \quad f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$

- 2.b. En déduire que  $\dim E_\lambda = \dim F_\lambda$ .

**Exercice 95****rms132-1137**

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , diagonalisable et de rang 1. On se donne trois réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad \beta + \gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0$$

et on considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R}).$$

1. Exprimer le polynôme caractéristique de  $B$  en fonction de celui de  $A$ . Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de  $B$ ?
2. On suppose que  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  appartient au noyau de  $A$ . Vérifier que la colonne  $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$  appartient au noyau de  $B$ . En déduire que  $\dim \text{Ker } B \geq 4$ .
3. Démontrer que  $B$  est diagonalisable.

**Exercice 96****rms132-1139**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de  $A$ . Quelle est la dimension du noyau de  $A$ ?
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
3. Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0?
4. Démontrer que  $A$  admet trois valeurs propres : 0,  $\lambda$  et  $1 - \lambda$ .
5. En déduire un polynôme annulateur de  $A$  dont le degré est égal à 3.

**Exercice 97****rms132-1140**

Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On suppose que  $M^4 = 4M^2$  et que 2 et  $-2$  sont des valeurs propres de  $M$ .

1. Démontrer que  $\text{Sp}(M) \subset \{0, \pm 2\}$ .
2. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 98****rms132-1141**

Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  vérifiant  $M^2 + M^\top = I_n$ .

1. Démontrer que, si  $P$  est un polynôme annulateur de  $M$ , toute valeur propre de  $M$  est racine de  $P$ .
2. Dans cette question seulement, on suppose que  $M$  est symétrique. Démontrer que  $M$  est diagonalisable, puis que  $\text{tr } M$  et  $\det M$  sont différents de 0.
3. Démontrer que  $M$  est diagonalisable.
4. Démontrer que  $M$  est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de  $M$ .

**Exercice 99****rms132-1143**

1. Soient  $A, B$  et  $C$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose que  $C \neq 0_n$  et que  $AC = CB$ . Démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A).C = C.P(B).$$

2. Démontrer qu'un produit de matrices est inversible si, et seulement si, tous ses facteurs sont inversibles. En déduire que  $A$  et  $B$  ont au moins une valeur propre commune.
3. Réciproquement, on suppose que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune. Démontrer qu'il existe une matrice  $C$  non nulle telle que  $AC = CB$ .

**Exercice 100****rms132-1145**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  qui commutent :  $AB = BA$ . On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , exprimer  $P(M)$  en fonction de  $P(A)$ ,  $P'(A)$  et  $B$ .
2. Démontrer que  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable et  $B = 0$ .

**Exercice 101****rms132-1150**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^\top . A = A . A^\top$ . On suppose qu'il existe un entier  $p \geq 2$  tel que  $A^p = 0_n$ . En considérant la matrice  $B = A^\top . A$ , démontrer que  $A = 0_n$ .

**Exercice 102****rms132-1176**

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable?

2. Démontrer que la matrice  $A$  est semblable à une matrice triangulaire. (On donnera une matrice de passage convenable.)
3. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

**Exercice 103****rms132-1177**

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = & y - z \\ y' = -x & + z \\ z' = x - y \end{cases} \quad (S)$$

avec les conditions  $x(0) = 1$  et  $y(0) = z(0) = 0$ .

1. Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (S).
2. On suppose que  $(x, y, z)$  est une solution de (S). Démontrer que les fonctions  $x + y + z$  et  $x^2 + y^2 + z^2$  sont constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire?
3. Résoudre le système (S).

**Exercice 104****rms132-1198**

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les racines réelles des polynômes  $X^3 - 2X + 1$  et  $X^3 - 2X - 4$ .

- Déterminer les matrices qui commutent avec  $D$ .
- Résoudre l'équation  $M^3 - 2M = D$ , d'inconnue  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Résoudre l'équation  $M^3 - 2M = A$ , d'inconnue  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 105****rms132-1201**

On étudie l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  représenté dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Calculer le rang et une base de l'image de  $f$ .
- Soit  $g$ , l'endomorphisme induit par restriction de  $f$  au sous-espace  $\text{Im } f$ . Démontrer que  $g$  est diagonalisable.

**Exercice 106****rms132-1202**

Pour  $a > 0$ , on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/a & 1/a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Vérifier que  $-1/a$  est une valeur propre de  $A$ .
- La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
- Caractériser les sous-espaces propres de  $A$ .

**Exercice 107****rms132-1203**

Soit  $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ . On suppose que  $A$  est semblable à  $jA$  (où  $j = e^{2i\pi/3}$ ).

- Démontrer que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad j\lambda \in \text{Sp}(A).$$

- En déduire que  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .
- Démontrer que  $A^2 = 0_2$ .
- Ce dernier résultat est-il encore vrai si on suppose que  $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ ?

**Exercice 108****rms132-1204**

Soient  $u$  et  $v$ , deux endomorphismes de  $E$ , espace vectoriel complexe de dimension finie. Démontrer que toute valeur propre  $\lambda$  de  $u \circ v$  est aussi une valeur propre de  $v \circ u$ .

*Indication :* on distinguera les cas  $\lambda = 0$  et  $\lambda \neq 0$ .

**Exercice 109****rms132-1206**

On considère la suite de polynômes  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et

$$\forall k \geq 2, \quad P_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P'_n = P_{n-1}(X-1).$$

En déduire que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad P_n^{(k)} = P_{n-k}(X-k).$$

- a. Démontrer que l'application  $\Phi_n$  définie par

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi_n(Q) = Q - Q'(X+1)$$

est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

- b. Exprimer les polynômes  $\Phi_n(P_k)$  en fonction de  $P_0, \dots, P_n$ .
- c. Démontrer que  $\Phi_n$  possède une unique valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. L'endomorphisme  $\Phi_n$  est-il diagonalisable?
- Démontrer que  $\Phi_n$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Calculer  $\Phi_n^{-1}(P_k)$  pour  $0 \leq k \leq n$ .

**Exercice 110****rms132-1208**

Soient  $f$  et  $g$ , deux endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . On suppose que  $f \circ g = g \circ f$ .

- Démontrer que  $f$  et  $g$  ont un vecteur propre commun.
- Soit  $F$ , un sous-espace strict de  $E$  stable par  $f$  et par  $g$ . On considère un sous-espace  $G$  tel que  $E = F \oplus G$  et on note  $p$ , la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ .
- a. Démontrer que le sous-espace  $G$  est stable par

$$f_1 = p \circ f \quad \text{et par} \quad g_1 = p \circ g.$$

- b. Vérifier que  $f_1$  et  $g_1$  commutent.
- Soient  $f_2$  et  $g_2$ , les endomorphismes respectivement induits par restriction à  $G$  des endomorphismes  $f_1$  et  $g_1$ . Démontrer que  $f_2$  et  $g_2$  sont trigonalisables.
- En déduire par récurrence sur  $n$  qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices de  $f$  et  $g$  sont toutes les deux triangulaires supérieures.

**Exercice 111****rms133-182**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . On considère l'endomorphisme  $\Delta$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  défini par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \Delta(M) = AM + MB.$$

- On suppose que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables. Démontrer que  $\Delta$  est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres.
- On suppose que  $A$  et  $B$  sont nilpotentes. Démontrer que  $\Delta$  est nilpotente et exprimer l'indice de nilpotence de  $\Delta$  en fonction des indices de nilpotence  $d_A$  et  $d_B$  de  $A$  et de  $B$ .

**Exercice 112****rms133-1000**

- Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ . Démontrer que  $A$  est nilpotente si, et seulement si, son spectre est réduit à  $\{0\}$ .
- Quelles que soient les matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose

$$[A, B] = AB - BA.$$

On note  $C = [A, B]$  et on suppose que  $[A, C] = 0_n$ .

- a. Démontrer que  $\text{tr}(C^k) = 0$  pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ .
- b. En déduire que  $C$  est nilpotente.
- c. Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad [B, A^p] = -pA^{p-1}C.$$

**Exercice 113****rms133-1277**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = 0_n$ .

1. A-t-on nécessairement  $BA = 0_n$  ?
2. Démontrer que

$$\forall p \geq 1, \quad \text{tr}[(A+B)^p] = \text{tr}(A^p) + \text{tr}(B^p).$$

3. Établir une relation entre  $\text{rg } A$  et  $\text{rg } B$ .

**Exercice 114****rms133-1285**

On considère la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (où  $n \geq 2$ ) pour laquelle  $a_{i,j} = 1$  si  $i = 1$  ou  $j = 1$  et  $a_{i,j} = 0$  sinon.

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les éléments propres de  $A$ .
3. Calculer le déterminant de  $A$ .

**Exercice 115****rms134-1387**

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on note

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On considère une application  $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \quad (4)$$

et telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(A_\lambda) = \lambda. \quad (5)$$

Démontrer que

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = \det M.$$

**Exercice 116****rms134-1389**

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de  $A$  ? Donner une base de l'image de  $A$ .
2. Donner une équation de l'image de  $A$ . Le vecteur  $B$  appartient-il à l'image de  $A$  ?

**Exercice 117****rms134-1395**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose que  $A$  est inversible et que  $B$  est nilpotente.

1. Si ces deux matrices commutent :  $AB = BA$ , alors les matrices  $A - B$  et  $A + B$  sont inversibles.
2. Sinon, la matrice  $A + B$  n'est pas nécessairement inversible.

**Exercice 118****rms134-1396**

Soit  $f \in L(\mathbb{R}^4)$ . On suppose que  $f \circ f = \omega$ . Démontrer que  $\text{rg } f \leq 2$ .

**Exercice 119****rms134-1398**

Soient  $E$ , un espace vectoriel et  $u$ , un endomorphisme nilpotent de  $E$ .

On considère un vecteur  $x \in E$  et on suppose que l'entier naturel  $k$  est choisi de telle sorte que

$$u^k(x) \neq 0_E.$$

Alors la famille

$$\mathcal{F} = (x, u(x), \dots, u^k(x))$$

est libre.

**Exercice 120****rms134-1399**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes nilpotents non nuls de  $\mathbb{R}^n$  qui commutent, alors

$$\text{rg}(u \circ v) < \text{rg } v.$$

2. Si  $u_1, \dots, u_n$  sont des endomorphismes nilpotents de  $\mathbb{R}^n$  qui commutent deux à deux, alors la composée

$$u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul.

**Exercice 121****rms134-1400**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et  $p_1, \dots, p_n$ , des endomorphismes non nuls de  $E$  tels que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i.$$

1. Les sous-espaces vectoriels  $\text{Im } p_i$  (avec  $1 \leq i \leq n$ ) sont en somme directe.
2. Le rang de  $p_i$  est égal à 1 pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

**Exercice 122****rms134-1402**

Soient  $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ . On suppose que  $AB$  est semblable à la matrice  $\text{Diag}(0, 9, 9)$ . Calculer le rang de  $BA$  et déterminer  $BA$ .

**Exercice 123****rms134-1405**

Soit  $u$ , un endomorphisme non nul de  $E = \mathbb{R}^3$  tel que

$$u^3 + u = 0.$$

1. Démontrer que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u \quad \text{et que} \quad \text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + I).$$

2. Démontrer que  $u$  n'est pas injectif et que  $\text{rg } u = 2$ .
3. En déduire qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 124****rms134-1409**

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. On suppose qu'il existe une matrice  $B$  telle que  $B^2 = A$ . Trouver un polynôme annulateur simple de  $B$ . Aboutir à une contradiction et conclure.
3. Démontrer que  $A$  est semblable à  $C$ .

**Exercice 125****rms134-1422**

Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ . On suppose qu'il existe un entier naturel  $n \geq 1$  tel que  $M^n = I_2$ . Alors  $M^{12} = I_2$ .

**Exercice 126****rms134-1423**Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. Condition nécessaire et suffisante sur  $A$  pour que  $B$  soit diagonalisable.

**Exercice 127****rms134-1431**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on suppose qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  vérifie :  $\exp(M) = A$ .

1. Démontrer que  $M$  admet une unique valeur propre. Préciser la forme de cette valeur propre.
2. Démontrer que  $M$  est triangulaire supérieure.
3. Résoudre l'équation  $\exp(M) = A$ .

**Exercice 128****rms134-1436-1566**

On considère un espace euclidien  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  et un endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

1. Soit  $x \in \text{Ker}(f - I) \cap \text{Im}(f - I)$ . Démontrer qu'il existe un vecteur  $y \in E$  tel que

$$x = f(y) - y.$$

Exprimer  $f^n(y)$  en fonction de  $x, y$  et  $n$ .

2. Démontrer que

$$E = \text{Ker}(f - I) \oplus \text{Im}(f - I).$$

3. Soit  $x \in E$ . Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$ , on pose

$$v_p(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p f^k(x).$$

Démontrer que la suite  $(v_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 129****rms134-1553**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in L(E)$ . On suppose que

$$u^3 = \frac{1}{3}(u^2 + u + I).$$

1. Démontrer que  $u$  est un automorphisme de  $E$ .
2. Démontrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'endomorphisme  $u^n$  est une combinaison linéaire de  $I, u$  et  $u^2$ .
3. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 130****rms135-1403**

Déterminer l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent avec les matrices de rang 1.

**Exercice 131****rms135-1404**Soit  $n \geq 2$ , un entier.On considère la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficients

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad a_{i,j} = \sin(i+j).$$

Calculer le rang de  $A$ , puis le déterminant de  $A$ .

**Exercice 132****rms135-1405**

Soient  $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  et  $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  telles que

$$\text{rg}(f \circ g) = 2.$$

Calculer  $\text{rg } f$  et  $\text{rg } g$ .

**Exercice 133****rms135-1407**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  sur  $\mathbb{K}$  et  $u \in L(E)$ .

1. On suppose que  $u$  est nilpotent. Démontrer que  $u^n$  est l'endomorphisme nul.
2. On suppose plus précisément que l'indice de nilpotence de  $u$  est égal à  $n$ . Démontrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est la matrice  $A$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre l'équation  $X^2 = A$  avec  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 134****rms135-1409**

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .
2. Soit  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que

$$X^2 + X = A.$$

On pose  $\Delta = P^{-1}XP$ .

2. a. Calculer  $\Delta^2 + \Delta$ .
2. b. Démontrer que  $D$  et  $\Delta$  commutent. En déduire que  $\Delta$  est diagonale.
3. Résoudre l'équation  $X^2 + X = A$  pour  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 135** rms135-1411

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in L(E)$ . Démontrer que  $f$  est un projecteur si, et seulement si,

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(f - I_E) = \dim E.$$

**Exercice 136** rms135-1412

Soient  $E$ , un espace vectoriel réel de dimension finie et  $u \in L(E)$ , un endomorphisme tel que

$$u^3 + u = \omega_E$$

(où  $\omega_E$  est l'endomorphisme nul de  $E$ ).

1. Soit  $x \in \operatorname{Im} u$ . Calculer  $u^2(x)$ .
2. On note  $v$ , l'endomorphisme de  $\operatorname{Im} u$  induit par restriction de  $u$ .
2. a. Justifier l'existence de  $v$ .
2. b. Démontrer que  $v$  est un automorphisme de  $\operatorname{Im} u$ .
3. Démontrer que l'entier  $\operatorname{rg} u$  est pair.

**Exercice 137** rms135-1413

Soient  $u$  et  $v$ , deux endomorphismes nilpotents et non nuls de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $u$  et  $v$  commutent.

1. On note  $w$ , l'endomorphisme de  $\operatorname{Im} u$  induit par restriction de  $v$ .
1. a. Démontrer que  $w$  est bien défini.
1. b. En déduire que  $\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg}(u)$ .
2. Soient  $A_1, \dots, A_n$ , des matrices nilpotentes d'ordre  $n$  qui commutent deux à deux. Démontrer que le produit

$$A_1 A_2 \cdots A_n$$

est égal à la matrice nulle.

**Exercice 138** rms135-1414

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. La matrice  $A$  est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.
2. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 139** rms135-1415

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
2. La matrice  $A$  est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.

**Exercice 140** rms135-1416

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in L(E)$ , un endomorphisme non nul tel que  $f^2 = \omega_E$ .

1. Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de  $f$ .
2. Démontrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Soient  $M_1$  et  $M_2$ , deux matrices non nulles de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que

$$M_1^2 = M_2^2 = 0_3.$$

Démontrer que  $M_1$  et  $M_2$  sont semblables.

4. Démontrer que deux matrices carrées semblables (de taille quelconque) ont même rang.
5. Soient  $M_1$  et  $M_2$ , deux matrices non nulles de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telles que  $M_1^2 = M_2^2 = 0_4$ . Les matrices  $M_1$  et  $M_2$  sont-elles nécessairement semblables?

**Exercice 141** rms135-1417

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $AU$ . Que peut-on en déduire?
2. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
3. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 142** rms135-1418

Soient  $a, b, c$  et  $d$ , des nombres complexes et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

On suppose que  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

1. Calculer le produit  $M.M^T$ . En déduire la valeur de  $\det M$ .
2. a. On suppose que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ . Démontrer que  $\operatorname{rg} M = 4$ .
2. b. On suppose que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ . Démontrer que  $\operatorname{rg} M = 2$ .
3. Étudier la diagonalisabilité de  $M$ .

**Exercice 143** rms135-1443

Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  représenté par la matrice  $A$  dans une base

$$\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n).$$

Pour tout  $t > 0$ , on considère la base

$$\mathcal{B}_t = \left( \frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n} \right).$$

1. Exprimer  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_t}(f)$  en fonction de  $A$  et de  $t$ .

2. On note  $S(A)$ , la **classe de similitude** de  $A$  (c'est-à-dire l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont semblables à  $A$ ). Démontrer que la matrice  $A$  est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de  $S(A)$ .

**Exercice 144****rms135-1577**

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que  $A$  est diagonalisable en explicitant une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

2. On considère le système différentiel suivant.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \quad (S_1)$$

Démontrer que  $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  est une solution de  $(S_1)$  si, et seulement si,  $U = P^{-1}X$  est une solution du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = DY(t). \quad (\Delta_1)$$

En déduire les solutions de  $(S_1)$ .

3. On considère le système différentiel suivant.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X''(t) = AX(t) \quad (S_2)$$

3.a. Résoudre le système  $(S_2)$ .

3.b. Soit  $E$ , l'ensemble des solutions bornées sur  $\mathbb{R}$  de  $(S_2)$ . Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

**Exercice 145****rms135-506**

1. Soit  $\varphi$ , une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Démontrer qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \text{tr}(AM).$$

2. En déduire que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  contient une matrice inversible.

**Exercice 146****rms135-507**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  et  $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$ , une famille d'endomorphismes non identiquement nuls tels que

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} \cdot p_i.$$

Démontrer que le rang de chaque endomorphisme  $p_i$  est égal à 1 et que

$$E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } p_i.$$

**Exercice 147****rms135-964**

1. On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad (H)$$

où  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Démontrer que  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A$  si, et seulement si, il existe un vecteur *non nul*  $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$  tel que la fonction

$$f_\lambda = [t \mapsto e^{\lambda t} x_\lambda]$$

soit une solution de l'équation (H).

2. Pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

et  $F = \{f_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ .

2.a. Démontrer que  $F$  est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.

2.b. Déterminer une matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = Mf(t).$$

Quel est le spectre de  $M$ ?

**Exercice 148****rms135-1151**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice diagonalisable telle que  $\text{tr } A > 0$ . On suppose qu'il existe une fonction  $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad \text{et que} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une forme linéaire  $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  non nulle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ell(x(t)) = 0.$$

**Exercice 149****rms136-669**

Soient  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $F$ , un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. On suppose que  $F$  est stable par produit. Démontrer que  $F$  ne contient que des fonctions constantes.

**Exercice 150****rms136-671**

Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Démontrer que les matrices  $A$  et  $B$  commutent :

$$AB = BA$$

si, et seulement si,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp[t(A+B)] = \exp(tA) \cdot \exp(tB).$$

## Solution 1

09-01

1. Soit  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ . Il est clair que l'application

$$C_P = [M \mapsto P^{-1}MP]$$

est une application de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  dans lui-même et que cette application est linéaire :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \\ P^{-1}(\lambda M + N)P = \lambda \cdot P^{-1}MP + P^{-1}NP. \end{aligned}$$

✎ Si une propriété vous paraît évidente, dites-le — mais en montrant que vous avez bien compris de quelle propriété il s'agit !

De plus, d'après l'Astuce taupinale (version multiplicative :  $PP^{-1} = I_n$ ),

$$\forall M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad P^{-1}(MN)P = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP)$$

et enfin

$$P^{-1}I_nP = I_n$$

donc la conjugaison  $C_P$  est bien un (endo)morphisme d'algèbre.

Enfin, il est clair que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad P(P^{-1}MP)P^{-1} = M$$

donc  $C_P$  est une bijection de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  dont l'application réciproque est

$$C_{P^{-1}} = [M \mapsto PMP^{-1}].$$

2. a. On suppose qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

S'il existe un entier  $k \geq 1$  tel que

$$B^k = P^{-1}A^kP,$$

alors

$$B^{k+1} = B^k \cdot B \stackrel{\text{HR}}{=} (P^{-1}A^kP) \cdot (P^{-1}AP) = P^{-1}A^{k+1}P.$$

On a donc démontré par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P^{-1}A^kP = B^k \tag{*}$$

et donc que les matrices  $A^k$  et  $B^k$  étaient semblables.

Il est clair que ce résultat est encore vrai (et totalement inintéressant) pour  $k = 0$  :  $A^0 = I_n$  et  $B^0 = I_n$  sont semblables (c'est la *réflexivité* de la relation de similitude).

✎ Le détail le plus important à retenir est clairement visible sur le calcul mais passé sous silence dans la conclusion : la même matrice de passage  $P$  convient pour tous les exposants  $k$ .

2. b. Si  $A$  est inversible, alors  $AA^{-1} = I_n$  et donc

$$B \cdot (P^{-1}A^{-1}P) = P^{-1}(AA^{-1})P = I_n$$

donc la matrice carrée  $B$  est inversible, d'inverse

$$B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

La matrice  $B^{-1}$  est donc semblable à la matrice  $A^{-1}$ .

✎ À nouveau, on doit retenir que la même matrice de passage convient pour exprimer la similitude de  $A$  et  $B$ , ainsi que la similitude de  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$ .

♣ Par symétrie des hypothèses, l'implication que nous avons démontrée est en fait une équivalence !

✎ Autant que possible, ne pas se fatiguer à faire deux fois la même chose !

2. c. Soit  $Q \in \mathbb{K}[X]$  :

$$Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d.$$

D'après (\*) et la remarque qui suit, puis par linéarité de  $C_P$ ,

$$\begin{aligned} Q(B) &= \sum_{k=0}^d a_k (P^{-1}AP)^k \\ &= \sum_{k=0}^d a_k P^{-1}A^kP \\ &= P^{-1} \left( \sum_{k=0}^d a_k A^k \right) P = P^{-1} \cdot Q(A) \cdot P. \end{aligned}$$

Les matrices  $Q(A)$  et  $Q(B)$  sont donc semblables, quel que soit le polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$ .

✎ On voit ici combien est important le fait qu'il existe une matrice de passage commune pour exprimer la similitude des  $A^k$  et des  $B^k$ .

♣ La seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle elle-même ! (puisque  $C_P$  est un automorphisme d'algèbre).

Comme  $Q(A)$  et  $Q(B)$  sont semblables, on en déduit que

$$Q(A) = 0 \iff Q(B).$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont même idéal annulateur [30] et en particulier même polynôme minimal [125].

## Solution 2

09-02

1.

✎ Nous allons, comme d'habitude, identifier les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et ceux de  $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  : on ne fera donc pas de distinction entre

$$(x, y, z) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Cependant, on distinguera soigneusement la matrice  $M(a)$  et l'endomorphisme  $f_a$  représenté par la matrice  $M(a)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Quelle que soit la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ , si  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$ , alors la matrice  $P^{-1}M(a)P$  (qui est une matrice semblable à  $M(a)$ ) représente  $f_a$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

♣ Un calcul direct montre que le polynôme caractéristique de  $M(a)$  est égal à  $(X-2)(X-1)^2$ .

✎ Si les matrices  $M(a)$  et

$$T(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables, alors  $\text{Sp } M(a) = \{2, 1\}$ . Cela simplifie la factorisation du polynôme caractéristique !

♣ D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de  $M(a)$ . Les facteurs  $(X-2)$  et  $(X-1)^2$  sont premiers entre eux, donc les sous-espaces caractéristiques

$$V_2 = \text{Ker}(f_a - 2I_3) \quad \text{et} \quad V_1 = \text{Ker}(f_a - I_3)^2$$

sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$  et stables par  $f_a$ . De plus, on sait que la dimension d'un sous-espace caractéristique est égal à la multiplicité de la valeur propre, donc

$$\dim V_2 = 1 \quad \text{et} \quad \dim V_1 = 2.$$

✎ Concrètement, cela signifie qu'un vecteur non nul de  $V_2$  est un vecteur directeur de cette droite (il s'agit d'un vecteur propre de  $f_a$  associé à la valeur propre 2, car  $V_2$  est en fait un sous-espace propre de  $f_a$ ) ; que deux vecteurs non proportionnels de  $V_1$  forment

une base de ce plan et que la famille constituée de ces trois vecteurs est une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de l'endomorphisme  $f_a$  est diagonale par blocs.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

► Indépendamment de la valeur de  $a$ , le rang de la matrice

$$M(a) - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 et le sous-espace propre  $V_2$  est la droite dirigée par  $\varepsilon_1 = (0, 1, -1)$ .

► Par ailleurs,

$$M(a) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [M(a) - I_3]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & -a-1 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de  $[M(a) - I_3]^2$  est toujours égal à 1 (le sous-espace caractéristique est un plan, quel que soit  $a$ ); celui de la matrice  $[M(a) - I_3]$  est égal à 2 (pour  $a \neq 0$ ) ou à 1 (pour  $a = 0$  seulement).

Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé et si les sous-espaces propres sont égaux aux sous-espaces caractéristiques. Donc la matrice  $M(a)$  est donc diagonalisable si, et seulement si,  $a = 0$ .

• Quoiqu'il en soit, nous cherchons une base du sous-espace caractéristique  $V_1$ , représenté par l'équation cartésienne  $[x + ay + (a+1)z = 0]$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour  $a \neq 0$ , le sous-espace  $\text{Ker}(f_a - I_3)$  est la droite dirigée par  $(1, 1, -1)$  et d'après le cours, il s'agit de chercher un vecteur  $\varepsilon_3 \in V_1$  qui n'appartient pas au sous-espace propre  $\text{Ker}(f_a - I_3)$ . Le plus simple est donc de choisir  $\varepsilon_3 = (a, -1, 0)$  et comme

$$[M(a) - I_3] \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on est conduit à poser  $\varepsilon_2 = (1, 1, -1)$ .

On a ainsi défini une famille de trois vecteurs :  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  dont le premier est un vecteur directeur de  $V_2$  et où le couple  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $V_1$ . Comme les sous-espaces  $V_1$  et  $V_2$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ , cette famille est une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

De plus,

$$f_a(\varepsilon_1) = 2 \cdot \varepsilon_1, \quad f_a(\varepsilon_2) = 1 \cdot \varepsilon_2, \quad f_a(\varepsilon_3) = 1 \cdot \varepsilon_3 + a \cdot \varepsilon_2$$

donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a) = P^{-1}M(a)P \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On en déduit que

$$P^{-1}M(a)P = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_D + a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$$

où les matrices  $D$  (diagonale) et  $N$  (nilpotente d'indice 2) commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme :

$$P^{-1}M(a)^n P = D^n + \binom{n}{1} a D^{n-1} N$$

avant de revenir dans la base canonique :

$$M(a)^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + \underbrace{n a P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{N_0}.$$

✎ On peut en déduire  $M(a)^n$  par calcul matriciel. Mais ça manque franchement d'élégance...

♣ Un *vrai géomètre* doit remarquer que

$$\Pi_2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_1 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

représentent, dans la base canonique, les projections associées à la décomposition en somme directe  $\mathbb{R}^3 = V_2 \oplus V_1$ . En particulier,  $\Pi_1 = I_3 - \Pi_2$  et on a démontré plus haut que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = 2^n \cdot \Pi_2 + 1^n \cdot (I_3 - \Pi_2) + naN_0.$$

Avec  $n = 1$  et  $n = 2$ , on obtient deux équations qui permettent d'en déduire que

$$\Pi_2 = [M(a) - I_3]^2 \quad \text{et que} \quad -aN_0 = [M(a) - I_3][M(a) - 2I_3].$$

♣ Un *véritable arithméticien* (qui connaît les détails de la démonstration du Théorème de décomposition des noyaux) sait que les projections  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont des polynômes en  $M(a)$  et que la résolution de l'équation de Bézout permet de calculer ces polynômes.

Le polynôme  $(X-2)(X-1)^2$  est un polynôme annulateur de  $M(a)$  écrit comme un produit de facteurs deux à deux premiers entre eux :  $P_2 = (X-2)$  et  $P_1 = (X-1)^2$ . Par conséquent, les polynômes  $Q_2 = (X-1)^2$  et  $Q_1 = (X-2)$  sont premiers entre eux et l'algorithme habituel nous donne

$$Q_2 - XQ_1 = 1.$$

Les projections associées à la décomposition en somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}[M(a) - 2I_3] \oplus \text{Ker}[M(a) - I_3]^2$$

sont donc

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= Q_2[M(a)] = [M(a) - I_3]^2 \\ \text{et} \quad \Pi_1 &= -M(a)Q_1[M(a)] = -M(a)[M(a) - 2I_3]. \end{aligned}$$

La décomposition

$$M(a) = 2 \cdot \Pi_2 + 1 \cdot \Pi_1 + a \cdot N_0$$

nous redonne alors la matrice  $N_0$ .

♣ On peut donc arriver à calculer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = 2^n \Pi_2 + \Pi_1 + naN_0$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= [M(a) - I_3]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & -a-1 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \\ \Pi_1 &= I_3 - \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a+1 \\ -1 & -a & -a \end{pmatrix} \\ aN_0 &= -[M(a) - I_3][M(a) - 2I_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en effectuant très, très peu de calculs matriciels (et sans inverser la matrice  $P$ ).

🔗 Il est tentant de partir de la décomposition

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais comme les deux termes de cette décomposition ne commutent pas, elle n'est d'aucun intérêt pratique!

## Solution 3

09-03

1. On calcule le polynôme caractéristique en effectuant des opérations de pivot avant de développer. Avec un peu de chance, on peut ainsi obtenir une forme factorisée du polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ -8 & 2 & 5-X \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ 0 & 1+X & -1-X \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\
 &= (1+X) \begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (1+X) \begin{vmatrix} -5-X & 4 & 2 \\ -8 & 7-X & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} && (C_2 \leftarrow C_2 + C_3) \\
 &= -(1+X) [(X+5)(X-7) + 32]
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\chi = (X+1)^2(X-3).$$

- ♣ Le spectre de  $A$  est  $\{-1, 3\}$ . Comme  $0$  n'est pas valeur propre, on en déduit que  $A$  est inversible.
- ♣ La valeur propre  $-1$  est double et le rang de

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -8 & 2 & 6 \\ -8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

est (visiblement) supérieur à 2, donc la dimension du sous-espace propre associé à  $-1$  est strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre.

Cela suffit pour que  $A$  ne soit pas diagonalisable.

♣ Si on est un peu curieux, on peut vérifier que le sous-espace propre associé à  $-1$  est la droite dirigée par  $(1, 1, 1)$  et que le sous-espace propre associé à  $3$  est la droite dirigée par  $(1, 2, 2)$ .

On n'est alors pas surpris de retrouver ces vecteurs à la question suivante...

2. Si  $\mu = 0$ , alors il est clair que la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  n'est pas libre!

Si  $\mu \neq 1$ , alors on peut supposer que  $\mu = 1$  (le fait de multiplier  $e_2$  par un scalaire non nul ne change pas le rang de la famille).

Il s'agit alors de vérifier que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1+\lambda \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

est inversible. On vérifie sans peine que son rang est bien égal à 3, ce qui prouve que la matrice est inversible et donc que la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est bien une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Conclusion : la famille  $\mathcal{B}$  est une base si, et seulement si,  $\mu \neq 0$ .

3. Pour calculer la matrice  $f$  relative à la base  $\mathcal{B}$ , il faut exprimer les vecteurs  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ .

On commence par calculer ces vecteurs dans la base canonique.

- ♣ Comme

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

on a  $f(e_1) = 3 \cdot e_1$ .

- ♣ Comme

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on a aussi  $f(e_2) = -e_2$  (quelle que soit la valeur de  $\mu \neq 0$ ).

- ♣ Enfin, on a

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• En prenant  $\lambda = 0$  et  $\mu = 2$ , on a donc

$$f(e_2) = -e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = -e_3 + e_2.$$

La matrice de  $f$  relative à  $\mathcal{B}$  est donc

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### Solution 4

09-05

1. Soit  $x$ , un vecteur propre de  $u$ .

Comme les sous-espaces propres de  $u$  sont des droites vectorielles, alors la droite vectorielle dirigée par  $x$  est un sous-espace propre de  $u$ .

Comme  $u$  et  $v$  commutent, alors tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ . La droite  $\mathbb{K} \cdot x$  est donc stable par  $v$ .

Or une droite  $\mathbb{K} \cdot x_0$  est stable par  $v$  si, et seulement si, son vecteur directeur  $x_0$  est un vecteur propre de  $v$ .

Donc  $x$  est aussi un vecteur propre de  $v$ .

2. a. On note  $u$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $A$ . Comme  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes, l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

**On suppose qu'il existe** une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$M^2 = A.$$

En notant  $v$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $M$ , la relation  $M^2 = A$  se traduit alors par  $v \circ v = u$ . En particulier,

$$u \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ (v \circ v) = v \circ u,$$

donc  $u$  et  $v$  commutent et d'après 61., tout vecteur propre de  $u$  est aussi un vecteur propre de  $v$ .

Comme  $u$  est diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $u$  (et donc de vecteurs propres de  $v$ ).

En notant  $Q$ , la matrice (invertible!) de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  à la base  $\mathcal{B}$ , les matrices

$$Q^{-1}AQ = \mathcal{M}_{at_{\mathcal{B}}}(u) \quad \text{et} \quad Q^{-1}MQ = \mathcal{M}_{at_{\mathcal{B}}}(v)$$

sont donc toutes les deux diagonales.

2. b. Poursuivons notre *analyse* : il existe  $n$  réels positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(puisque les valeurs propres de  $A$  sont positives). **Si** les valeurs propres de  $M$  sont aussi positives, alors il existe  $n$  réels positifs  $\mu_1, \dots, \mu_n$  tels que

$$Q^{-1}MQ = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

La condition  $A = M^2$  donne alors  $Q^{-1}AQ = Q^{-1}M^2Q = (Q^{-1}MQ)^2$  et donc

$$\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2).$$

Comme les  $\mu_k$  sont tous positifs, il faut donc que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mu_k = \sqrt{\lambda_k}.$$

**Il faut donc que**

$$Q^{-1}MQ = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

et comme l'application  $[W \mapsto Q^{-1}WQ]$  est une bijection de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , cela prouve que **la seule matrice**  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  **possible** telle que  $A = M^2$  et ayant  $n$  valeurs propres positives **serait** la matrice définie par :

$$M = Q \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) Q^{-1}.$$

⚠ Tout ce qui précède n'a de sens que sous l'hypothèse initiale : on a supposé qu'il existait une matrice  $M$  telle que... En formulant la conclusion précédente au conditionnel, on a constaté que le problème étudié admettait au plus une solution (unicité), mais on n'a pas encore justifié qu'il admettait effectivement une solution (existence).

**Synthèse.**

Comme  $A$  est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible  $Q$  et des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Comme les valeurs propres  $\lambda_k$  sont positives, alors la matrice

$$M = Q \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) Q^{-1}$$

est bien définie et de plus

$$\begin{aligned} M^2 &= [Q \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) Q^{-1}]^2 \\ &= Q [\text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})]^2 Q^{-1} \\ &= Q \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^{-1} \\ &= A. \end{aligned}$$

Cette fois, on a bien prouvé que le problème étudié admettait une, et une seule, solution!

✎ Très souvent, la synthèse ne fait que reprendre des calculs déjà faits, mais dans un cadre logique différent. Si les calculs permettent de fonder une preuve, une démonstration ne se réduit jamais à un calcul : c'est pourquoi (en dépit des apparences) on ne démontre pas la même chose lors de l'analyse et lors de la synthèse. C'est pourquoi on ne doit pas négliger la rédaction de la synthèse...

## Solution 5

09-06

Comme  $u$  est nilpotent d'indice  $d$ , alors  $u^d = 0_E$  et  $u^{d-1} \neq 0_E$ .

Comme  $u^{d-1}$  n'est pas l'endomorphisme identiquement nul, il existe un vecteur  $x \in E$  tel que  $u^{d-1}(x) \neq 0_E$ . Un tel vecteur  $x$  est fixé pour toute la suite et nous allons démontrer que, quel que soit ce vecteur  $x$ , la famille

$$(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x))$$

est libre.

PAR RÉCURRENCE.— On considère une relation de liaison

$$\alpha_0 \cdot x + \alpha_1 \cdot u(x) + \dots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E. \quad (*)$$

Par définition de  $d$ , on a  $u^d(x) = 0_E$  et par conséquent,  $u^k(x) = 0_E$  pour tout  $k \geq d$ . On applique l'endomorphisme  $u^{d-1}$  : par linéarité,

$$\alpha_0 \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Comme  $u^{d-1}(x) \neq 0_E$ , on en déduit que  $\alpha_0 = 0$ .

**Hypothèse de récurrence :**

On suppose qu'il existe un entier  $0 \leq k < d-1$  tel que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la relation  $(*)$  devient

$$\alpha_{k+1} \cdot u^{k+1}(x) + \alpha_{k+2} \cdot u^{k+2}(x) + \dots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Comme  $k < d-1$  et que  $k$  et  $d$  sont des entiers, alors  $k \leq d-2$ , donc  $d-k-2 \in \mathbb{N}$ . On applique alors l'endomorphisme  $u^{d-k-2}$  : il ne reste plus que

$$\alpha_{k+1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E$$

puisque  $u^k(x) = 0_E$  pour tout  $k \geq d$ . Or  $u^{d-1}(x) \neq 0_E$ , donc  $\alpha_{k+1} = 0$ .

On a ainsi démontré que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$$

pour tout entier  $0 \leq k < d-1$ . En particulier pour  $k = d-2$ , on a démontré que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{d-1} = 0,$$

ce qui prouve que la famille

$$(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x))$$

est libre.

VARIANTE.— Il n'est pas nécessaire de raisonner par récurrence : on peut aussi raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une relation de liaison

$$\alpha_0 \cdot x + \alpha_1 \cdot u(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E \quad (*)$$

où les scalaires  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$  ne sont pas tous nuls. On peut alors poser

$$m = \min\{0 \leq k < d : \alpha_k \neq 0\}$$

puisqu'une partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.

La relation de liaison (\*) peut donc être écrite sous la forme

$$\alpha_m \cdot u^m(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E \quad (**)$$

où le scalaire  $\alpha_m$  n'est pas nul (par définition de l'indice  $m$ ).

Comme l'entier  $m$  est *strictement* inférieur à l'entier  $d$ , alors l'entier  $d - m - 1$  est positif, donc  $u^{d-m-1}$  existe bien.

Appliquons l'endomorphisme  $u^{d-m-1}$  à la relation de liaison (\*\*). On obtient alors

$$\alpha_m \cdot u^{d-1}(x) + \sum_{k=m+1}^{d-1} \alpha_k \cdot u^{d-m-1+k}(x) = 0_E$$

et comme  $d - m - 1 + k \geq d - (m + 1) + (m + 1) = d$  pour tout  $m + 1 \leq k < d$ , il ne subsiste que

$$\alpha_m \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Mais  $u^{d-1}(x) \neq 0_E$  (par définition de  $x$ ) et  $\alpha_m = 0$  (par définition de  $m$ ) : c'est absurde.

Par conséquent, l'hypothèse que les  $d$  scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}$  ne soient pas tous nuls est fautive : le résultat est démontré.

## Solution 6

09-07

1. On sait que les endomorphismes  $f = P(u)$  et  $g = Q(u)$  commutent, quels que soient les polynômes  $P$  et  $Q$ .

• Si  $x \in \text{Ker } f$ , alors

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) && (f \text{ et } g \text{ commutent}) \\ &= g(0) && (x \in \text{Ker } f) \\ &= 0 && (\text{linéarité de } g) \end{aligned}$$

donc  $g(x) \in \text{Ker } f$ . Ainsi, le sous-espace  $\text{Ker } f$  est stable par  $g$ .

• Si  $y \in \text{Im } f$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  et

$$\begin{aligned} g(y) &= (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) && (f \text{ et } g \text{ commutent}) \\ &= f(g(x)) \in \text{Im } f. \end{aligned}$$

Donc le sous-espace  $\text{Im } f$  est stable par  $g$ .

2. Si  $u \circ v = v \circ u$ , alors on démontre par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \quad u^n \circ v = v \circ u^n$$

et comme  $I_E = u^0$  commute à  $v$ , cette propriété est vraie également pour  $n = 0$ .

• On en déduit que, pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^d \alpha_k \cdot X^k,$$

$$\begin{aligned} P(u) \circ v &= \left( \sum_{k=0}^d \alpha_k \cdot u^k \right) \circ v = \sum_{k=0}^d \alpha_k \cdot (u^k \circ v) = \sum_{k=0}^d \alpha_k \cdot (v \circ u^k) && (v \text{ et } u^k \text{ commutent}) \\ &= v \circ \left( \sum_{k=0}^d \alpha_k u^k \right) && (\text{linéarité de } v) \\ &= v \circ P(u). \end{aligned}$$

• Comme  $v$  et  $P(u)$  commutent, on peut appliquer le raisonnement précédent avec

$$u \leftarrow v, \quad v \leftarrow P(u), \quad P \leftarrow Q$$

pour en déduire que

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad P(u) \circ Q(v) = Q(v) \circ P(u).$$

• Si  $u$  et  $v$  commutent :

$$u \circ v = v \circ u$$

et si  $v$  est inversible, alors (en composant à gauche par  $v^{-1}$ )

$$\begin{aligned} v^{-1} \circ (u \circ v) &= v^{-1} \circ (v \circ u) = (v^{-1} \circ v) \circ u && \text{(associativité de } \circ) \\ &= u \end{aligned}$$

et, en composant maintenant à droite par  $v^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} u \circ v^{-1} &= (v^{-1} \circ (u \circ v)) \circ v^{-1} = (v^{-1} \circ u) \circ (v \circ v^{-1}) && \text{(associativité de } \circ) \\ &= v^{-1} \circ u. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que  $u$  et  $v^{-1}$  commutent.

## Solution 7

09-08

### 1. Point de vue géométrique

Comme  $H$  est un hyperplan de  $E$ , il existe un vecteur  $n_0 \neq 0_E$  tel que

$$E = H \oplus \mathbb{R} \cdot n_0.$$

En fait, n'importe quel vecteur de  $H$  peut jouer le rôle du vecteur  $n_0$ .

Cette décomposition en somme directe signifie que, pour tout vecteur  $x \in E$ , il existe un unique vecteur  $p(x) \in H$  et un unique scalaire  $u(x) \in \mathbb{R}$  tels que

$$x = p(x) + u(x) \cdot n_0.$$

L'unicité de cette décomposition permet de démontrer que  $p$  est un endomorphisme de  $E$  et que  $u$  est une forme linéaire sur  $E$  (démonstration classique).

En particulier,

$$n_0 = \underbrace{0_E}_{\in H} + \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}} \cdot n_0$$

et l'unicité de la décomposition prouve que  $u(n_0) = 1$ , en particulier : la forme linéaire  $u$  n'est pas identiquement nulle.

On en déduit que

$$\begin{aligned} x \in H &\iff u(x) \cdot n_0 = 0_E \\ &\iff u(x) = 0 && \text{(car } n_0 \neq 0_E) \\ &\iff x \in \text{Ker } u \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $H = \text{Ker } u$ .

Ainsi, il existe bien une forme linéaire non nulle  $u$  dont le noyau est égal à  $H$ .

• Si la forme linéaire  $u \circ f$  est proportionnelle à  $u$ , il existe un scalaire  $\lambda$  tel que

$$\forall x \in E, \quad (u \circ f)(x) = \lambda \cdot u(x).$$

En particulier, comme  $H = \text{Ker } u$ ,

$$\forall x \in H, \quad u[f(x)] = \lambda \cdot u(x) = 0_E,$$

ce qui prouve que  $f(x) \in \text{Ker } u = H$  et donc que l'hyperplan  $H$  est stable par  $f$ .

• Réciproquement, si l'hyperplan  $H$  est stable par  $u$ , alors on déduit de la décomposition

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in H} + u(x) \cdot n_0$$

que

$$\forall x \in E, \quad (u \circ f)(x) = u \left[ \underbrace{f(p(x))}_{\in H = \text{Ker } u} \right] + u(x) \cdot u[f(n_0)] = \underbrace{u[f(n_0)]}_{\in \mathbb{R}} \cdot u(x)$$

c'est-à-dire

$$u \circ f = \lambda \cdot u \quad \text{avec} \quad \lambda = u[f(n_0)] \in \mathbb{R}.$$

On a donc démontré que l'hyperplan  $H$  était stable par  $f$  si, et seulement si, la forme linéaire  $u \circ f$  était proportionnelle à  $u$ .

☞ On rappelle aussi un résultat du cours : Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si, et seulement si, leurs noyaux sont égaux.

2. D'après la question précédente, l'hyperplan  $H$  est stable par  $f$  si, et seulement si,

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}, \quad u \circ f = \gamma u$$

c'est-à-dire :

$$\exists \lambda = -\gamma \in \mathbb{R}, \quad u \circ (f + \lambda I) = 0_E$$

ce qui équivaut à :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{Im}(f + \lambda I) \subset \text{Ker } u = H.$$

3. a. Il est clair que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $L = \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ .

3. b. Matriciellement, l'égalité

$$u \circ f = \gamma \cdot u$$

se traduit par l'égalité

$$LA = \gamma \cdot L$$

c'est-à-dire (en transposant membre à membre) :

$$A^T \cdot L^T = \gamma \cdot L^T.$$

Comme la forme linéaire  $u$  n'est pas identiquement nulle, sa matrice  $L$  n'est pas la ligne nulle, donc la colonne  $L^T$  n'est pas la colonne nulle et l'égalité précédente signifie que  $L^T$  est un vecteur propre de  $A^T$ .

☛ Il est temps de remarquer / rappeler qu'il existe un lien analytique très simple entre la forme linéaire  $u$  et l'hyperplan  $H$  : comme

$$\begin{aligned} x \in H &\iff u(x) = 0 \\ &\iff LX = 0 \end{aligned}$$

les coefficients de la ligne  $L$  sont en fait les coefficients d'une équation cartésienne de  $H$ .

☛ Conclusion : Si l'endomorphisme  $u$  et l'hyperplan  $H$  sont représentés dans une même base  $\mathcal{B}$  par la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et par l'équation cartésienne

$$[LX = 0],$$

alors  $H$  est stable par  $f$  si, et seulement si, la colonne  $L^T$  est un vecteur propre de  $A^T$ .

**Point de vue matriciel**

L'étude précédente peut être menée par le calcul seul, à condition de choisir une base particulière de  $E$ .

☛ Considérons donc une base

$$\mathcal{B}_H = (e_1, \dots, e_{n-1})$$

de l'hyperplan  $H$ . D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un vecteur  $e_n$  tel que

$$\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$$

soit une base de  $E$ . (En fait, n'importe quel vecteur n'appartenant pas à  $H$  convient pour  $e_n$ .)

☛ Décomposons un vecteur  $x \in E$  dans la base  $\mathcal{B}_0$  :

$$x = \underbrace{x_1 \cdot e_1 + \dots + x_{n-1} \cdot e_{n-1}}_{\in H} + x_n \cdot \underbrace{e_n}_{\notin H}.$$

Il est clair que

$$x \in H \iff x_n = 0$$

et donc que  $H$  est le noyau de la forme linéaire

$$u = [x \mapsto x_n]$$

représentée par la ligne

$$L = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)$$

dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

♣ Considérons un endomorphisme  $f$  de  $E$ , représenté par la matrice

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

La matrice relative à  $\mathcal{B}_0$  de la forme linéaire  $u \circ f$  est égale à

$$LA = (a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{1,n}).$$

On en déduit que les lignes  $L$  et  $LA$  sont proportionnelles si, et seulement si,

$$a_{1,1} = \cdots = a_{1,n-1} = 0$$

et donc que les formes linéaires  $u$  et  $u \circ f$  sont proportionnelles si, et seulement si,

$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \star & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(matrice triangulaire par blocs) ce qui signifie que l'hyperplan  $H$  est stable par  $f$ .

REMARQUE.— Dans ce cas, la proportionnalité s'écrit

$$LA = a_{n,n} \cdot L.$$

♣ La représentation matricielle de l'image de  $(f + \lambda I)$  est le sous-espace engendré par les colonnes de  $(A + \lambda I_n)$ . L'image de  $(f + \lambda I)$  est donc contenue dans l'hyperplan  $H$  si, et seulement si, le dernier coefficient de chaque colonne de  $(A + \lambda I_n)$  est nul. Dans le cas particulier où  $\lambda = -a_{n,n}$ , l'image de  $(f + \lambda I)$  est contenue dans  $H$  si, et seulement si, le dernier coefficient de chacune des  $(n-1)$  premières colonnes est nulles, c'est-à-dire si

$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \star & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

4. a. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

admet  $-1$ ,  $1$  et  $-2$  pour valeurs propres : elle est donc diagonalisable.

Si  $A = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f)$ , alors il existe une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  telle que

$$D = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Diag}(-1, 1, 2).$$

Dans cette base  $\mathcal{B}$ , l'hyperplan représenté par l'équation cartésienne

$$0 = ax + by + cz = (a \quad b \quad c) \times X$$

est stable par  $f$  si, et seulement si, la matrice colonne

$$L^\top = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de  $D^\top = D$ . Il y a donc exactement trois plans stables par  $f$  :

$$\begin{aligned} H_{-1} &= [x = 0]_{\mathcal{B}} \\ &= \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= [y = 0]_{\mathcal{B}} \\ &= \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= [z = 0]_{\mathcal{B}} \\ &= \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned}$$

associés respectivement aux trois sous-espaces propres de  $D^\top$  :

$$\text{Ker}(D^\top + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(D^\top - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(D^\top - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant les vecteurs propres de  $A^\top$ , on peut trouver des équations cartésiennes qui représentent ces trois plans dans la base canonique. Comme

$$\text{Ker}(A^\top + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ker}(A^\top - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Ker}(A^\top - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on a donc :

$$H_{-1} = [y + z = 0]_{\text{can}}, \quad H_1 = [x + y - z = 0]_{\text{can}}, \quad H_2 = [x - z = 0]_{\text{can}}.$$

**4.b.** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f)$$

n'admet qu'une seule valeur propre réelle, car son polynôme caractéristique est égal à

$$(X - 1)\left(X^2 + X + \frac{1}{2}\right).$$

Comme

$$\text{Ker}(A^\top - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

l'endomorphisme  $f$  admet pour seul plan stable le plan

$$H = [x + 2y + 3z = 0]_{\text{can}}.$$

D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \text{Ker}(f - I_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + 1/2 I_E).$$

Comme le sous-espace propre  $\text{Ker}(f - I_E)$  est une droite (puisque  $(A - I_3)$  et sa transposée  $(A^\top - I_3)$  ont même rang), le sous-espace

$$\text{Ker}(f^2 + f + 1/2 I_E)$$

est un plan et, en tant que noyau d'un polynôme en  $f$ , il est stable par  $f$ .

On en déduit que

$$\text{Ker}(f^2 + f + 1/2 I_E) = [x + 2y + 3z = 0]_{\text{can}},$$

ce qu'on peut vérifier en calculant

$$A^2 + A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**4.c.** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f)$$

admet  $X^2(X + 2)$  pour polynôme caractéristique (et aussi pour polynôme minimal, puisque  $A(A + 2I_3) \neq 0_3$ , ce qui fait que  $A$  n'est pas diagonalisable).

On vérifie sans peine que

$$\text{Ker}(A^\top) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \text{Ker}(A^\top + 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, il existe exactement deux plans stables par  $f$ , représentés dans la base canonique par les équations cartésiennes suivantes.

$$[x + z = 0] \quad [y + z = 0]$$

Ici encore, le Théorème de décomposition des noyaux nous dit que

$$E = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker}(f + 2I_E).$$

Comme  $\text{Ker}(f + 2I_E)$  est une droite, le sous-espace  $\text{Ker } f^2$  est un plan et il est stable par  $f$ . Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

il est clair que  $\text{Ker } f^2 = [y + z = 0]_{\text{can}}$ .

L'autre plan stable est bien sûr  $\text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f + 2I_E)$  (somme directe de deux droites stables).

L'intersection des deux plans stables est représentée par

$$[x + z = 0] \cap [y + z = 0].$$

C'est donc la droite dirigée par  $(1, 1, -1)$  et on vérifie facilement que cette droite est bien égale à  $\text{Ker } f$ .

### Solution 8

09-09

☞ On rappelle qu'une fonction

$$f : X \rightarrow \mathbb{K}$$

est dite **polynomiale** lorsqu'il existe au moins un polynôme

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$$

tel que

$$\forall x \in X \subset \mathbb{K}, \quad f(x) = P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Le principal problème sur les fonctions polynomiales est de savoir s'il y a, ou non, unicité du polynôme  $P$ . Ce problème est résolu par le **Théorème d'identification des fonctions polynomiales** :

*S'il existe un polynôme  $P_0$  de degré  $n$  tel que*

$$\forall x \in X, \quad f(x) = P_0(x)$$

*et si  $\#(X) > n$ , alors  $P_0$  est l'unique polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que*

$$\forall x \in X, \quad f(x) = P(x).$$

*En particulier, si  $X$  est une partie infinie de  $\mathbb{K}$ , alors l'application*

$$P \mapsto f = [x \mapsto P(x)]$$

*est une application injective de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{A}(X, \mathbb{K})$ .*

☛ Si le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de la matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est égal à

$$a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

et si la matrice  $A$  est inversible, alors

$$a_0 = (-1)^n \det A \neq 0.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{K}$ ,

$$\det(tI_n - A^{-1}) = \det[(tA - I_n)A^{-1}] = \det(tA - I_n) \det(A^{-1})$$

et pour tout  $t \in X = \mathbb{K}^*$ ,

$$\det(tI_n - A^{-1}) = \frac{(-t)^n}{\det A} \cdot \det\left(\frac{1}{t}I_n - A\right) = \frac{t^n}{a_0} \cdot \chi_A\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^n a_k t^{n-k}.$$

Par définition, le polynôme caractéristique de  $A^{-1}$  est le polynôme associé à la fonction

$$[t \mapsto \det(tI_n - A^{-1})]$$

donc

$$\forall t \in X, \quad \chi_{A^{-1}}(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^n a_k t^{n-k}.$$

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{Q}$ , l'ensemble  $X = \mathbb{K}^*$  est une partie *infinie*, ce qui permet d'appliquer le Théorème d'identification des fonctions polynomiales rappelé plus haut. On en déduit que

$$\chi_{A^{-1}} = X^n + \frac{a_1}{a_0} X^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} X + \frac{a_n}{a_0}$$

(qui est bien un polynôme unitaire de degré  $n$ ) et en particulier que le polynôme caractéristique  $\chi_{A^{-1}}$  est associé au polynôme

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n.$$

▮ Pour bien comprendre le problème résolu par le Théorème d'identification, on peut revoir la théorie de l'interpolation de Lagrange : en restriction à un ensemble fini de cardinal  $n+1$ , toute fonction est en fait une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ . (Ainsi, toute fonction définie en un seul point est constante !)

• On peut aussi se pencher sur le cas des corps finis : sur  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , la fonction polynomiale

$$f = [x \mapsto x^2 - x]$$

est identiquement nulle, alors que les polynômes

$$0 \quad \text{et} \quad X^2 - X \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$$

sont distincts (ils n'ont pas le même degré).

## Solution 9

09-10

1. Pour tout  $j \neq i$ , le polynôme  $P_i$  divise le polynôme  $Q_j$  et donc aussi le polynôme  $A_i Q_i$ . Il existe donc un polynôme  $B_{i,j}$  tel que

$$A_i Q_i = B_{i,j} P_i.$$

On en déduit que

$$p_i = (A_i Q_i)(u) = B_{i,j}(u) \circ P_i(u).$$

Si  $x \in \text{Ker}[P_i(u)]$ , alors  $P_i(u)(x) = 0_E$  et donc

$$p_j(x) = B_{i,j}(u)[P_i(u)(x)] = 0_E.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq r, \quad \text{Ker}[P_i(u)] \subset \text{Ker } p_j.$$

2. On sait que

$$\sum_{i=1}^r A_i Q_i = 1.$$

D'après la propriété de morphisme d'algèbres,

$$I_E = \sum_{i=1}^r (A_i Q_i)(u) = \sum_{i=1}^r p_i.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^r p_i(x).$$

3. Pour démontrer que les sous-espaces  $\text{Ker}[P_i(u)]$  sont en somme directe, on considère une famille de vecteurs  $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$  telle que

$$\sum_{i=1}^r x_i = 0_E \quad \text{et que} \quad \forall 1 \leq i \leq r, \quad x_i \in \text{Ker}[P_i(u)].$$

• D'après [136.1],

$$\forall 1 \leq j \leq r, \quad x_j = \sum_{i=1}^r p_i(x_j) = p_j(x_j)$$

puisque  $x_j \in \text{Ker } p_i$  pour tout  $i \neq j$  [136.2].

• Soit  $1 \leq j \leq r$ . Par linéarité de  $p_j$ ,

$$0_E = p_j(0_E) = p_j\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) = \sum_{i=1}^r p_j(x_i)$$

et d'après [136.2] à nouveau,

$$\sum_{i=1}^r p_j(x_i) = p_j(x_j).$$

• On a ainsi démontré que

$$\forall 1 \leq j \leq r, \quad x_j = p_j(x_j) = 0_E$$

et donc que les sous-espaces  $\text{Ker}[P_j(u)]$  sont en somme directe.

4. On vient de démontrer que les sous-espaces  $\text{Ker}[P_i(u)]$  sont en somme directe.

• On sait que  $P = P_i Q_i$ , donc  $P(u) = Q_i(u) \circ P_i(u)$  et par conséquent

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad \text{Ker}[P_i(u)] \subset \text{Ker}[P(u)].$$

On en déduit que

$$\bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}[P_i(u)] \subset \text{Ker}[P(u)].$$

• Réciproquement, soit  $x \in \text{Ker}[P(u)]$ . D'après [136.1],

$$x = \sum_{i=1}^r p_i(x).$$

Par définition des applications  $p_i$ ,

$$P_i(u)(p_i(x)) = [A_i(u) \circ (P_i Q_i)(u)](x) = A_i(u)[P(u)(x)] = A_i(u)(0_E) = 0_E \quad \begin{array}{l} \text{(car } x \in \text{Ker}[P(u)]) \\ \text{(par linéarité de } A_i(u)) \end{array}$$

ce qui prouve que

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad p_i(x) \in \text{Ker}[P_i(u)].$$

On a ainsi démontré que

$$\text{Ker}[P(u)] \subset \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}[P_i(u)].$$

• Finalement, on a prouvé que

$$\text{Ker}[P(u)] = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}[P_i(u)].$$

⚠ **Attention**, dans ce contexte, les applications  $p_i \in L(E)$  ne sont pas des projecteurs ! En revanche, les endomorphismes induits par restriction des  $p_i$  au sous-espace  $\text{Ker}[P(u)]$  sont bien des projecteurs...

## Solution 10

09-11

L'hypothèse signifie que le polynôme

$$P_0 = X^3 + X - 1$$

est un polynôme annulateur de  $A$ .

⚠ Rien ne permet de conclure que  $P_0$  est le polynôme minimal de  $A$  !

Le polynôme  $P_0$  n'a pas de factorisation évidente. Mais comme les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont des polynômes de degré 1 ou 2, ce polynôme peut être factorisé !

La fonction polynomiale associée à  $P_0$  :

$$f_0 = [x \mapsto x^3 + x - 1]$$

est continue sur l'intervalle  $I = ]-\infty, +\infty[$ . Il est clair que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_0(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0,$$

donc  $f_0$  est strictement croissante. D'après le Théorème d'inversion, la fonction  $f_0$  réalise une bijection de  $]-\infty, +\infty[$  sur  $]-\infty, +\infty[$ , donc le polynôme  $P_0$  admet une, et une seule, racine réelle  $\alpha$ . De plus,

$$f_0(0) = -1 < 0 = f_0(\alpha) < 1 = f_0(1),$$

donc  $0 < \alpha < 1$  (car  $f_0$  est strictement croissante).

Comme  $\deg P_0 = 3$  et que  $P_0$  est à **coefficients réels**, le polynôme  $P_0$  admet deux autres racines, complexes et conjuguées :  $\beta$  et  $\bar{\beta}$ .

✎ Si  $\beta$  est une racine complexe d'un polynôme  $P$  à coefficients réels, alors

$$P(\beta) = 0 = \sum_{k=0}^d a_k \beta^k.$$

En conjuguant cette égalité, on obtient

$$0 = \sum_{k=0}^d \overline{a_k} \bar{\beta}^k = \sum_{k=0}^d a_k (\bar{\beta})^k = P(\bar{\beta})$$

puisque les coefficients  $a_k$  sont réels. Cela prouve que  $\bar{\beta}$  est aussi une racine de  $P$ .

✎ Par conséquent, le polynôme annulateur  $P_0$  est scindé, à racines simples, en tant que polynôme à coefficients complexes :

$$P_0 = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \bar{\beta}).$$

Si on considère la matrice  $A$  comme une matrice à coefficients complexes, elle est donc diagonalisable : il existe une matrice inversible  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{m_0}, \underbrace{\beta, \dots, \beta}_{m_1}, \underbrace{\bar{\beta}, \dots, \bar{\beta}}_{m_2}).$$

Comme deux matrices semblables ont même trace, on en déduit que

$$\text{tr } A = m_0 \alpha + m_1 \beta + m_2 \bar{\beta}.$$

Cela dit, les coefficients de  $A$  sont réels, donc la trace de  $A$  est réelle. En conjuguant la relation précédente, on obtient :

$$\text{tr } A = m_0 \alpha + m_1 \bar{\beta} + m_2 \beta$$

et, par différence,

$$(m_1 - m_2)(\beta - \bar{\beta}) = 0.$$

Or  $\beta \neq \bar{\beta}$  (car la racine  $\beta$  n'est pas réelle), donc  $m_1 = m_2$ .

✎ Comme deux matrices semblables ont même déterminant,

$$\det A = \alpha^{m_0} \beta^{m_1} \bar{\beta}^{m_2} = \alpha^{m_0} (\beta \bar{\beta})^{m_1} = \alpha^{m_0} |\beta|^{2m_1}.$$

Or  $\alpha > 0$  et  $\beta \neq 0$ , donc  $\det A > 0$ .

### Solution 11

09-12

L'hypothèse de l'énoncé signifie que le polynôme

$$P_0 = X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$$

est un polynôme annulateur de  $A$ .

✎ Rien ne prouve que ce soit le polynôme minimal de  $A$ . On sait seulement que le polynôme minimal de  $A$  est un diviseur unitaire de ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ . Il y a donc trois polynômes minimaux possibles ici :

$$X, \quad X^2 + X + 1, \quad X(X^2 + X + 1).$$

**Première méthode**

Considérons  $A$  comme une matrice à coefficients *complexes*. On connaît alors un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples, donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  : il existe une matrice inversible  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_0}, \underbrace{j, \dots, j}_{m_+}, \underbrace{j^2, \dots, j^2}_{m_-}).$$

• Deux matrices semblables ayant même rang, il apparaît sur cette relation que

$$\text{rg } A = m_+ + m_-.$$

Deux matrices semblables ayant même trace, on en déduit aussi que

$$\text{tr } A = m_+j + m_-j^2.$$

Or les coefficients de  $A$  sont réels, donc la trace de  $A$  est réelle et donc égale à son conjugué :

$$\text{tr } A = m_+j^2 + m_-j$$

(puisque  $j^2$  est le conjugué de  $j$ ). Ainsi, par différence,

$$(m_+ - m_-)(j - j^2) = 0$$

et comme  $j \neq j^2$ , on en déduit finalement que  $m_+ = m_-$  et donc que

$$\text{rg } A = 2m_+$$

est bien un entier pair.

**Deuxième méthode**

Puisque  $P_0$  est un polynôme annulateur de  $A$  et qu'on connaît une factorisation de  $P_0$  en produit de facteurs deux à deux premiers entre eux, on peut appliquer le théorème de décomposition des noyaux :

$$E = \text{Ker } A \oplus \text{Ker}(A - jI_n) \oplus \text{Ker}(A - j^2I_n).$$

D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \text{rg } u &= \dim E - \dim \text{Ker } u \\ &= \dim \text{Ker}(A - jI_n) + \dim \text{Ker}(A - j^2I_n). \end{aligned}$$

• Le sous-espace propre  $\text{Ker}(A - jI_n)$  est un espace de dimension finie et possède donc une base

$$(X_1, \dots, X_r).$$

Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on a donc

$$AX_i = j \cdot X_i.$$

En conjuguant cette relation, on obtient

$$A\overline{X_i} = \overline{A} \overline{X_i} = \overline{AX_i} = \overline{j \cdot X_i} = \bar{j} \cdot \overline{X_i} = j^2 \cdot \overline{X_i}$$

car  $\overline{A} = A$  (matrice à coefficients *réels*) et  $\bar{j} = j^2$ . Comme  $X_i$  n'est pas nul (en tant que vecteur propre de  $A$ ), la colonne  $\overline{X_i}$  n'est pas nulle et c'est donc un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $j^2$ .

Enfin, si on connaît une relation de liaison :

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot \overline{X_i} = 0,$$

alors on obtient en conjuguant

$$0 = \overline{\sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot \overline{X_i}} = \sum_{i=1}^r \overline{\alpha_i} \cdot X_i.$$

Comme les  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , constituent une *base* du sous-espace propre  $\text{Ker}(A - jI_n)$ , ils sont linéairement indépendants, donc les scalaires  $\overline{\alpha_i}$  sont tous nuls. Il en va évidemment de même pour les  $\alpha_i$ , ce qui prouve que la famille des  $\overline{X_i}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , est une famille libre de vecteurs propres de  $A$  associés à la valeur propre  $j^2$ .

Par conséquent :  $r = \dim \text{Ker}(A - jI_n) \leq \dim \text{Ker}(A - j^2I_n)$ .

♣ Par symétrie, si  $(Y_1, \dots, Y_q)$  est une base du sous-espace propre  $\text{Ker}(A - j^2 I_n)$ , alors la famille

$$(\overline{Y_1}, \dots, \overline{Y_q})$$

est une famille libre de  $\text{Ker}(A - j I_n)$ , ce qui prouve que

$$\dim \text{Ker}(A - j^2 I_n) \leq \dim \text{Ker}(A - j I_n),$$

donc que

$$\dim \text{Ker}(A - j I_n) = \dim \text{Ker}(A - j^2 I_n)$$

et finalement que le rang de  $A$  est un entier pair :

$$\text{rg } A = 2 \dim \text{Ker}(A - j I_n).$$

✎ L'application

$$[X \mapsto \overline{X}]$$

définit bien une bijection du sous-espace propre  $\text{Ker}(A - j I_n)$  sur le sous-espace propre  $\text{Ker}(A - j^2 I_n)$  (qui est sa propre réciproque), mais cette bijection n'est pas un isomorphisme ! Cette application est en effet semi-linéaire (et donc pas linéaire) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\lambda X + Y) = \overline{\lambda} \cdot \overline{X} + \overline{Y} = \overline{\lambda} \cdot \varphi(X) + \varphi(Y).$$

## Solution 12

09-13

Pour toute matrice inversible  $P$ ,

$$(P^{-1}AP + P^{-1}BP)(P^{-1}AP - P^{-1}BP) = P^{-1}(A + B)(A - B)P$$

et deux matrices semblables ont même déterminant. Par conséquent, il suffit d'établir l'inégalité pour les matrices  $A' = P^{-1}AP$  et  $B' = P^{-1}BP$  après avoir choisi la matrice  $P$  pour que les calculs se passent bien.

♣ Comme le rang de la matrice  $B$  est égal à 1, cette matrice est semblable à

$$B' = \begin{pmatrix} C_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant  $P$ , une matrice inversible telle que  $B' = P^{-1}BP$ , on pose  $A' = P^{-1}AP$  et on décompose cette matrice en colonnes :

$$A' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \det(A + B)(A - B) &= \det(A' + B') \cdot \det(A' - B') \\ &= \det(C_1 + C_0, C_2, \dots, C_n) \cdot \det(C_1 - C_0, C_2, \dots, C_n) \\ &= [\det(A) + \det(C_0, C_2, \dots, C_n)] [\det(A) - \det(C_0, C_2, \dots, C_n)] \quad (*) \\ &= (\det A)^2 - [\det(C_0, C_2, \dots, C_n)]^2 \\ &\leq (\det A)^2 \quad (\dagger) \end{aligned}$$

par linéarité du déterminant relativement à la première colonne (\*) et parce que  $\det(C_0, C_2, \dots, C_n)$  est un nombre réel.

## Solution 13

CCP19-01

✎ Trigonaliser une matrice, c'est assez classique. Mais ici, le problème posé est un peu plus subtil : il faut arriver à une matrice triangulaire imposée.

Nous allons essayer d'y voir clair (sans pour autant aller jusqu'à évoquer la forme de Jordan).

NB : pour des raisons de rapidité typographique, je confonds les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et les vecteurs colonnes qui les représentent dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

♣ On s'inspire de  $T$  pour étudier  $A$  : si l'énoncé dit vrai, la seule valeur propre de  $A$  est égale à 1 et le sous-espace propre associé est un plan. Vérifions-le !

Il est clair que la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 1, donc son noyau est un plan.

Plus précisément, en cherchant les relations de liaison entre les colonnes de  $(A - I_3)$ , on trouve

$$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (3, 1, 0)) = [-x + 3y + z = 0].$$

✎ *J'ai calculé un vecteur normal au plan en formant le produit vectoriel des deux vecteurs  $e_1$  et  $e_2$ .*

Par conséquent, si la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 1 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

est inversible, alors on déduit de la formule du changement de base que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, les deux premières colonnes de  $P$  sont les vecteurs propres  $e_1$  et  $e_2$  associés à la valeur propre 1 et comme deux matrices semblables ont *même trace*, il faut bien que le troisième coefficient diagonal soit égal à 1.

Dès lors, on sait que le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé et donc que  $A$  est trigonalisable.

Choisissons un vecteur  $e_3$  n'importe où en dehors du sous-espace propre  $\text{Ker}(A - I_3)$  : par exemple,  $e_3 = (1, 0, 0)$  (pour faire simple). On en déduit que

$$Ae_3 = e_3 + (1, 1, -2) = e_3 + [-2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2].$$

Conclusion : on a bien trigonalisé  $A$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais la matrice triangulaire obtenue n'est pas la bonne!

✎ *Réfléchissons un peu plus. Nous n'avons pas calculé le polynôme minimal de  $A$ , c'est un grand tort, car le polynôme minimal a toujours des choses à nous dire.*

On vérifie rapidement que  $(A - I_3)^2 = 0_3$  et donc que le polynôme minimal de  $A$  est égal à  $(X - 1)^2$ .

Au passage, la relation  $(A - I_3) \times (A - I_3) = 0_3$  implique que

$$\text{Im}(A - I_3) \subset \text{Ker}(A - I_3)$$

et la matrice  $(A - I_3)$  écrite plus haut nous dit plus précisément :

$$\text{Im}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, -2) \subset \text{Ker}(A - I_3).$$

En conséquence, si on choisit  $e_3$  n'importe où en dehors de  $\text{Ker}(A - I_3)$ , on aura forcément un scalaire  $\alpha$  tel que

$$(A - I_3)(e_3) = \alpha \cdot (1, 1, -2)$$

et ce scalaire  $\alpha$  n'est pas nul parce que  $e_3 \notin \text{Ker}(A - I_3)$ .

Quitte à remplacer  $e_3$  par  $(1/\alpha) \cdot e_3$ , on peut supposer que  $\alpha = 1$ .

Le problème posé est donc de trouver une base  $(e_1, e_2)$  du sous-espace propre  $\text{Ker}(A - I_3)$  telle que

$$Ae_3 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + e_3$$

c'est-à-dire

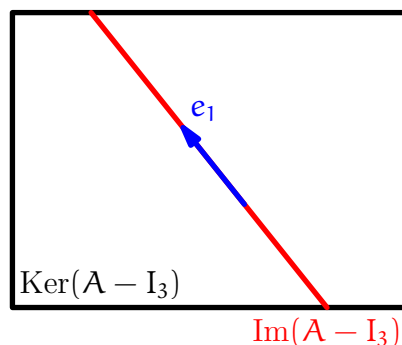
$$a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = (1, 1, -2)$$

où les scalaires  $a$  et  $b$  sont fixés à l'avance ( $a = b = 1$  si on respecte l'énoncé).

Deux situations se présentent.

✎ Premier cas : si  $b = 0$  (cas très particulier), alors  $a \cdot e_1 = (1, 1, -2)$ , donc  $a \neq 0$  et par conséquent, il faut que

$$e_1 = \frac{1}{a} \cdot (1, 1, -2) \in \text{Im}(A - I_3).$$

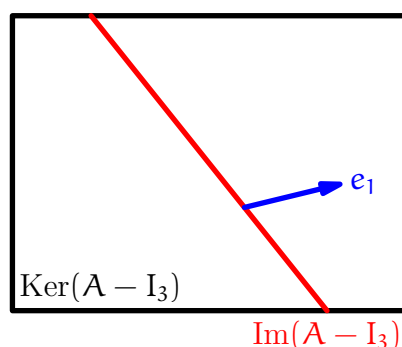


On peut alors choisir  $e_2$  dans  $\text{Ker}(A - I_3)$ , arbitrairement (puisque  $b = 0$ ) mais pas tout à fait (il faut que  $e_2$  ne soit pas colinéaire à  $e_1$ ).

• Deuxième cas : si  $b \neq 0$  (cas général), alors on choisit  $e_1 \in \text{Ker}(A - I_3)$  n'importe où hors de la droite  $\text{Im}(A - I_3)$  et on pose

$$e_2 = \frac{1}{b} \cdot ((1, 1, -2) - a \cdot e_1) \in \text{Ker}(A - I_3).$$

Comme  $e_1 \notin \mathbb{R} \cdot (1, 1, -2)$ , on en déduit que  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan  $\text{Ker}(A - I_3)$ .



• Conclusion :

Le vecteur  $e_3$  peut être choisi arbitrairement, du moment que  $e_3 \notin \text{Ker}(A - I_3)$ .

Quels que soient  $(a, b) \neq (0, 0)$ , on peut trouver une base  $(e_1, e_2)$  de  $\text{Ker}(A - I_3)$  telle que  $Ae_3 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + e_3$  avec une grande manœuvre à condition de procéder avec méthode : il faut partir de la relation qu'on cherche à obtenir, pas d'une base du sous-espace  $\text{Ker}(A - I_3)$  !

#### Solution 14

CCP22-01

• Il faut penser à interpréter  $f \circ g = 0$  par l'inclusion  $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$  et à traduire l'hypothèse  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  par l'existence d'un couple de projections ou d'une base de  $E$  adaptée à cette décomposition.

• Supposons que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ . Comme on dispose de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ , la projection sur  $\text{Ker } f$  parallèlement à  $\text{Im } f$  est bien définie : nous noterons  $g$ , cette projection.

Pour tout  $x \in E$ , on a donc  $g(x) \in \text{Ker } f$  et par conséquent  $f(g(x)) = 0_E$ . Ainsi  $f \circ g = 0$ .

D'autre part, l'application  $f + g$  est un endomorphisme de  $E$ , espace vectoriel de dimension finie. D'après le Théorème du rang,  $f + g$  est un automorphisme si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.

Considérons donc un vecteur  $x \in E$  tel que  $(f + g)(x) = 0_E$ . Comme  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires dans  $E$ , il existe donc  $y \in \text{Ker } f$  et  $z \in \text{Im } f$  tels que

$$x = \underbrace{y}_{\in \text{Ker } f} + \underbrace{z}_{\in \text{Im } f}.$$

Par linéarité de  $f$  et par définition de  $g$  (comme projection), on en déduit que

$$f(x) = f(y) + f(z) = f(z) \quad \text{et} \quad g(x) = y.$$

Par conséquent,

$$0_E = (f + g)(x) = \underbrace{y}_{\in \text{Ker } f} + \underbrace{f(z)}_{\in \text{Im } f}.$$

Mais  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires dans  $E$ , donc

$$y = f(z) = 0_E.$$

On remarque alors que  $z \in \text{Im } f$  (par hypothèse) et que  $z \in \text{Ker } f$ , tandis que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$  (par hypothèse aussi). Donc  $y = z = 0_E$  et on a bien :  $x = 0_E$ , ce qui prouve que  $f + g \in \text{GL}(E)$ .

#### ▮ Variante matricielle.

On considère une base de  $E$  adaptée à la décomposition en somme directe, c'est-à-dire une base de  $E$  définie en rassemblant une base  $(e_1, \dots, e_{n-r})$  de  $\text{Ker } f$  et une base  $(e_{n-r+1}, \dots, e_n)$  de  $\text{Im } f$  (avec  $r = \text{rg } f$ ). Comme les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $f$ , la matrice de  $f$  relative à une telle base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & A_r \end{pmatrix}$$

avec  $A_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ . Comme  $\text{rg } A_r = \text{rg } A = r$ , on en déduit que la matrice  $A_r$  est inversible.

On peut alors considérer la matrice

$$B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & 0_r \end{pmatrix}.$$

On a bien  $AB = 0_n$  et la somme

$$A + B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & A_r \end{pmatrix}$$

est une matrice inversible (puisque elle est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux inversibles).

**NB :** il ne s'agit pas vraiment d'une variante, c'est en fait exactement la même chose que ce qui précède mais sous forme matricielle.

• Réciproquement, supposons qu'il existe un endomorphisme  $g \in \text{L}(E)$  tel que  $f \circ g = 0$  et que  $f + g$  soit un automorphisme de  $E$ .

Comme  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , espace vectoriel de dimension finie, on déduit du Théorème du rang que

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \iff \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}.$$

On considère donc un vecteur  $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$  et nous allons vérifier que ce vecteur est nécessairement nul.

Comme  $f + g$  est un automorphisme, il existe un (unique) vecteur  $z \in E$  tel que

$$x = (f + g)(z) = \underbrace{f(z)}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{g(z)}_{\in \text{Im } g}$$

et on sait que  $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$  (puisque  $f \circ g = 0$ ). Cette décomposition de  $x$  prouve que

$$x \in \text{Ker } f + \text{Im } f$$

et donc que

$$x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$$

(puisque l'inclusion réciproque est évidente).

D'après la Formule de Grassmann et le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f)$$

et donc  $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) = 0$ , ce qui prouve que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$  et donc que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans  $E$ .

## Solution 15

IMT24-01

1. Par hypothèse, le polynôme  $P_0 = X^2 + X + 4$  est un polynôme annulateur de  $A$ . On sait que les valeurs propres de  $P_0$  sont nécessairement des racines d'un tel polynôme. Or le discriminant de  $P_0$  est égal à  $-15$ , donc  $P_0$  n'a pas de racines réelles. Par conséquent, la matrice  $A$  n'a pas de valeur propre réelle.

2. On peut considérer  $A$  comme une matrice à coefficients complexes :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $\bar{A} = A$ . Dans ces conditions, le polynôme  $P_0$  est un polynôme annulateur de  $A$  qui est scindé à racines (complexes) simples, donc la matrice  $A$  est diagonalisable (en tant que matrice à coefficients complexes) : il existe donc une matrice inversible  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$Q^{-1}AQ = \Delta$$

où  $\Delta$  est une matrice diagonale à coefficients complexes.

• Les coefficients diagonaux de  $\Delta$  sont les valeurs propres (complexes) de  $A$ , donc ce sont des racines de  $P_0$ . Il n'y a que deux possibilités :

$$\lambda_1 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$$

puisque  $P_0$  n'a que deux racines complexes.

• Comme  $\bar{A} = A$ , alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \overline{(A - \lambda I_n)X} = (\bar{A} - \bar{\lambda} I_n)(\bar{X}) = (A - \bar{\lambda} I_n)(\bar{X})$$

ce qui prouve que les sous-espaces vectoriels (complexes)  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$  et  $\text{Ker}(A - \bar{\lambda} I_n)$  ont même dimension.

Par conséquent, quitte à permuter les colonnes de la matrice de passage  $Q$ , on a démontré que

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_m, \underbrace{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_1}_m),$$

ce qui prouve d'une part que la dimension de  $E$  est paire :

$$\dim E = n = 2m$$

et donne d'autre part :

$$\text{tr } A = m\lambda_1 + m\bar{\lambda}_1, \quad \det A = \lambda_1^m \cdot \bar{\lambda}_1^m.$$

• Comme  $\lambda_1$  et  $\bar{\lambda}_1$  sont les racines du polynôme unitaire  $P_0$ , on sait que

$$\lambda_1 + \bar{\lambda}_1 = -1 \quad \text{et que} \quad \lambda_1 \bar{\lambda}_1 = 4$$

donc

$$\text{tr } A = -m = \frac{-n}{2} \quad \text{et} \quad \det A = 4^m = 2^{2m} = 2^n.$$

✎ Il faut connaître les formules donnant la somme et le produit des racines d'un polynôme, il est ici inutile d'expliciter  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  !

## Solution 16

IMT24-02

✎ Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $g$ , un endomorphisme de  $E$  dont le rang est égal à 1. D'après le Théorème du rang, le noyau de  $g$  est un sous-espace de dimension  $(n - 1)$  et d'après le Théorème de la base incomplète, il existe une base  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $E$  telle que  $(e_k)_{2 \leq k \leq n}$  soit une base de  $\text{Ker } g$ .

La matrice de  $g$  relative à cette base est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

• Comme  $\text{rg } B = 1$ , il existe une matrice inversible  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

La première colonne de  $P^{-1}BP$  sera notée  $C'_1$ .

Notons également  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de la matrice  $P^{-1}AP$ .

• Deux matrices semblables ont même déterminant, donc

$$\det A = \det(C_1, \dots, C_n)$$

et

$$\begin{aligned} \det(A + B) \det(A - B) &= \det(P^{-1}[A + B]P) \det(P^{-1}[A - B]P) \\ &= \det(P^{-1}AP + P^{-1}BP) \det(P^{-1}AP - P^{-1}BP) \\ &= \det(C_1 + C'_1, C_2, \dots, C_n) \det(C_1 - C'_1, C_2, \dots, C_n) \\ &= [\det A + \det(C'_1, C_2, \dots, C_n)] \times \\ &\quad [\det A - \det(C'_1, C_2, \dots, C_n)] \quad (\text{linéarité par rapport à la première colonne}) \\ &= (\det A)^2 - [\det(C'_1, C_2, \dots, C_n)]^2 \quad (\text{identité remarquable}) \\ &\leq \det(A^2). \quad (\text{propriété de morphisme}) \end{aligned}$$

## Solution 17

IMT24-03

1.  $\hookrightarrow$  Par définition de l'indice de nilpotence,  $u^n$  est l'endomorphisme nul tandis que l'endomorphisme  $u^{n-1}$  n'est pas identiquement nul. Il existe donc bien un vecteur  $x_0 \in E$  tel que  $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$  et, bien évidemment, ce vecteur  $x_0$  n'est pas nul.

Dans un espace de dimension  $n$ , une famille de  $n$  vecteurs est une base si, et seulement si, cette famille est libre. Il suffit donc de vérifier que la famille  $\mathcal{F}$  est libre.

On considère donc une famille  $(\alpha_k)_{0 \leq k < n}$  de scalaires tels que

$$\sum_{0 \leq k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) = 0_E.$$

Si les scalaires  $\alpha_k$  ne sont pas tous nuls, alors l'ensemble

$$\{0 \leq k < n : \alpha_k \neq 0\}$$

est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  et admet par conséquent un plus petit élément  $k_0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} 0_E &= \sum_{0 \leq k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \\ &= \sum_{0 \leq k < k_0} \underbrace{\alpha_k}_{=0} \cdot u^k(x_0) + \sum_{k_0 \leq k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \\ &= \sum_{k_0 \leq k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \end{aligned}$$

Comme  $0 \leq k_0 < n$ , on a bien  $(n-1) - k_0 \in \mathbb{N}$ , donc on peut composer par l'application linéaire  $u^{(n-1)-k_0}$  :

$$\begin{aligned} 0_E &= u^{(n-1)-k_0}(0_E) = u^{n-1-k_0} \left( \sum_{k_0 \leq k < n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \right) \\ &= \sum_{k_0 \leq k < n} \alpha_k \cdot u^{n-1+(k-k_0)}(x_0) \\ &= \alpha_{k_0} u^{n-1}(x_0) \quad (\text{terme avec } k = k_0) \end{aligned}$$

puisque  $u^n$  est l'endomorphisme nul et que  $n-1+(k-k_0) \geq n$  pour tout  $k > k_0$ .

On est arrivé à une contradiction :

- par hypothèse sur  $x_0$ , le vecteur  $u^{n-1}(x_0)$  n'est pas nul
- et, par hypothèse sur  $k_0$ , le scalaire  $\alpha_{k_0}$  n'est pas nul
- alors que le produit  $\alpha_{k_0} \cdot u^{n-1}(x_0)$  est nul.

Par conséquent, tous les scalaires  $\alpha_k$  sont nuls et on a démontré que la famille  $\mathcal{F}$  était une base de  $E$ .

2. Toute sous-famille d'une famille libre est elle aussi libre. D'après la question précédente, pour tout entier  $0 \leq p < n$ , la sous-famille

$$\mathcal{F}_p = (u^\ell(x_0))_{p \leq \ell < n}$$

est libre.

Par ailleurs, comme  $u^n$  est l'endomorphisme nul,

$$\forall p \geq n, \quad u^p(x_0) = 0_E.$$

♣ Considérons maintenant l'image par  $u^k$  de la base  $\mathcal{F}$  :

$$(u^k)_*(\mathcal{F}) = (u^{k+\ell}(x_0))_{0 \leq \ell < n} = (u^\ell(x_0))_{k \leq \ell < n+k}.$$

$\hookrightarrow$  Si on connaît une base d'un espace de dimension finie  $E$ , il faut s'en servir pour étudier les propriétés d'un endomorphisme de  $E$  : c'est fait pour !

La sous-famille

$$(u^\ell(x_0))_{k \leq \ell < n}$$

est une famille libre de  $(n-k)$  vecteurs contenue dans l'image de  $u^k$ , donc

$$\text{rg } u^k \geq n - k.$$

D'autre part,  $u^\ell(x_0) = 0_E$  pour  $n \leq \ell < n+k$ , donc la famille

$$(u^\ell(x_0))_{n-k \leq \ell < n}$$

est une famille libre (en tant que sous-famille de  $\mathcal{F}$ ) constituée de  $k$  vecteurs appartenant au sous-espace  $\text{Ker } u^k$ . Cela prouve que

$$\dim \text{Ker } u^k \geq k.$$

Comme  $u^k$  est un endomorphisme de  $E$ , espace vectoriel de dimension finie, on peut appliquer le Théorème du rang :

$$n = \dim E = \text{rg } u^k + \dim \text{Ker } u^k.$$

On peut alors déduire des inégalités précédentes que

$$\text{rg } u^k = n - k \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker } u^k = k.$$

3. On a démontré que  $\dim \text{Ker } u^k = k$  et on sait que  $\text{Ker } u^k$  est stable par  $u$  (en tant que noyau d'un polynôme en  $u$ ).

• Soit  $V_k$ , un sous-espace de  $E$  de dimension  $k$ , qu'on suppose stable par  $u$ . On peut donc considérer l'endomorphisme  $u_k \in L(V_k)$  induit par restriction de  $u$  à  $V_k$ . Par définition,

$$\forall x \in V_k, \quad u_k(x) = u(x)$$

et par conséquent

$$\forall x \in V_k, \quad u_k^n(x) = u^n(x) = 0_E.$$

L'endomorphisme  $u_k$  est donc nilpotent.

D'une manière générale, l'indice de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace, donc l'indice de nilpotence de  $u_k$  est inférieur à  $k = \dim V_k$  et

$$\forall x \in V_k, \quad u_k^k(x) = u^k(x) = 0_E.$$

On a ainsi démontré que  $V_k \subset \text{Ker } u^k$ .

Mais  $\dim \text{Ker } u^k = k$  (d'après la question précédente) et  $\dim V_k = k$  (par hypothèse). Donc  $V_k = \text{Ker } u^k$  (inclusion et égalité des dimensions [finies]).

• On a ainsi démontré que  $\text{Ker } u^k$  était le seul sous-espace stable par  $u$  dont la dimension est égale à  $k$ .

### Solution 18

IMT24-04

Ce système différentiel (linéaire, à coefficients constants) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 4I_2 - J$$

où  $J$  est la célèbre matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

• On se souvient alors que

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}),$$

on a donc

$$Q^{-1}JQ = \text{Diag}(2, 0)$$

et donc

$$Q^{-1}AQ = 4I_2 - Q^{-1}JQ = \text{Diag}(2, 4).$$

• On pose alors

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}X(t)$$

et on obtient

$$Y'(t) = \text{Diag}(2, 4)Y(t), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = 4v(t) \end{cases}.$$

Ce système peut être résolu de tête : la fonction  $X$  est solution du système différentiel initial si, et seulement si, il existe deux constantes  $a$  et  $b$  réelles telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{4t} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} - be^{4t} \end{pmatrix}.$$

### Solution 19

kh09-01

1. Comme  $E$  est un espace vectoriel *complexe* distinct de  $\{0\}$ , le polynôme caractéristique de  $u$  est bien défini et scindé. Par conséquent,  $u$  admet au moins une valeur propre complexe, soit  $\lambda$ . Nous noterons  $E_\lambda$ , le sous-espace propre de  $u$  associé à cette valeur propre.

Comme  $u$  et  $v$  commutent, le sous-espace propre  $E_\lambda$  de  $u$  est aussi stable par  $v$ . Comme  $E_\lambda$  est un sous-espace complexe distinct de  $\{0\}$ , on peut appliquer à  $v|_{E_\lambda}$ , l'endomorphisme de  $E_\lambda$  induit par restriction de  $v$  (puisque le sous-espace  $E_\lambda$  stable par  $v$ ), le raisonnement tenu pour  $u$  : il existe dans  $E_\lambda$  un vecteur propre  $x_\lambda$  pour  $v|_{E_\lambda}$ .

En particulier,  $x_\lambda \neq 0_E$ .

Comme  $v|_{E_\lambda}$  est un endomorphisme de  $E_\lambda$  induit par restriction de  $v$ , on en déduit que  $x_\lambda$  est un vecteur propre de  $v$ .

Comme  $E_\lambda$  est un sous-espace propre de  $u$  et que  $x_\lambda \neq 0_E$ , le vecteur  $x_\lambda$  est un vecteur propre de  $u$ .

Il existe donc bien un vecteur propre commun à  $u$  et à  $v$ .

2. a. Supposons  $u$  inversible. On déduit de la relation (2) que

$$u \circ v = (v + aI) \circ u$$

et donc que

$$u \circ v \circ u^{-1} = v + aI.$$

En interprétant matriciellement cette relation, on conclut que les endomorphismes  $v$  et  $v + aI$  ont même spectre.

On en déduit par récurrence que  $v$  et  $v + naI$  ont même spectre, quel que soit l'entier  $n \in \mathbb{N}$ .

Or  $E$  est un espace *complexe* non réduit à  $\{0\}$ , donc le spectre de  $v$  n'est pas vide (comme on l'a expliqué plus haut). Un ensemble non vide et invariant par translation est un ensemble infini : c'est impossible, car le cardinal du spectre de  $v$  est inférieur à la dimension de  $E$  !

On a ainsi démontré par l'absurde que  $u$  n'était pas inversible.

2. b. Nous allons démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^n \circ v - v \circ u^n = nau^n. \quad (6)$$

La relation (6) est évidente pour  $n = 0$  ; elle est vraie pour  $n = 1$  d'après (2).

Supposons qu'elle soit vraie pour un entier  $n \geq 1$ . Alors

$$\begin{aligned} n+1 \circ v - v \circ n+1 &= u \circ (u^n \circ v - v \circ u^n) + u \circ v \circ u^n - v \circ u^{n+1} \\ &= na \cdot u^{n+1} + (u \circ v - v \circ u) \circ u^n && \text{(HR)} \\ &= na \cdot u^{n+1} + a \cdot u^{n+1} && \text{(par (2))} \\ &= (n+1)a \cdot u^{n+1}. \end{aligned}$$

La relation (6) est donc établie par récurrence.

Si  $u^n$  n'est pas l'endomorphisme nul de  $E$ , cela signifie que  $u^n$  est un vecteur propre de l'endomorphisme

$$\varphi = [w \mapsto w \circ v - v \circ w] \in L(E).$$

Or  $L(E)$  est un espace de dimension finie (sa dimension est égale à  $(\dim E)^2$ ), donc l'endomorphisme  $\varphi$  ne peut avoir qu'un nombre *fini* de valeurs propres distinctes.

Si  $u$  n'était pas nilpotent, l'endomorphisme  $\varphi$  admettrait pour valeurs propres tous les complexes  $na$ , quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $a \neq 0$ , il aurait donc une infinité de valeurs propres : c'est impossible.

Donc  $u$  est nilpotent.

2. c. Puisque  $u$  n'est pas inversible, son noyau n'est pas réduit au vecteur nul : c'est donc un sous-espace complexe de dimension au moins égale à 1.

Pour tout vecteur  $x \in \text{Ker } u$ , d'après (2), on a  $(u \circ v)(x) = 0_E$ , ce qui prouve que  $v(x) \in \text{Ker } u$  et donc que  $\text{Ker } u$  est stable par  $v$ .

Le même raisonnement que celui qu'on a déjà tenu deux fois s'applique : l'endomorphisme  $v$  admet un vecteur propre  $x_0$  dans  $\text{Ker } u$  et comme  $x_0$  est un vecteur *non nul* de  $\text{Ker } u$ , c'est aussi un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre 0. On a ainsi démontré que  $u$  et  $v$  admettaient un vecteur propre commun.

🔗 *Le fait que  $u$  soit nilpotent ne nous a servi à rien. (Mais la question de la nilpotence de  $u$  est archi-classique.)*

3. Soit  $\alpha$ , un nombre complexe quelconque. Il est clair que

$$\begin{aligned}(u + \alpha v) \circ v - v \circ (u + \alpha v) &= u \circ v - v \circ u \\ &= au + bv \\ &= a(u + \alpha v) + (b - a\alpha)v\end{aligned}\quad (\text{par (3)})$$

Comme  $a \neq 0$ , on peut choisir  $\alpha = b/a$  et constater que

$$(u + \alpha v) \circ v - v \circ (u + \alpha v) = a(u + \alpha v)$$

avec  $a \in \mathbb{C}^*$ . On peut donc appliquer le résultat de la question précédente aux endomorphismes  $(u + \alpha v)$  et  $v$  : ils admettent un vecteur propre  $x_0$  commun.

Il existe donc deux complexes  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$(u + \alpha v)(x_0) = \lambda x_0 \quad \text{et} \quad v(x_0) = \mu x_0.$$

On en déduit que

$$u(x_0) = (\lambda - \alpha\mu)x_0$$

et comme  $x_0 \neq 0_E$ , c'est donc un vecteur propre commun à  $u$  et à  $v$ .

## Solution 20

kh09-02

Si  $B$  est inversible, alors

$$BA = B(AB)B^{-1}$$

donc  $BA$  et  $AB$  sont semblables et ont donc même polynôme caractéristique.

✱ On suppose que le rang de  $B$  est égal à  $0 \leq r \leq n$  et on reprend les notations de l'énoncé. On pose  $A' = QAP$  de telle sorte que

$$AB = (Q^{-1}A'P^{-1})(PJ_rQ) = Q^{-1}(A'J_r)Q.$$

Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, alors  $AB$  et  $A'J_r$  ont même polynôme caractéristique.

En décomposant  $A'$  en blocs sur le modèle de la matrice  $J_r$ ,

$$\begin{aligned}J_r &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & A' &= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \\ A'J_r &= \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix} & J_rA' &= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $t \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned}\det(A'J_r - tI_n) &= \begin{vmatrix} M_1 - tI_r & 0 \\ M_3 & -tI_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= \det(M_1 - tI_r) \det(-tI_{n-r}) \\ &= \begin{vmatrix} M_1 - tI_r & M_2 \\ 0 & -tI_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= \det(J_rA' - tI_n).\end{aligned}$$

Par conséquent,  $A'J_r$  et  $J_rA'$  ont même polynôme caractéristique.

Les matrices  $J_rA'$  et  $PJ_rA'P^{-1}$  sont semblables et

$$PJ_rA'P^{-1} = (PJ_rQ)(Q^{-1}A'P^{-1}) = BA,$$

donc  $J_rA'$  et  $BA$  ont même polynôme caractéristique.

On a ainsi démontré que les matrices  $AB$  et  $BA$  avaient même polynôme caractéristiques.

En particulier, ces deux matrices ont même spectre et mêmes sous-espaces caractéristiques. En reprenant les calculs précédents et en raisonnant sur le rang des différentes matrices, on démontre que

$$\forall t \in \mathbb{K}^*, \quad \text{rg}(AB - tI_n) = \text{rg}(BA - tI_n).$$

Par conséquent, les sous-espaces propres de  $AB$  et de  $BA$  associés à une valeur propre non nulle sont deux à deux isomorphes.

Si on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors  $AB = 0_2$  tandis que  $BA = 2A \neq 0_2$ , donc  $\text{rg}(AB) \neq \text{rg}(BA)$  et les noyaux des deux matrices ne sont pas isomorphes. Cependant, on a bien  $\chi_{AB} = \chi_{BA} = X^2$  (la matrice  $BA$  est nilpotente d'indice 2).

## Solution 21

rms120-877

1. Par hypothèse, le polynôme  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  est un polynôme annulateur de  $f$ . Or les polynômes  $(X - 1)$  et  $(X^2 + X + 1)$  sont premiers entre eux.

Tout polynôme de degré 1 est irréductible.

Tout polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 2 et de discriminant strictement négatif est irréductible.

Deux polynômes irréductibles qui ne sont pas premiers entre eux sont proportionnels. Donc  $(X - 1)$  et  $(X^2 + X + 1)$  sont premiers entre eux.

On déduit du théorème de décomposition des noyaux que

$$E = \text{Ker}(f - I_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + I_E). \quad (\dagger)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(f^2 + f + I_E) &= \dim E - \dim \text{Ker}(f - I_E) \\ &= \dim \text{Im}(f - I_E) \end{aligned} \quad (\text{Théorème du rang})$$

et comme  $(f^2 + f + I_E) \circ (f - I_E) = (f^3 - I_E)$  est l'endomorphisme nul, alors  $\text{Im}(f - I_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + I_E)$ .

La relation  $\varphi \circ \psi = \omega_E$  (endomorphisme nul) équivaut à l'inclusion  $\text{Im } \psi \subset \text{Ker } \varphi$ , quelles que soient les applications linéaires  $\varphi$  et  $\psi$ .

Ayant démontré une inclusion et l'égalité des dimensions (finies!), on a démontré l'égalité des espaces vectoriels :

$$\text{Im}(f - I_E) = \text{Ker}(f^2 + f + I_E)$$

On peut donc réécrire l'égalité  $(\dagger)$  sous la forme

$$E = \text{Ker}(f - I_E) \oplus \text{Im}(f - I_E) \quad (\ddagger)$$

Quel que soit le polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } P(f)$  et  $\text{Im } P(f)$  sont stables par  $f$ . Par conséquent, on a décomposé  $E$  en somme directe de deux sous-espaces stables par  $f$ .

2. Supposons que le sous-espace  $F = \text{Im}(f - I_E) = \text{Ker}(f^2 + f + I_E)$  ne soit pas réduit au vecteur nul. Il existe donc un vecteur  $x_1 \neq 0$  dans  $F$ .

Si le couple  $(x_1, f(x_1))$  est une famille liée, alors  $f(x_1)$  est proportionnel à  $x_1$  : il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_1) = \lambda \cdot x_1$ .

On peut traduire la liaison entre les vecteurs par une relation de proportionnalité **uniquement** parce qu'on sait que le vecteur  $x_1$  n'est pas le vecteur nul.

En général, un couple de vecteurs  $(x, y)$  est une famille liée si, et seulement si,  $x = 0_E$  ou si  $y$  est proportionnel à  $x$ .

Il convient d'être attentif à ce genre de détail — ça fait toujours mauvais effet de diviser par zéro.

Par conséquent,  $f^2(x_1) = \lambda^2 \cdot x_1$  et comme  $x_1 \in F$ , on en déduit que

$$0_E = (f^2 + f + I_E)(x_1) = (\lambda^2 + \lambda + 1) \cdot x_1. \quad (\star)$$

Or  $x_1 \neq 0_E$  et  $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$  (puisque  $\lambda$  est réel) : c'est absurde! Par conséquent, la famille  $(x_1, f(x_1))$  est libre et

$$P_1 = \text{Vect}(x_1, f(x_1))$$

est un plan contenu dans  $F$ .

▮ On a choisi  $x_1 \in F$  et on a remarqué que  $F$  était stable par  $f$ . Par conséquent,  $f(x_1) \in F$  et comme  $F$  est un espace vectoriel qui contient  $x_1$  et  $f(x_1)$ , il contient le plan  $P_1$  engendré par ces deux vecteurs.

Par ailleurs,  $f(x_1) \in P_1$  et, d'après  $(*)$ ,

$$f^2(x_1) = -x_1 - f(x_1) \in \text{Vect}(x_1, f(x_1)) = P_1.$$

Donc le plan  $P_1$  est bien stable par  $f$ .

• **Hypothèse de récurrence** — Supposons qu'il existe  $r-1$  plans  $P_1, \dots, P_{r-1}$  stables par  $f$  et tels que

$$F_{r-1} = \bigoplus_{k=1}^{r-1} P_k \subset F.$$

Si  $F_{r-1} = F$ , alors le résultat est démontré.

Si cette inclusion est une égalité stricte :  $F_{r-1} \subsetneq F$ , alors il existe un vecteur  $x_r \in F$  tel que  $x_r \notin F_{r-1}$ . En particulier, le vecteur  $x_r$  n'est pas le vecteur nul puisque  $F_{r-1}$  est un sous-espace vectoriel (et contient donc le vecteur nul).

Le raisonnement qu'on a fait pour  $x_1$  s'applique encore : on a

$$f^2(x_r) = -x_r - f(x_r), \quad (**)$$

le couple  $(x_r, f(x_r))$  est une famille libre et le plan

$$P_r = \text{Vect}(x_r, f(x_r))$$

est stable par  $f$  et contenu dans  $F$ . Il reste à vérifier que  $P_r$  et  $F_{r-1}$  sont en somme directe.

Considérons une combinaison linéaire

$$u = \alpha x_r + \beta f(x_r) \in F_{r-1} \cap P_r.$$

Comme  $P_r$  est stable par  $f$  et que  $F_{r-1}$  est stable par  $f$  (c'est une somme de sous-espaces vectoriels stables par  $f$ ), alors

$$f(u) = \alpha f(x_r) + \beta f^2(x_r) \stackrel{(**)}{=} -\beta x_r + (\alpha - \beta)f(x_r) \in F_{r-1} \cap P_r.$$

Or  $P_r$  est un plan et n'est pas contenu dans  $F_{r-1}$ . Par conséquent, la dimension de l'intersection  $F_{r-1} \cap P_r$  ne peut être égale qu'à 0 ou à 1.

On a trouvé deux vecteurs  $u$  et  $f(u)$  dans cette intersection, ils forment donc une famille liée. Or on a décomposé ces deux vecteurs dans la famille  $(x_r, f(x_r))$ , qui est une famille libre. Par conséquent,

$$0 = \det \mathcal{M}_{(x_r, f(x_r))}(u, f(u)) = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha - \beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4}.$$

▮ On trouve cette dernière décomposition en cherchant à mettre "sous forme canonique" une expression du second degré.

Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels, on en déduit que  $\alpha = \beta = 0$  et donc que l'intersection  $F_{r-1} \cap P_r$  est réduite au vecteur nul. On a ainsi démontré que  $F_{r-1}$  et  $P_r$  étaient en somme directe et donc que

$$F_r = F_{r-1} \oplus P_r = \bigoplus_{k=1}^r P_k \subset F.$$

• Comme  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie, il existe un entier  $d$  tel que  $\dim F \leq 2d$ . Par conséquent, l'indice  $r$  est nécessairement inférieur à  $d$  et il existe une décomposition

$$F = \bigoplus_{k=1}^N P_k$$

en somme directe de plans stables par  $f$ .

▮ On a démontré en particulier que la dimension de  $F$  était un entier pair (égal à  $2N$  d'après la conclusion).

## Solution 22

rms120-978

Par hypothèse, le polynôme  $X^4 + X = X(X^3 + 1)$  est un polynôme annulateur de  $f$ . De plus, les facteurs  $X$  et  $X^3 + 1$  sont premiers entre eux.

Les arguments possibles ne manquent pas pour démontrer que deux polynômes sont premiers entre eux.

Le facteur  $X$  est **irréductible** (puisque son degré est égal à 1) et il ne divise pas  $X^3 + 1$  (puisque le reste de la division de  $X^3 + 1$  par  $X$  est égal à 1). Donc les deux polynômes sont premiers entre eux.

Variante :  $X$  est **scindé** et n'a pas de racine commune avec  $X^3 + 1$ , donc  $X$  et  $X^3 + 1$  sont premiers entre eux.

Autre variante :  $(X^3 + 1) + (-X^2)X = 1$ , donc  $X$  et  $X^3 + 1$  sont premiers entre eux par **Bézout**.

D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^3 + I_E). \quad (*)$$

De plus, si  $x \in \text{Ker}(f^3 + I_E)$ , alors  $f^3(x) + x = 0_E$ , donc  $x = f(-f^2(x)) \in \text{Im } f$ . Mais d'après (\*) et le Théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f^3 + I_E) = \dim E - \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f.$$

On a prouvé une inclusion et les dimensions (finies!) sont égales, donc les deux sous-espaces vectoriels sont égaux :  $\text{Im } f = \text{Ker}(f^3 + I_E)$ . Par conséquent,

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f. \quad (\dagger)$$

Si on a prouvé que les facteurs étaient premiers entre eux à l'aide du Théorème de Bézout, on déduit de  $(X^3 + 1) - X^3 = 1$  que

$$\forall x \in E, \quad x = I_E(x) = \underbrace{(f^3 + I_E)(x)}_{\in \text{Ker } f} + \underbrace{f(-f^2(x))}_{\in \text{Im } f}$$

et, d'après le cours,  $(f^3 + I_E)$  et  $-f^3$  sont les projections associées à la décomposition de  $E$  en somme directe.

La propriété ( $\dagger$ ) est vraie si, et seulement si,  $f$  admet un polynôme annulateur dont 0 est racine simple — mais ceci est un autre exercice!

## Solution 23

rms120-982

1. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , les coefficients diagonaux de  $A$  et  $L_1, \dots, L_n$ , les polynômes interpolateurs de Lagrange qui sont associés à ces scalaires (supposés deux à deux distincts).

Comme  $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad L_k(A) = \text{Diag}(L_k(\lambda_1), \dots, L_k(\lambda_n)) = E_{k,k}.$$

Par conséquent,

$$D_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}) \subset \mathbb{C}[A]$$

et plus précisément

$$D_n(\mathbb{C}) \subset \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$$

puisque les polynômes de Lagrange sont des polynômes de degré  $(n-1)$ .

Comme  $A$  est diagonale, il est clair que tout polynôme en  $A$  est une matrice diagonale. On a donc démontré que

$$D_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) = \mathbb{C}[A].$$

Il reste à vérifier que  $(A^k)_{0 \leq k < n}$  est une famille libre.

Comme  $A$  est diagonale, son polynôme minimal  $\mu$  est scindé à racines simples. Comme ce polynôme est unitaire et que ses racines sont les valeurs propres de  $A$ , c'est-à-dire ses coefficients diagonaux, alors

$$\mu = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

puisque les  $\lambda_k$  sont deux à deux distincts. On sait que

$$\dim \mathbb{C}[A] = \deg \mu_A,$$

donc  $(A^k)_{0 \leq k < n}$  est une famille de  $n$  vecteurs qui engendre un espace vectoriel de dimension  $n$  : c'est donc une base.

✎ Il est intéressant de bien savoir sur quoi repose le théorème appliqué ici.  
La relation de liaison

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0_n$$

signifie que le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$$

est un polynôme annulateur de  $A$  et donc qu'il est divisible par le polynôme minimal. Or  $\deg P \leq n-1$  et  $\deg \mu = n$ , donc  $P = 0$  et les scalaires  $\alpha_k$  sont tous nuls.

♣ **Variante.**

On sait que la famille  $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$  des polynômes interpolateurs de Lagrange est une base de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  et que

$$\forall 0 \leq k < n, \quad X^k = \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell^k L_\ell.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 0_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left( \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell^k L_\ell \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^n \left( \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_\ell^k \right) L_\ell(A). \end{aligned}$$

Or  $L_\ell(A) = E_{\ell,\ell}$ , donc

$$\forall 1 \leq \ell \leq n, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_\ell^k = 0.$$

On reconnaît bien entendu un système de Vandermonde et comme les  $\lambda_\ell$  sont deux à deux distincts, ce système est inversible, donc tous les  $\alpha_k$  sont nuls.

2. Toute matrice triangulaire de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  ayant  $n$  coefficients diagonaux distincts est diagonalisable. Par conséquent,

$$A = \text{Diag}(1, 2, \dots, n) \quad \text{et} \quad B = A + E_{1,n}$$

sont diagonalisables. Si l'ensemble des matrices diagonalisables était un sous-espace vectoriel, alors  $B - A = E_{1,n}$  serait diagonalisable.

Mais  $E_{1,n}$  est nilpotente (d'indice 2) et n'est pas la matrice nulle, donc elle n'est pas diagonalisable.

✎ C'est **toujours** du côté des matrices triangulaires ou nilpotentes qu'il faut se tourner pour trouver des exemples simples de matrices non diagonalisables.

## Solution 24

rms120-983

1. Par hypothèse, le polynôme  $X^2 - 2X - 8 = (X - 4)(X + 2)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

Comme ce polynôme est scindé à racines simples, la matrice  $A$  est diagonalisable.

♣ Les valeurs propres de  $A$  sont nécessairement des racines de ce polynôme. Par conséquent, 0 n'est pas valeur propre de  $A$  et la matrice  $A$  est donc inversible.

✎ On peut aussi déduire l'inverse de  $A$  de ce polynôme annulateur :

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot (A - 2I_n).$$

2. D'après Bézout, les polynômes  $(X - 4)$  et  $(X + 2)$  sont premiers entre eux :

$$\frac{1}{6} \cdot (X + 2) - \frac{1}{6} \cdot (X - 4) = 1.$$

D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \text{Ker}(A + 2I) \oplus \text{Ker}(A - 4I).$$

✎ On n'en pas besoin ici mais il est bon de savoir que les matrices

$$\Pi_4 = \frac{1}{6} \cdot (2I + A) \quad \text{et} \quad \Pi_{-2} = \frac{1}{6} \cdot (4I - A)$$

(qui sont données par la relation de Bézout) sont les projections associées à la décomposition de  $E$  en somme directe.

✎ Soit  $M \in \text{Vect}(I, A)$ .

Comme  $A$  est diagonalisable, tout polynôme en  $A$  est diagonalisable. Plus précisément, tout vecteur propre de  $A$  est aussi un vecteur propre de  $M$  et si  $M = aA + bI$ , alors

$$\forall X \in \text{Ker}(A + 2I), \quad MX = (-2a + b)X$$

$$\forall X \in \text{Ker}(A - 4I), \quad MX = (4a + b)X.$$

De plus, si  $(X - 4)(X + 2)$  est un polynôme annulateur de  $M$ , alors  $\text{Sp}(M) \subset \{4, -2\}$ .

On distingue donc quatre possibilités.

— Si  $-2a + b = 4a + b = 4$ , alors  $(a, b) = (0, 4)$  et  $M = 4I$ .

— Si  $-2a + b = 4a + b = -2$ , alors  $(a, b) = (0, -2)$  et  $M = -2I$ .

— Si  $-2a + b = -2$  et  $4a + b = 4$ , alors  $(a, b) = (1, 0)$  et  $M = A$ .

— Si  $-2a + b = 4$  et  $4a + b = -2$ , alors  $(a, b) = (-1, 2)$  et  $M = 2I - A$ .

✎ Réciproquement, ces quatre matrices appartiennent bien à  $\text{Vect}(I, A)$ , donc elles sont diagonalisables. En particulier, leurs polynômes minimaux sont scindés à racines simples.

Comme les spectres de ces matrices sont tous contenus dans  $\{4, -2\}$ , le polynôme  $(X - 4)(X + 2)$  est un polynôme annulateur de chacune d'elles.

Ce sont donc les seules solutions de  $M^2 = 2M + 8I$  dans  $\text{Vect}(I, A)$ .

✎ La réciproque est inévitable, car on a commencé en raisonnant par condition nécessaire.

## Solution 25

rms120-985

Si la dimension  $n$  est impaire, alors le degré du polynôme caractéristique de  $A$  est impair. Un polynôme à coefficients réels dont le degré est impair possède au moins une racine réelle (Théorème des valeurs intermédiaires).

Or les racines du polynôme caractéristique de  $A$  sont les valeurs propres de  $A$ , donc  $A$  possède une valeur propre réelle  $\alpha$ .

Par hypothèse, le polynôme  $X^2 + 1$  est un polynôme annulateur de  $A$  et toute valeur propre de  $A$  est nécessairement une racine de ce polynôme. Donc  $A$  n'a pas de valeur propre réelle!

Il faut donc que la dimension  $n$  soit paire.

✎ Voir aussi rms120-986 et rms120-877 pour des situations similaires.

## Solution 26

rms120-986

1. Le polynôme  $P = X^3 - X - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

L'application polynomiale associée à  $P$  atteint un maximum local en  $-1/\sqrt{3}$  et ce maximum local est strictement négatif. Par conséquent, le polynôme  $P$  admet une, et une seule, racine réelle  $\alpha$ .

Comme  $P(1) = -1 < 0$  et que  $P'(x) = 3x^2 - 1 > 0$  pour tout  $x \geq 1$ , cette racine  $\alpha$  est strictement supérieure à 1 et  $P'(\alpha) > 0$ . En particulier,  $\alpha > 0$  et  $\alpha$  est une racine simple de  $P$ .

Comme le polynôme  $P$  est réel et que son degré est égal à 3, il admet donc deux autres racines complexes conjuguées  $\beta$  et  $\bar{\beta}$ , toutes deux de multiplicité 1.

✎ En tant que matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la matrice  $A$  admet donc un polynôme annulateur scindé à racines simples. Elle est donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2. Comme la matrice  $A$  est trigonalisable, son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres comptées avec multiplicité et comme  $A$  est en fait diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

$$\det A = \alpha^{m_\alpha} \cdot \beta^{m_\beta} \cdot \bar{\beta}^{m_{\bar{\beta}}}$$

✎ Dans le même ordre d'idée,

$$\text{tr } A = m_\alpha \cdot \alpha + m_\beta \cdot \beta + m_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\beta}$$

*mais il n'y a pas grand'chose à en déduire ici !*

Comme  $A$  est une matrice réelle, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres complexes conjuguées sont isomorphes, donc  $m_{\bar{\beta}} = m_{\beta}$  et

$$\det A = \alpha^{m_{\alpha}} \cdot (\beta \bar{\beta})^{m_{\beta}} > 0$$

puisque  $\alpha > 0$  et et que  $\beta \bar{\beta} = |\beta|^2 > 0$ .

▮ Si  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre complexe  $\beta$ , alors  $AX = \beta X$  et, en conjuguant,

$$\bar{\beta} \cdot \bar{X} = \overline{\beta \cdot X} = \overline{AX} = \overline{A \cdot XA \cdot X}$$

puisque  $A$  est une matrice **réelle** !

La conjugaison complexe étant une involution, on en déduit que  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\beta$  si, et seulement si,  $\bar{X}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\bar{\beta}$ .

On en déduit que les deux sous-espaces propres sont isomorphes bien que l'application  $[X \mapsto \bar{X}]$  ne soit pas un isomorphisme ! (Cette application n'est pas linéaire...)

On justifie l'existence d'un isomorphisme en vérifiant qu'une famille  $(X_k)_{1 \leq k \leq r}$  est une famille libre de vecteurs propres associés à  $\beta$  si, et seulement si, la famille  $(\bar{X}_k)_{1 \leq k \leq r}$  est une famille libre de vecteurs propres associés à  $\bar{\beta}$ .

## Solution 27

**rms120-987**

Comme la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  admet  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , elle est diagonalisable et admet donc

$$\mu = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \quad (*)$$

pour polynôme minimal.

Tout polynôme de degré 1 est irréductible et des polynômes irréductibles qui ne sont pas associés sont deux à deux premiers entre eux. D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker}(A - \lambda_k I_n). \quad (\dagger)$$

• Comme les scalaires  $\lambda_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sont deux à deux distincts, on peut considérer les polynômes interpolateurs de Lagrange  $L_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , qui leur sont associés.

• Posons la division euclidienne de  $X^p$  par le polynôme minimal  $\mu$  : il existe un quotient  $Q_p \in \mathbb{R}[X]$  et un reste  $R_p$  tels que

$$X^p = \mu \cdot Q_p + R_p \quad \text{avec} \quad \deg R_p < \deg \mu = n.$$

En particulier,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \lambda_k^p = \mu(\lambda_k) \cdot Q_p(\lambda_k) + R_p(\lambda_k) \stackrel{(*)}{=} R_p(\lambda_k).$$

Comme  $\deg R_p < n$ , alors  $R_p$  est l'unique polynôme interpolateur du nuage de points  $(\lambda_k, \lambda_k^p)$  dont le degré soit strictement inférieur à  $n$  et par conséquent

$$R_p = \sum_{k=1}^n \lambda_k^p L_k.$$

• Comme  $\mu$  est un polynôme annulateur de  $A$ , on déduit aussi de  $(*)$  que

$$A^p = \mu(A) \cdot Q_p(A) + R_p(A) = R_p(A)$$

et donc que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \sum_{k=1}^n \lambda_k^p L_k(A). \quad (\ddagger)$$

On a démontré le résultat attendu avec  $\alpha_k = \lambda_k$  et  $M_k = L_k(A)$ .

▮ Dans ce contexte, les matrices  $L_k(A)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sont les projections associées à la décomposition en somme directe  $(\ddagger)$  car

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^n L_k(A)(x)$$

en prenant  $p = 0$  dans la relation (†) et

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad L_k(A)(x) \in \text{Ker}(A - \lambda_k I_n)$$

puisque

$$(A - \lambda_k I_n)(L_k(A)(x)) = \mu(A)(x) = 0_E.$$

### Solution 28

rms120-988

1. En calculant le polynôme caractéristique de  $A$  avec soin (= sans appliquer la règle de Sarrus), on trouve que

$$\chi_A = (X - 1)(X^2 + X - 8).$$

Le discriminant de  $X^2 + X - 8$  est strictement positif et 1 n'est pas racine de ce trinôme. Par conséquent, le polynôme caractéristique possède trois racines réelles distinctes.

Comme  $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ , on en déduit que  $A$  est diagonalisable et que ses trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

🔗 Il faut lire l'énoncé et ne pas l'interpréter : on ne demande pas de préciser les valeurs propres de  $A$  et encore moins de calculer une base de vecteurs propres ! Pas d'efforts inutiles !

2. Posons  $P_0 = X^5 + X^3 + X$ . On cherche ici une matrice  $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $P_0(M) = A$ .

🔗 Ici aussi, il ne faut pas interpréter l'énoncé : on ne cherche pas toutes les matrices  $M$  telles que  $P_0(M) = A$  mais seulement une matrice  $M$  qui vérifie cette propriété.

♣ D'après la question précédente, il existe trois réels distincts  $\alpha = 1$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  et une matrice inversible  $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  tels que

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma).$$

♣ Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on sait que

$$P(Q^{-1}MQ) = Q^{-1}[P(M)]Q$$

et par conséquent :

$$P_0(M) = A \iff P_0(Q^{-1}MQ) = Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma).$$

♣ Par ailleurs, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on sait que

$$P(\text{Diag}(a, b, c)) = \text{Diag}(P(a), P(b), P(c)).$$

Cela nous incite à chercher une matrice  $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$Q^{-1}MQ = \text{Diag}(a, b, c) \quad \text{avec} \quad (P_0(a), P_0(b), P_0(c)) = (\alpha, \beta, \gamma).$$

♣ L'application polynomiale  $[t \mapsto P_0(t)]$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $P'_0(t) = 5t^4 + 3t^2 + 1 \geq 1 > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Donc cette application est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, il est clair que  $P_0(t)$  tend vers  $+\infty$  (resp. vers  $-\infty$ ) lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  (resp. vers  $-\infty$ ), donc cette application réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et il existe un unique triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$(P_0(a), P_0(b), P_0(c)) = (\alpha, \beta, \gamma).$$

La matrice  $M$  définie par

$$M = Q \text{Diag}(a, b, c) Q^{-1}$$

vérifie donc  $P_0(M) = A$ .

🔗 Et on ne cherchera surtout pas à calculer les coefficients de cette matrice !

**Solution 29**

rms128-646

Supposons qu'il existe un vecteur  $W \neq 0$  dans  $\text{Ker } A \cap \text{Ker } B$ . Alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (xA + yB)W = xAW + yBW = 0$$

et donc  $\det(xA + yB) = 0$ .

☞ D'après le Théorème du rang, le déterminant d'une matrice carrée est nul si, et seulement si, le noyau de cette matrice n'est pas réduit au vecteur nul.

♣ Par hypothèse, il existe quatre vecteurs colonnes  $U, V, X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , tous distincts de la colonne nulle, tels que

$$AX = BY = 0, \quad AU = BU \quad \text{et} \quad AV = -BV. \quad (*)$$

Nous noterons  $f$  et  $g$ , les endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associés aux matrices  $A$  et  $B$ .

♣ **Premier cas :** Supposons que deux des quatre vecteurs  $X, Y, U$  et  $V$  sont colinéaires. Nous allons montrer que  $\text{Ker } A \cap \text{Ker } B \neq \{0\}$  (ce qui permettra de conclure).

☞ Il y a  $\binom{4}{2} = 6$  choix possibles, qui se ramènent tous au même raisonnement. Nous allons donc présenter le raisonnement sous forme abstraite.

On considère deux applications linéaires  $\varphi$  et  $\psi$  définies sur un espace vectoriel  $E$  et à valeurs dans un espace vectoriel  $F$ .

On suppose qu'il existe deux vecteurs colinéaires *non nuls*  $x$  et  $y$  tels que  $\varphi(x) = \psi(y) = 0_F$ .

Il existe donc deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  (non nuls) et un vecteur  $u \in E$  (non nul) tels que  $x = \alpha \cdot u$  et  $y = \beta \cdot u$  et de plus  $\varphi(u) = \psi(u) = 0_F$ .

Par conséquent, pour toute application linéaire  $T \in \text{Vect}(\varphi, \psi)$ , on a aussi  $T(u) = 0_F$ .

♣ En prenant deux matrices quelconques parmi  $A, B, A+B$  et  $A-B$ , on a toujours une famille génératrice de  $\text{Vect}(A, B)$ .

On a ainsi démontré que les noyaux des matrices  $A$  et  $B$  avaient au moins un vecteur non nul en commun et ce vecteur appartient au noyau de toute combinaison linéaire  $xA + yB$ .

♣ **Deuxième cas :** On suppose dorénavant que les vecteurs  $X, Y, U$  et  $V$  sont deux à deux non colinéaires. En particulier, le couple  $(U, V)$  est une famille libre et nous supposons ici de plus que  $X \in \text{Vect}(U, V)$ . Autrement dit, nous supposons qu'il existe deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$X = \alpha U + \beta V.$$

Comme les couples  $(X, U)$  et  $(X, V)$  sont libres, les scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  sont *tous les deux non nuls*.

Par hypothèse,  $AX = 0$ , donc

$$0 = \alpha AU + \beta AV$$

et comme  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , les colonnes  $AU$  et  $AV$  sont colinéaires : il existe une colonne  $W$ , *non nulle*, et deux scalaires  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $AU = \lambda W$  et  $AV = \mu W$ .

Par hypothèse, on a aussi  $BU = AU = \lambda W$  et  $BV = -AV = -\mu W$ . Par conséquent,

$$(xA + yB)U = \lambda(x + y)W \quad \text{et} \quad (xA + yB)V = \mu(x - y)W.$$

Les deux vecteurs  $(xA + yB)U$  et  $(xA + yB)V$  sont donc proportionnels.

Le couple  $(U, V)$  est (par hypothèse) une famille libre et son image par  $(xA + yB)$  est une famille liée. Le sous-espace  $\text{Vect}(U, V)$  contient donc un vecteur *non nul* du noyau de  $(xA + yB)$ .

☞ Contrairement au cas précédent, on n'a pas démontré que les noyaux de  $A$  et de  $B$  avaient un vecteur non nul en commun. Et pour cause ! Les déterminants des quatre matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont tous nuls mais l'intersection  $\text{Ker } A \cap \text{Ker } B$  est réduite au vecteur nul puisque  $\text{Ker } A = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 0)$  et  $\text{Ker } B = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 0)$ .

♣ **Troisième (et dernier) cas :** Nous supposons pour finir que la famille  $(U, V, X)$  est libre. Il s'agit donc d'une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Rappelons que, par hypothèse,

$$AU = BU, \quad AV = -BV, \quad AX = 0.$$

Il existe donc trois colonnes  $C_1, C_2$  et  $C_3$  telles que

$$\begin{aligned}\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(AU, AV, AX) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{et } \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(g) &= \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(BU, BV, BX) = \begin{pmatrix} C_1 & -C_2 & C_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Par conséquent, la combinaison linéaire  $x A + y B$  est semblable à la matrice

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} (x+y)C_1 & (x-y)C_2 & yC_3 \end{pmatrix}.$$

• C'est le moment de se rappeler qu'il existe une colonne  $Y$  *non nulle* telle que  $BY = 0$ . Autrement dit, les colonnes de la matrice  $B$  forment une famille *liée*. Par conséquent, les colonnes de la matrice  $M_{x,y}$  forment une famille liée elle aussi, ce qui prouve que la matrice  $M_{x,y}$  n'est pas inversible.

Deux matrices semblables ont même rang, donc la matrice  $x A + y B$  n'est pas inversible et son déterminant est donc nul.

### Solution 30

rms128-647

Il est clair que  $f_k$  est une fonction dérivable et que  $f'_k = f_{k-1}$  pour tout  $k \geq 1$ . En outre,  $f'_0$  est la fonction nulle.

• En notant  $a_{i,j}(x)$ , les coefficients de la matrice, la formule du déterminant nous donne

$$D_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)}(x) \cdots a_{n,\sigma(n)}(x).$$

La fonction  $D_n$  est une combinaison linéaire de produits de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , c'est donc une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

• Notons  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ , les colonnes de la matrice. La formule de Leibniz pour la dérivation d'une forme  $n$ -linéaire nous dit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D'_n(x) = \sum_{k=1}^n \det(C_1(x), \dots, C_{k-1}(x), C'_k(x), C_{k+1}(x), \dots, C_n(x))$$

et on vérifie facilement que

$$\forall 1 \leq k < n, \quad C'_k(x) = C_{k+1}(x).$$

Comme le déterminant est une forme alternée, on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad D'_n(x) &= \sum_{1 \leq k < n} \det(C_1(x), \dots, C_{k-1}(x), C_{k+1}(x), C_{k+1}(x), \dots, C_n(x)) \\ &\quad + \det(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), C'_n(x)) \\ &= \det(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), E_n)\end{aligned}$$

où  $E_n$  est le dernier vecteur de la base canonique de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

En développant par la dernière colonne, on trouve donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D'_n(x) = D_{n-1}(x).$$

Il est clair que  $D_2(x) = x^2/2$  (produit en croix) et que  $D_n(0) = 0$  pour tout  $n \geq 2$  (matrice triangulaire supérieure stricte). On en déduit par récurrence (= par primitivations successives) que

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

### Solution 31

rms128-659

L'application  $[M \mapsto AMA]$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  (par bilinéarité du produit matriciel), donc son noyau  $E_A$  est un sous-espace de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

• Ce n'est pas parce que la question n'est pas posée qu'il ne faut pas y répondre !

1. Si  $A$  est diagonalisable et si son rang est égal à  $r$ , alors il existe une matrice diagonale et inversible  $D \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$  et une matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telles que

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(D, 0_{n-r}).$$

L'équation  $AMA = 0_n$  devient alors

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}MP)(P^{-1}AP) = 0_n$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = 0_n \quad \text{où} \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les produits par blocs, on arrive à

$$\begin{pmatrix} DM_1D & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

et comme la matrice  $D$  est inversible, la matrice  $M$  appartient au sous-espace  $E_A$  si, et seulement si, le bloc  $M_1$  est la matrice nulle.

Autrement dit, la matrice  $M$  appartient au sous-espace  $E_A$  si, et seulement si, il existe trois blocs  $M_2 \in \mathfrak{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})$ ,  $M_3 \in \mathfrak{M}_{n-r, r}(\mathbb{R})$  et  $M_4 \in \mathfrak{M}_{n-r}(\mathbb{R})$  tels que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0_r & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}.$$

L'application  $[X \mapsto P^{-1}XP]$  est un automorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , donc la dimension du sous-espace  $E_A$  est égale à  $(n^2 - r^2)$ .

✎ *Manifestement, c'est le rang de  $A$  qui compte et non le fait d'être diagonalisable ou non !*

2. Si le rang de  $A$  est égal à  $r$ , alors  $A$  est équivalente à la matrice  $J_r$  : il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que

$$Q^{-1}AP = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

L'équation  $AMA = 0_n$  devient cette fois

$$(Q^{-1}AP)(P^{-1}MQ)(Q^{-1}AP) = 0_n$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = 0_n \quad \text{où} \quad P^{-1}MQ = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

soit enfin :  $M_1 = 0_r$ .

✎ *Les calculs sont encore plus simples que dans le cas diagonalisable !*

Comme les matrices  $P$  et  $Q$  sont inversibles, l'application  $[X \mapsto P^{-1}XQ]$  est un automorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  et, comme dans le cas particulier précédent, la dimension du sous-espace  $E_A$  est égale à  $(n^2 - r^2)$ .

### Solution 32

rms128-663

1. Comme  $u$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, cet endomorphisme est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles :

$$E = \bigoplus_{k=1}^n \mathbb{R} \cdot \varepsilon_k$$

Comme  $u$  et  $v$  commutent, les sous-espaces propres  $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_k$  de  $u$  sont stables par  $v$  et une droite stable par  $v$  est dirigée par un vecteur propre de  $v$ .

La famille  $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$  est donc une base de  $E$  constituée de vecteurs propres pour  $u$  qui sont aussi des vecteurs propres pour  $v$ .

Dans cette base, les endomorphismes  $u$  et  $v$  sont représentés par des matrices diagonales.

2. a. Les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  ne sont pas proportionnelles, donc  $E$  est un plan vectoriel. On note  $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$ , la base de référence de cet espace vectoriel.

La dérivation est un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Comme  $\sin' = \cos$  et que  $\cos' = -\sin$ , le sous-espace  $E$  est stable par dérivation et  $d$  est bien un endomorphisme de  $E$ .

✎ *L'application  $d$  est l'endomorphisme de  $E$  induit par restriction de la dérivation à ce sous-espace stable.*

La matrice de  $d$  relative à la base  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}^2.$$

L'endomorphisme  $f \in L(E)$  défini par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie donc  $f \circ f = d$ .

✎ Pour trouver  $f$  sans trop d'effort, il faut interpréter  $d$  comme la rotation plane d'angle  $\pi/2$  : une "racine carrée" de  $d$  est la rotation d'angle  $\pi/4$ .

**2. b.** Comme  $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$  est une base de  $E$ , il existe un, et un seul, endomorphisme de  $E$  tel que  $s(\sin) = \cos$  et  $s(\cos) = \sin$  (Théorème de caractérisation des applications linéaires).

✎ Cet endomorphisme est un automorphisme (l'image d'une base de  $E$  est encore une base de  $E$ ) et c'est en fait une symétrie car  $s \circ s = I_E$  :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que

$$s(\sin + \cos) = \sin + \cos \quad \text{et que} \quad s(\sin - \cos) = -(\sin - \cos)$$

donc la matrice de  $s$  dans la base  $\mathcal{C} = (\sin + \cos, \sin - \cos)$  est diagonale :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

✎ Toute symétrie est diagonalisable car elle admet un polynôme annulateur  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$  scindé à racines simples.

✎ Les deux vecteurs  $\sin + \cos$  et  $\sin - \cos$  sont distincts du vecteur nul (puisque  $\mathcal{B}$  est une famille libre). Ce sont donc des vecteurs propres de  $s$  associés à deux valeurs propres distinctes et ils constituent à ce titre une famille libre.

✎ Supposons qu'il existe un endomorphisme  $g \in L(E)$  tel que  $g \circ g = s$ . Alors  $g$  et  $s$  commutent ( $s$  est un polynôme en  $g$ ) et  $s$  est diagonalisable avec deux valeurs propres distinctes.

D'après la première question, la base  $\mathcal{C}$  est donc une base de vecteurs propres pour  $g$  également. On doit donc avoir deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g \circ g) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(s).$$

L'équation  $b^2 = -1$  n'a pas de solution réelle, donc il n'existe pas d'endomorphisme  $g \in L(E)$  tel que  $g \circ g = s$ .

### Solution 33

rms128-667

Comme la matrice  $P(A)$  est diagonalisable, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  scindé à racines simples tel que  $Q(P(A)) = 0_n$ . Autrement dit :  $(Q \circ P)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

✎ En particulier, toutes les valeurs propres de  $A$  sont des racines de  $(Q \circ P)$ .

Comme  $Q$  est à racines simples, ce n'est pas le polynôme nul. Et comme  $P'(A)$  est inversible, alors  $P$  n'est pas un polynôme constant. De ce fait, la composée  $Q \circ P$  n'est pas un polynôme constant.

✎ Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , une valeur propre de  $A$ .

Alors  $P(\lambda)$  est une valeur propre de  $P(A)$ , donc  $P(\lambda)$  est une racine de  $Q$  et comme les racines de  $Q$  sont simples, alors

$$Q'(P(\lambda)) \neq 0.$$

De plus, il existe donc un vecteur non nul  $X$  tel que  $AX = \lambda X$ .

✎ Pas de valeur propre sans vecteur propre !

On en déduit que  $P'(A)X = P'(\lambda)X$  et comme la matrice  $P'(A)$  est inversible par hypothèse, son noyau est réduit au vecteur nul. Ainsi,

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad P'(\lambda) \neq 0.$$

✎ Comme  $(Q \circ P)' = (Q' \circ P) \cdot P'$ , on déduit des remarques précédentes que

$$(Q \circ P)'(\lambda) = Q'(P(\lambda)) \cdot P'(\lambda) \neq 0.$$

✎ Le polynôme  $Q \circ P$  est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$  (Théorème de D'Alembert-Gauss). On a remarqué que toutes les valeurs propres de  $A$  étaient des racines de  $Q \circ P$  et on a démontré que c'était des racines simples.

On peut donc factoriser  $Q \circ P$  de la manière suivante :

$$Q \circ P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) \times \prod_{k=1}^r (X - \mu_k)^{m_k},$$

aucun des scalaires  $\mu_k$  n'étant une valeur propre de la matrice  $A$ .

Par conséquent, la matrice

$$\prod_{k=1}^r (A - \mu_k I_n)^{m_k}$$

est inversible (en tant que produit de matrices inversibles) et comme  $(Q \circ P)(A) = 0_n$ , on en déduit que

$$\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (A - \lambda I_n) = 0_n.$$

On a démontré qu'il existait un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples, donc la matrice  $A$  est diagonalisable.

### Solution 34

rms128-759

Comme la matrice  $I_n$  est inversible, il faut que la matrice  $A$  soit diagonalisable.

• Si  $a \neq 0$ , en posant

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{on obtient} \quad P_0 A_0 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et comme  $a \neq 0$ , le produit  $P_0 A_0$  n'est pas diagonalisable.

Ainsi, si  $A$  admet au moins une valeur propre non nulle de multiplicité supérieure à 2, alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $PA$  n'est pas diagonalisable.

▮ Plus précisément, on suppose qu'il existe une matrice inversible  $Q$  telle que  $Q^{-1}AQ = \text{Diag}(a, a, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ . La matrice  $P$  définie par  $Q^{-1}PQ = \text{Diag}(P_0, I_{n-2})$  est inversible (diagonale par blocs et les blocs diagonaux sont inversibles) et

$$Q^{-1}PAQ = (Q^{-1}PQ)(Q^{-1}AQ) = \text{Diag}(P_0 A_0, \text{Diag}(\lambda_3, \dots, \lambda_n)).$$

Comme  $Q^{-1}(PA)Q$  n'est pas diagonalisable, la matrice  $PA$  n'est pas diagonalisable.

• Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes distincts non nuls, alors en posant

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{on obtient} \quad P_0 A_0 = \begin{pmatrix} ab & b \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

et comme  $b \neq 0$ , le produit  $P_0 A_0$  n'est pas diagonalisable.

On en déduit comme plus haut que : si  $A$  admet au moins deux valeurs propres distinctes et non nulles, alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $PA$  n'est pas diagonalisable.

• Supposons donc que la matrice  $A$  soit diagonalisable et qu'elle admette une valeur propre non nulle de multiplicité 1. Il s'agit donc d'une matrice dont le rang est égal à 1 et il existe donc une ligne  $L$  et une colonne  $C$ , toutes deux non nulles, telles que  $A = C.L$ .

Tout vecteur propre associé à une valeur propre non nulle appartient à l'image, donc tout vecteur propre est proportionnel à la colonne  $C$  et comme

$$AC = (C.L)C = C.(LC) = (LC).C \quad (LC \text{ est un scalaire!})$$

on en déduit que la valeur propre non nulle de  $A$  est le scalaire  $LC$ .

Quelles que soient  $L$  et  $C$ , il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $LPC = 0$ .

Comme  $P$  est inversible, le produit  $PA$  est encore une matrice dont le rang est égal à 1 et comme cette matrice est supposée diagonalisable, on en déduit comme plus haut que la valeur propre *non nulle* de  $PA$  est le scalaire  $LPC$ , ce qui est contradictoire.

Encore raté!

▮ D'après le Théorème de la base incomplète, quels que soient les vecteurs **non nuls**  $u$  et  $v$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, il existe un automorphisme  $\varphi$  de  $E$  tel que  $\varphi(u) = v$ .

• En effet, comme  $u$  et  $v$  ne sont pas nuls, il existe deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  de  $E$  de la forme

$$\mathcal{B} = (u, e_2, \dots, e_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = (v, e_2, \dots, e_n).$$

D'après le Théorème de caractérisation, il existe une, et une seule application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $E$  telle que

$$\varphi(u) = v \quad \text{et que} \quad \forall 2 \leq k \leq n, \quad \varphi(e_k) = e_k.$$

Comme l'image par  $\varphi$  de la base  $\mathcal{B}$  est encore une base, cet endomorphisme est en fait un automorphisme.

• On dit que le groupe linéaire **opère transitivement** sur l'ensemble des vecteurs non nuls de  $E$ .

• Finalement, il ne reste plus que la matrice nulle.

## Solution 35

rms128-532

1. Le polynôme  $X^p - 1$  est scindé à racines simples (= les racines  $p$ -ièmes de l'unité) et c'est un polynôme annulateur de  $M$ , donc  $M$  est diagonalisable.
2. Deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs, donc  $E$  est invariant par conjugaison :

$$\forall M \in E, \forall P \in GL_2(\mathbb{C}), \quad P^{-1}MP \in E$$

et comme la conjugaison  $[M \mapsto P^{-1}MP]$  est continue (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie), l'adhérence de  $E$  est également invariante par conjugaison : si la suite des matrices  $M_n \in E$  converge vers la matrice  $D$ , alors la suite des matrices  $PM_nP^{-1} \in E$  converge vers la matrice  $PDP^{-1}$ .

♣ Soient  $\lambda$  et  $\mu$ , deux éléments de  $\mathbb{U}$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe deux suites rationnelles  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2ir_n\pi} \quad \text{et} \quad \mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2it_n\pi}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un entier  $p_n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $r_n p_n \in \mathbb{N}$  et  $t_n p_n \in \mathbb{N}$ , donc la matrice  $M_n = \text{Diag}(e^{2ir_n\pi}, e^{2it_n\pi})$  vérifie bien

$$M_n^{p_n} = \text{Diag}(1, 1) = I_2.$$

♣ On a donc démontré que les matrices  $\text{Diag}(\lambda, \mu)$  étaient dans l'adhérence de  $E$ , quels que soient les complexes  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{U}$ .

Comme l'adhérence de  $E$  est invariante par conjugaison, toute matrice diagonalisable dont les valeurs propres appartiennent à  $\mathbb{U}$  est dans l'adhérence de  $E$ .

🔗 **Rappel :** Si le spectre de la matrice  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  est réduit au singleton  $\{\lambda\}$  et si  $M \neq \lambda I_2$ , alors la matrice  $M$  est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

♣ Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ , on pose

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \begin{pmatrix} 1+i\varepsilon & 0 \\ 0 & 1-i\varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+i\varepsilon \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

et on vérifie sans peine que

$$E \ni P_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon P_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \begin{pmatrix} 3+i\varepsilon & 2+2i\varepsilon \\ -2 & -1-i\varepsilon \end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme le spectre de la matrice limite est réduit à  $\{1\}$  et que cette matrice n'est (visiblement) par la matrice  $I_2$ , cette matrice limite est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

♣ D'après la première partie, les matrices  $A_\varepsilon$  appartiennent à l'adhérence de  $E$ . Comme l'adhérence de  $E$  est une partie fermée et stable par conjugaison, la matrice  $B$  appartient à l'adhérence de  $E$ .

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , la matrice  $e^{i\theta}B$  est semblable à

$$B_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

et nous avons ainsi démontré que toute matrice  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  dont le spectre est contenu dans  $\mathbb{U}$  appartient à l'adhérence de  $E$  (que cette matrice  $M$  soit diagonalisable ou non).

♣ Réciproquement, on considère une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de matrices de  $E$  en supposant qu'elle converge vers une matrice  $M \in GL_2(\mathbb{C})$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme caractéristique  $\chi_n$  de  $M_n$  est de la forme

$$\chi_n = X^2 - (\lambda_n + \mu_n)X + \lambda_n \mu_n$$

où  $\lambda_n$  et  $\mu_n$  appartiennent au cercle unité  $\mathbb{U}$ .

🔗 On a commencé par démontrer que les valeurs propres de  $M \in E$  étaient des racines de l'unité.

D'après le Théorème de D'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de la matrice limite  $M$  est scindé :

$$\chi = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta.$$

Le terme constant  $\lambda_n \mu_n$  de  $\chi_n$  appartient à  $\mathbb{U}$  (= groupe multiplicatif) pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et comme le polynôme caractéristique  $\chi_n$  converge vers  $\chi$ , on en déduit que le produit  $\alpha\beta$  appartient à  $\mathbb{U}$  (= partie fermée).

✎ La continuité du polynôme caractéristique vu comme une fonction de la matrice est détaillée au 128-533.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le scalaire  $\lambda_n \in \mathbb{U}$  est une valeur propre de  $M_n$ , donc il existe une colonne  $X_n \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$  de norme 1 (et donc en particulier non nulle) telle que  $M_n X_n = \lambda_n X_n$ .

✎ Comme  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$  est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur cet espace sont équivalentes et il n'importe pas de préciser quelle norme on a choisie.

Cela étant, le choix de cette norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$  définit une norme subordonnée  $|\cdot|$  sur  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  et la convergence de  $M_n$  vers  $M$  peut alors se traduire par le fait que  $|M_n - M|$  tend vers 0.

Comme  $\mathbb{U}$  est une partie compacte de  $\mathbb{C}$  et que la sphère unité de  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$  est une partie compacte elle aussi, il existe une extractrice  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_{\varphi(k)} = \lambda \in \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} X_{\varphi(k)} = X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \quad \text{avec} \quad \|X\| = 1.$$

Par continuité du produit matriciel, on en déduit que

$$\lambda X = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} M_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)} = MX.$$

✎ Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , on sait que  $M_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)} = \lambda_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)}$  et donc

$$\begin{aligned} \|MX - \lambda X\| &\leq \|MX - MX_{\varphi(k)}\| + \|MX_{\varphi(k)} - M_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)}\| \\ &\quad + \|\lambda_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)} - \lambda X_{\varphi(k)}\| + \|\lambda X_{\varphi(k)} - \lambda X\| \\ &\leq |M| \cdot \|X - X_{\varphi(k)}\| + |M - M_{\varphi(k)}| \cdot 1 + |\lambda| \cdot \|X_{\varphi(k)} - X\| \end{aligned}$$

où chaque terme du majorant tend vers 0.

Comme la colonne  $X$  n'est pas la colonne nulle (sa norme est égale à 1), c'est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{U}$ .

La matrice  $M$  possède deux valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$  (non nécessairement distinctes) dont le produit appartient à  $\mathbb{U}$  et l'une de ces valeurs propres appartient à  $\mathbb{U}$ . Par conséquent, les deux valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à  $\mathbb{U}$ .

✎ On a démontré qu'une matrice  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  était dans l'adhérence de  $E$  si, et seulement si, son spectre était contenu dans le cercle unité  $\mathbb{U}$ .

## Solution 36

rms128-533

1. Pour toute matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , le polynôme caractéristique  $\chi_M$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ . On considère donc une application d'un espace vectoriel de dimension finie :  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  dans un autre espace vectoriel de dimension finie :  $\mathbb{C}_n[X]$ . Il suffit donc de démontrer que les coordonnées de  $\chi_M$  relatives à la base canonique de  $\mathbb{C}_n[X]$  sont des fonctions continues des coordonnées de  $M$  relatives à la base canonique de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  pour pouvoir conclure que  $[M \mapsto \chi_M]$  est une fonction continue.

✎ Par définition du déterminant, pour tout  $x \in \mathbb{C}$ ,

$$\chi_M(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$$

où  $b_{i,i} = (x - m_{i,i})$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et  $b_{i,j} = -m_{i,j}$  pour tous  $i \neq j$ . On en déduit que les coordonnées de  $\chi_M$  relatives à la base canonique de  $\mathbb{C}_n[X]$  sont des fonctions polynomiales (et donc continues) des coordonnées de  $M$  relatives à la base canonique de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

2. Considérons une suite  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices semblables à  $A$  et supposons que cette suite de matrices converge vers une matrice  $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

✎ Comme  $A$  est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples  $\mu$ . Comme des matrices semblables ont mêmes polynômes annulateurs, on en déduit que  $\mu(B_k) = 0_n$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , puis que  $\mu(L) = 0_n$ .

✎ Toute application polynomiale est continue sur l'algèbre de dimension finie  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

On a ainsi démontré que  $L$  était diagonalisable.

✎ Des matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc le polynôme caractéristique de chaque matrice  $B_k$  est en fait celui de la matrice  $A$ . Par continuité, le polynôme caractéristique de  $L$  est aussi celui de la matrice  $A$ .

• On sait ainsi que  $L$  et  $A$  sont deux matrices diagonalisables et que leurs polynômes caractéristiques sont égaux, donc  $L$  et  $A$  sont semblables.

▮ La première partie de la démonstration a montré que  $\mu$  était un polynôme annulateur de  $L$ , elle ne permet pas de démontrer qu'il s'agit du polynôme minimal de  $L$ !

Et même si on savait qu'il s'agissait du polynôme minimal de  $L$ , on ne pourrait toujours pas conclure, car le polynôme minimal ne donne aucune indication sur la dimension des sous-espaces propres!

• Par ailleurs, il ne suffit pas de savoir que  $A$  et  $L$  ont même polynôme caractéristique, car la connaissance du polynôme  $\chi_L$  ne permet pas de savoir si  $L$  est diagonalisable (à moins que le polynôme caractéristique ne soit scindé à racines simples).

**3. a.** Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Considérons donc une matrice triangulaire supérieure stricte  $N = (n_{k,\ell}) \in S(A)$  et, pour tout paramètre  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , la matrice de passage

$$P_t = \text{Diag}(t, t^2, \dots, t^n) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

La matrice  $N_t = P_t^{-1} N P_t = (n_{k,\ell}^t)_{1 \leq k, \ell \leq n}$  est semblable à  $N$ , donc elle est semblable à  $A$  et

$$\forall 1 \leq k, \ell \leq n, \quad n_{k,\ell}^t = t^{\ell-k} n_{k,\ell}.$$

▮ En multipliant à droite par  $N_t$ , on multiplie la  $\ell$ -ième colonne de  $N$  par  $t^\ell$ .

En multipliant à gauche par  $N_t^{-1} = \text{Diag}(t^{-1}, \dots, t^{-n})$ , on multiplie la  $k$ -ième ligne de  $N$  par  $t^{-k}$ .

Par conséquent,  $n_{k,\ell}^t = t^{-k} n_{k,\ell} t^\ell$ .

Comme  $n_{k,\ell} = 0$  pour  $k \geq \ell$ , c'est-à-dire pour  $\ell - k \leq 0$ , on en déduit que

- si  $t$  tend vers 0, alors  $t^{\ell-k}$  tend vers 0 pour  $k < \ell$  et  $n_{k,\ell}^t$  tend vers 0 quels que soient  $k$  et  $\ell$  (même pour  $k \geq \ell$ );
- si  $t$  tend vers  $+\infty$ , alors  $t^{\ell-k}$  tend vers  $+\infty$  pour  $k < \ell$  et  $n_{k,\ell}^t$  tend vers l'infini pour tout couple  $(k, \ell)$  tel que  $n_{k,\ell} \neq 0$ .

• Ainsi, si  $t$  tend vers 0, la matrice  $N_t \in S(A)$  tend vers la matrice nulle, ce qui prouve que la matrice nulle appartient à l'adhérence de la classe de similitude de  $A$ .

▮ À l'opposé, si  $A$  est nilpotente non nulle, alors  $N \neq 0_n$  et si  $t$  tend vers  $+\infty$ , alors  $\|N_t\|_\infty$  tend vers  $+\infty$ , ce qui prouve que la classe de similitude de  $A$  n'est pas bornée.

**3. b.** Considérons une suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices appartenant à  $S(A)$  et supposons qu'elle converge vers une matrice  $B$ .

Toutes les matrices  $A_k$  sont semblables à  $A$ , donc leur polynôme caractéristique est toujours celui de  $A$ . Par continuité (cf. première question), le polynôme caractéristique de  $B$  est aussi celui de  $A$ .

Si  $B$  est la matrice nulle, alors le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X^n$  et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, la matrice  $A$  est nilpotente.

**4.** Comme la matrice  $A$  est complexe, elle est semblable à une matrice diagonale par blocs  $\text{Diag}(B_1, \dots, B_r)$  où chaque bloc diagonal est la somme d'une matrice d'homothétie  $\lambda_k I$  et d'une matrice nilpotente  $N_k$ .

Si  $A$  n'est pas diagonalisable, alors l'un des blocs nilpotents  $N_k$  n'est pas nul.

▮ Cela signifie que  $\lambda_k$  n'est pas une racine simple du polynôme minimal de  $A$ .

Supposons par commodité que ce soit  $N_1 \in \mathfrak{M}_{d_1}(\mathbb{C})$ . Il existe (d'après ce qui précède) une suite  $(P_{1,\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  de matrices inversibles telles que

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} P_{1,\ell}^{-1} N_1 P_{1,\ell} = 0_{d_1}.$$

En posant  $P_\ell = \text{Diag}(P_{1,\ell}, I_{d_2}, \dots, I_{d_r}) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , on obtient

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} P_\ell^{-1} A P_\ell = A' = \text{Diag}(\lambda_1 I_{d_1}, B_2, \dots, B_r).$$

Dans ces conditions,  $\lambda_1$  est une racine simple du polynôme minimal de  $A'$  et comme, par hypothèse,  $\lambda_1$  n'est pas une racine simple du polynôme minimal de  $A$ , on en déduit que  $A'$  n'est pas semblable à  $A$ .

Ainsi, la classe de similitude d'une matrice non diagonalisable n'est pas fermée.

**5.** Toute matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable : il existe une matrice triangulaire  $T \in S(A)$  et, pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\|(T + \varepsilon I_n) - T\| = |\varepsilon| \cdot \|I_n\| \quad \text{et} \quad \text{tr}(T + \varepsilon) = \text{tr } T + n\varepsilon \neq \text{tr } T = \text{tr } A.$$

Par conséquent, toute boule de rayon strictement positif centrée en  $T \in S(A)$  contient au moins une matrice qui n'est pas semblable à  $A$  et le point  $T$  n'appartient donc pas à l'intérieur de  $S(A)$ .

✎ Toute boule de rayon strictement positif et centrée en  $T$  contient en fait une infinité de matrices qui ne sont pas semblables à  $A$  (puisque leur trace est différente de celle de  $A$ ).

✎ Considérons maintenant une matrice  $M_0 \in S(A)$ .

Mais la matrice  $M_0$  est semblable à la matrice triangulaire  $T$ , donc il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $M_0 = PTP^{-1}$  : la matrice  $T$  est donc un antécédent de la matrice  $M_0$  par l'application continue  $\Phi = [M \mapsto PMP^{-1}]$  (= un endomorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , espace vectoriel de dimension finie).

✎ La conjugaison  $\Phi = [M \mapsto PMP^{-1}]$  est en fait un automorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  et la matrice  $T$  est donc l'antécédent de  $M_0$  par  $\Phi$ . C'est ici sans importance.

Si la matrice  $M_0$  appartenait à l'intérieur de  $S(A)$ , alors  $S(A)$  serait un voisinage de  $M_0$ . Par continuité de la conjugaison  $\Phi$ , l'image réciproque par  $\Phi$  de  $S(A)$ , voisinage de  $M_0$ , serait donc un voisinage de  $T$ . Mais la classe de similitude  $S(A)$  est globalement invariant par conjugaison, donc  $S(A)$  serait un voisinage de  $T$  et on a démontré que ce n'était pas le cas.

✎ Dire que la classe de similitude est "invariante par conjugaison" signifie seulement qu'une matrice  $M$  est semblable à  $A$  si, et seulement si, elle est semblable à une matrice semblable à  $A$ !

✎ Ainsi, la classe de similitude  $S(A)$  n'est un voisinage d'aucun de ses points, c'est une partie d'intérieur vide.

✎ Cette question ne figurait pas dans l'énoncé original.

6. On a démontré que la classe de similitude d'une matrice nilpotente non nulle n'était pas bornée.

✎ Si la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, il en va de même. (La matrice  $A$  est, comme on l'a vu, semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est la somme d'une homothétie et d'un bloc nilpotent, l'un de ces blocs nilpotents n'étant pas nul.)

✎ Il reste donc à envisager le cas des matrices diagonalisables.

✎ Considérons deux complexes distincts  $a$  et  $b$ , ainsi qu'un réel  $\varepsilon > 0$ . En posant

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \quad \text{on obtient} \quad P_\varepsilon^{-1} D P_\varepsilon = \begin{pmatrix} * & \frac{b-a}{\varepsilon} \\ * & * \end{pmatrix}$$

et comme  $a \neq b$ , on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|P_\varepsilon^{-1} D P_\varepsilon\|_\infty = +\infty.$$

La classe de similitude de  $D$  n'est donc pas bornée.

✎ On retrouve dans ce calcul l'idée générale de l'exercice : si deux vecteurs propres se rapprochent indéfiniment, les conséquences sont visibles lors du changement de base.

✎ On en déduit plus généralement que : si  $A$  est une matrice diagonalisable qui admet au moins deux valeurs propres distinctes, alors la classe de similitude de  $A$  n'est pas bornée.

✎ Finalement, la classe de similitude de  $A$  est bornée si, et seulement si, la matrice  $A$  est une matrice d'homothétie, auquel cas la classe de similitude  $S(A)$  est réduite à  $\{A\}$ .

### Solution 37

rms128-454

Comme les coefficients de la matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  sont des entiers relatifs, son déterminant

$$\alpha = \det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

est également un entier relatif.

Pour les mêmes raisons, les coefficients des comatrices  $\text{Com}((A))$  et  $\text{Com}((B))$  sont des entiers relatifs.

✎ D'après la propriété de Bézout, il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que

$$au + bv = 1.$$

D'après les formules de Cramer,

$$A \cdot [\text{Com}((A))]^T = \alpha \cdot I_n \quad \text{et} \quad B \cdot [\text{Com}((B))]^T = b \cdot I_n$$

donc

$$A \cdot (u[\text{Com}((A))]^T) + B \cdot (v[\text{Com}((B))]^T) = I_n.$$

**Solution 38**

rms130-482

Comme  $f$  est inversible,

$$f + g = f \circ (I + g \circ f^{-1})$$

et comme  $GL(E)$  est un groupe pour  $\circ$ , on en déduit que  $(f + g)$  est inversible si, et seulement si,  $(I + g \circ f^{-1})$  est inversible.

• Or

$$(I + g \circ f^{-1}) = (g \circ f^{-1}) - (-1) \cdot I$$

donc  $(f + g)$  est inversible si, et seulement si,  $(-1)$  n'est pas une valeur propre de  $(g \circ f^{-1})$ .

• Comme le rang de  $g$  est égal à 1 et que  $f^{-1}$  est inversible, le rang de  $g \circ f^{-1}$  est aussi égal à 1. Par conséquent,  $g \circ f^{-1}$  admet 0 comme valeur propre de multiplicité au moins égale à  $(n - 1)$  (Théorème du rang) et la valeur propre restante est donc égale à  $\text{tr}(g \circ f^{-1})$  (= la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité).

Ainsi  $(f + g)$  est inversible si, et seulement si,  $\text{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$ .

**Solution 39**

rms130-483

• L'application  $f$  vérifie une propriété de type morphisme de groupes mais ce n'est pas un morphisme de groupes ! L'ensemble de départ :  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est un groupe additif, certes ! mais ce n'est pas un groupe multiplicatif..

L'idée générale pour résoudre un tel exercice consiste à choisir les matrices  $A$  et  $B$  de manière variée pour exploiter au mieux les propriétés de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ .

• Avec  $A = I_n$ , on a

$$\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(B) = f(I_n)f(B).$$

Comme  $f$  n'est pas constante, il existe au moins une matrice  $B$  telle que  $f(B) \neq 0$ , donc

$$f(I_n) = 1.$$

• Si la matrice  $M$  est inversible, alors

$$f(M)f(M^{-1}) = f(MM^{-1}) = f(I_n) = 1,$$

ce qui prouve d'une part que  $f(M) \neq 0$  et d'autre part que

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{K}), \quad f(M^{-1}) = [f(M)]^{-1}.$$

• Avec  $A = 0_n$ , on a

$$\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(0_n)f(B) = f(0_n).$$

Comme la fonction  $f$  n'est pas constante, il existe au moins une matrice  $B$  telle que  $f(B) \neq 1 = f(I_n)$ , donc

$$f(0_n) = 0.$$

• Considérons la matrice de rang  $r$  de référence :

$$J_r = \text{Diag}(I_r, 0_{n-r}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

Il s'agit d'un projecteur :  $J_r^2 = J_r$  donc

$$[f(J_r)]^2 = f(J_r)$$

et par conséquent

$$\forall 1 \leq r \leq n, \quad f(J_r) = 0 \quad \text{ou} \quad f(J_r) = 1.$$

• Toute matrice  $M_r$  de rang  $r$  est **équivalente** à cette matrice  $J_r$  : il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que

$$J_r = Q^{-1}M_rP$$

et par conséquent ( $f(P) \neq 0$  et  $f(Q) \neq 0$  car  $P$  et  $Q$  sont inversibles)

$$f(J_r) = \frac{f(P)}{f(Q)} \cdot f(M_r).$$

Cela prouve que  $f(J_r) = 0$  si, et seulement si,  $f(M_r) = 0$  pour toute matrice  $M_r$  de rang  $r$ .

• On sait donc que  $f(J_n) = f(I_n) = 1$  et que

$$\forall 1 \leq k < n, \quad f(J_k) \in \{0; 1\}.$$

Considérons donc

$$\rho = \min\{1 \leq r \leq n : f(J_r) = 1\}$$

(Il s'agit d'une **partie non vide de  $\mathbb{N}$**  — elle contient au moins  $r = n$  — donc l'existence du minimum est donc assurée.)

Par définition,  $f(J_\rho) = 1$  et, comme la matrice

$$J'_\rho = \text{Diag}(0_{n-\rho}, I_\rho)$$

est aussi une matrice de rang  $\rho$ , alors  $f(J'_\rho) \neq 0$ . On en déduit que

$$f(J_\rho J'_\rho) = f(J_\rho) f(J'_\rho) \neq 0.$$

Or le rang de la matrice

$$J_\rho J'_\rho = \text{Diag}(0_{n-\rho}, I_{2\rho-n}, 0_{n-\rho})$$

est égal à  $2\rho - n$  et si  $\rho < n$ , alors

$$2\rho - n = \rho - (n - \rho) < \rho.$$

Par définition de  $\rho$ , on a  $f(M_r) = 0$  pour toute matrice  $M_r$  de rang  $r < \rho$  et donc en particulier

$$f(J_\rho J'_\rho) = 0.$$

Il faut donc que  $\rho = n$ , ce qui signifie que

$$\forall 1 \leq r < n, \quad f(J_r) = 0$$

et par conséquent que

$$f(M) = 0$$

pour toute matrice non inversible  $M$ .

#### Solution 40

rms130-493

Je note  $\text{Com}((A))$ , la comatrice de  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

► On sait que, quelle que soit la matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\text{Com}((A))^T \cdot A = (\det A) \cdot I_n.$$

Par conséquent, si  $\text{Com}((A)) = A$ , alors

$$A^T \cdot A = \text{Com}((A))^T \cdot A = (\det A) \cdot I_n. \quad (7)$$

✎ Pour bien comprendre la suite, il vaut mieux remarquer que  $A^T \cdot A$  est une matrice symétrique réelle, qu'elle est positive au sens où

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X \geq 0$$

puisque  $X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X = \|AX\|^2$ .

De plus,  $\text{Ker } A^T \cdot A = \text{Ker } A$  :

— si  $AX = 0$ , alors  $A^T \cdot AX = A^T \cdot 0 = 0$  ;

— réciproquement, si  $A^T \cdot AX = 0$ , alors

$$\|AX\|^2 = X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X = 0$$

et donc  $AX = 0$  (puisque une norme sépare les points).

► Si la matrice  $A$  n'est pas inversible, alors (7) devient :

$$A^T \cdot A = 0_n.$$

Par conséquent, pour toute matrice colonne  $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$\|AX\|^2 = (AX)^T \cdot (AX) = X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X = 0$$

donc

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0$$

et  $A$  est donc la matrice nulle.

✎ Réciproquement : si  $A = 0_n$ , alors  $\text{Com}((A)) = 0_n = A$ .

▷ Si la matrice  $A$  est inversible, alors

$$A^T \cdot A = (\det A) \cdot I_n. \quad (8)$$

Pour tout vecteur colonne  $X$  non nul, la colonne  $AX$  est aussi différente de la colonne nulle (puisque  $A$  est inversible), donc

$$0 < \|AX\|^2 = X^T \cdot (A^T \cdot A)X = (\det A) \cdot \|X\|^2$$

donc

$$\det A > 0. \quad (9)$$

En posant

$$\alpha = \sqrt{\det A} > 0,$$

on obtient alors

$$\left(\frac{1}{\alpha} A\right)^T \left(\frac{1}{\alpha} A\right) = I_n$$

et donc que

$$\frac{1}{\sqrt{\det A}} A \in O_n(\mathbb{R}). \quad (10)$$

En particulier, il faut donc que

$$\frac{\det A}{(\det A)^{n/2}} = \pm 1. \quad (11)$$

➤ Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ .

Pour  $n = 2$ , la propriété (11) n'apporte aucune contrainte particulière, mais pour  $n \geq 3$ , il faut que  $\det A = 1$  et on déduit alors de (8) que  $A \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ .

♣ Réciproquement :

— si  $n = 2$ , alors toute matrice de la forme

$$A = \alpha \cdot R$$

où  $\alpha > 0$  et  $R \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$  vérifie bien

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot R^T \quad \text{et} \quad \det A = \alpha^2 \det R = \alpha^2$$

(puisque  $\det R = 1$ ) et par conséquent

$$\text{Com}(( )A) = [\det A \cdot A^{-1}]^T = \alpha^2 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} R^T\right)^T = \alpha \cdot R = A.$$

— Si  $n \geq 3$ , alors toute matrice  $A \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  vérifie

$$\text{Com}(( )A) = [\det A \cdot A^{-1}]^T = 1 \cdot (A^T)^T = A.$$

### Conclusion générale.

Les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  égales à leur comatrice sont

- la matrice nulle;
- les matrices de rotation
- et aussi, mais seulement pour  $n = 2$ , les matrices de la forme

$$\alpha \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

où  $\alpha > 0$  et  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

**Solution 41****rms130-494**

Si  $(AB)^n = 0$ , alors

$$(BA)^{n+1} = B(AB)^n A = 0$$

donc  $BA$  est nilpotente.

Or l'indice de nilpotence d'une matrice  $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est inférieur à  $n$ , donc  $(BA)^n = 0$ .

▮ La majoration de l'indice de nilpotence doit être connue!

On peut en donner diverses justifications plus ou moins savantes.

• En considérant une matrice nilpotente  $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  comme une matrice complexe, on sait qu'une telle matrice est trigonalisable et que son unique valeur propre est nulle.

La matrice  $N$  est donc semblable à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Par conséquent, la matrice  $N^k$  est semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients  $t_{i,j}$  sont nuls pour  $j < i + k$  (dessiner la matrice!) et en particulier  $N^n$  est la matrice nulle.

• Variante : Le polynôme minimal est de la forme  $X^d$  et il divise le polynôme caractéristique (Théorème de Cayley-Hamilton). Or le degré du polynôme caractéristique est égal à  $n$ , donc  $d \leq n$  et par conséquent  $N^n = 0$ .

• Autre variante : cf exercice 130-1194.

**Solution 42****rms130-498**

1. Par hypothèse,  $f^4 = f^2$ , donc

$$X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$$

est un polynôme annulateur de  $f$ .

Comme l'endomorphisme  $f$  admet un polynôme annulateur scindé, il est trigonalisable.

2. On sait que  $X^2(X-1)(X+1)$  est un polynôme annulateur, produit de trois facteurs deux à deux premiers entre eux. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}). \quad (12)$$

► Pour tout endomorphisme  $f$ , on sait que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ .

Si  $\text{rg } f = \text{rg } f^2$ , alors  $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2$  (Théorème du rang) et par conséquent  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$  (inclusion et égalité des dimensions).

On en déduit que

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id})$$

et donc que  $f$  est diagonalisable.

► Supposons que  $f$  soit diagonalisable. Le polynôme minimal de  $f$  est alors scindé à racines simples et il divise  $X^2(X-1)(X+1)$ , donc il divise aussi  $X(X-1)(X+1)$ .

Par conséquent,  $X(X-1)(X+1)$  est annulateur. Comme ce polynôme est le produit de trois facteurs deux à deux premiers entre eux, on peut appliquer le théorème de décomposition des noyaux et en déduire que

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}). \quad (13)$$

Comme  $E$  est de dimension finie, on en déduit de (12) et de (13) que

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker}(f - \text{Id}) + \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) \\ &= \dim \text{Ker } f^2 + \dim \text{Ker}(f - \text{Id}) + \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) \end{aligned}$$

et donc que  $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2$ . D'après le Théorème du rang,

$$\text{rg } f = \text{rg } f^2.$$

▮ L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Comme  $X^2(X-1)(X+1)$  est annulateur, on en déduit que  $f$  est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme

$$X(X-1)(X+1)$$

est annulateur de  $f$ .

## Solution 43

rms130-503

1. Bien entendu, les deux sous-espaces  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^3$  sont stables par  $A$  (quelle que soit la matrice  $A$ ). Mais encore ?  
La matrice  $A$  est diagonale par blocs :

$$A = \text{Diag}(B, 1) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

donc il y a une droite et un plan stable évidents :

$$\mathbb{R} \cdot (0, 0, 1) \quad \text{et} \quad [z = 0].$$

Mais encore ?

• Une droite  $D = \mathbb{R} \cdot u$  dirigée par le vecteur  $u \neq 0$  est stable par  $A$  si, et seulement si, le vecteur  $u$  est un vecteur propre de  $A$ .

Le polynôme caractéristique de  $B$  est égal à  $X^2 + X + 1$ , donc le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à  $(X-1)(X^2 + X + 1)$ . Comme  $A$  admet 1 pour seule valeur propre réelle, la seule droite propre est la droite  $\mathbb{R} \cdot (0, 0, 1)$ . Il n'y a donc pas d'autre droite stable par  $A$  que la droite déjà trouvée.

• Dans  $\mathbb{R}^3$ , un plan est en fait un hyperplan, donc représenté par une équation :

$$P = [C^\top \cdot X = 0].$$

Ce plan est stable par la matrice  $A$  si, et seulement si,

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad C^\top \cdot X = 0 \implies C^\top \cdot (AX) = 0.$$

Cela signifie que le noyau de la forme linéaire (non nulle, puisque  $\dim P = 2$ )

$$[X \mapsto C^\top \cdot X]$$

est contenu dans le noyau de la forme linéaire (peut-être nulle)

$$[X \mapsto C^\top \cdot A \cdot X]$$

et donc qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad C^\top \cdot A \cdot X = \alpha \cdot C^\top \cdot X.$$

▮ Si les deux formes linéaires sont non nulles, alors leurs noyaux sont de même dimension (des hyperplans de  $\mathbb{R}^3$ ) et donc égaux. Dans ce cas, le scalaire  $\alpha$  est non nul.

Si la forme linéaire  $[X \mapsto C^\top \cdot A \cdot X]$  est nulle, le scalaire  $\alpha$  est nul.

Le vecteur  $X$  étant quelconque, on en déduit que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad C^\top \cdot A = \alpha \cdot C^\top$$

c'est-à-dire que  $C$  est un vecteur propre de  $A^\top$ .

• La matrice  $A^\top$  admet 1 pour seule valeur propre réelle et le sous-espace propre associé est dirigé par  $(0, 0, 1)$ , donc la matrice  $A$  admet un, et un seul, plan stable : il s'agit du plan d'équation

$$[0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0] = [z = 0].$$

En conclusion, il existe exactement quatre sous-espaces stables par  $A$ .

2. Comme les matrices  $A$  et  $M$  commutent, on sait que tout sous-espace propre de  $A$  est stable par  $M$ . Par conséquent, le vecteur  $(0, 0, 1)$  est un vecteur propre de  $M$  donc la matrice  $M$  est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ e & f & \star \end{pmatrix}.$$

En comparant

$$AM = \begin{pmatrix} & & \\ e & f & \star \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} & & \\ e-3f & e-2f & \star \end{pmatrix},$$

on obtient  $e = f = 0$ , donc la matrice  $M$  est diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

avec bien entendu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{B_0} \times B = B \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

✎ Je ne vois pas comment démontrer que  $M$  est diagonale par blocs comme  $A$  sans poser quelques calculs...

Pour trouver les valeurs possibles des réels  $a, b, c$  et  $d$ , on peut continuer le calcul matriciel, c'est simple et assez rapide.

Mais on peut aussi réduire les calculs au strict minimum en remarquant que l'endomorphisme de  $P$  induit par restriction de  $A$  est un **endomorphisme cyclique** (dans une base bien choisie, il est représenté par une matrice compagnon et, de ce fait, les matrices qui commutent à cet endomorphisme sont les polynômes en cet endomorphisme).

✎ Prenons un vecteur quelconque dans le plan  $P = [z = 0]$  qui est stable par  $A$ , par exemple

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et calculons son image par  $A$  :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, appartiennent tous deux au plan  $P$  (le premier par choix, le second par stabilité de  $P$ ) et forment donc une base du plan  $P$ .

Comme le plan  $P$  est stable par  $M$ , le vecteur  $MX$  appartient à  $P$  et il existe donc deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$MX = \alpha \cdot X + \beta \cdot AX.$$

Comme  $M$  et  $A$  commutent, on en déduit que

$$M(AX) = A(MX) = \alpha \cdot AX + \beta \cdot A(AX) = (\alpha \cdot I_3 + \beta \cdot A)(AX).$$

Ainsi, les endomorphismes  $M$  et  $(\alpha \cdot I_3 + \beta \cdot A)$  coïncident sur une base du plan  $P = \text{Vect}(X, AX)$  et donc sur le plan  $P$ .

✎ Cela revient à conclure que les matrices qui commutent à  $B$  sont exactement les polynômes en  $B$  (pour une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , la dimension de la sous-algèbre  $\mathbb{R}[B]$  est inférieure à 2 et les polynômes en  $B$  sont en fait les fonctions affines de  $B$ ).

✎ Bref : les matrices  $M$  qui commutent à  $A$  sont les matrices de la forme

$$\text{Diag}(\alpha I_2 + \beta B, \gamma)$$

et forment donc un espace vectoriel de dimension 3 (les trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  pouvant être arbitrairement choisis).

#### Solution 44

rms130-511

✎ On considère ici un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. Sur un tel espace, un endomorphisme admet toujours un polynôme annulateur scindé (polynôme minimal ou caractéristique par exemple) et par conséquent, il admet nécessairement au moins un vecteur propre.

Cette remarque est fondamentale, elle sert de nombreuses fois dans cet exercice.

1. Considérons un vecteur propre  $x_0 \in E$  pour l'endomorphisme  $v$  : il existe un scalaire  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que

$$v(x_0) = \mu \cdot x_0.$$

On sait alors que

$$u(v(x_0)) = 0.$$

• Si  $\mu \neq 0$ , le problème est réglé! En effet, dans ce cas, le vecteur  $v(x_0)$  n'est pas nul (ni le scalaire  $\mu$ , ni le vecteur  $x_0$  ne sont nuls), donc  $v(x_0)$  est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda = 0$  et, par linéarité de  $v$ ,

$$v(v(x_0)) = v(\mu \cdot x_0) = \mu \cdot v(x_0)$$

donc  $v(x_0)$  est aussi un vecteur propre de  $v$  associé à la valeur propre  $\mu$ .

• Fort bien, mais si  $\mu = 0$ ? Dans ce cas,  $v(x_0) = 0$  n'est pas un vecteur propre!

► Si  $v$  est l'endomorphisme nul, alors on considère un vecteur propre  $x_1$  de  $u$  et comme

$$v(x_1) = 0 = 0 \cdot x_1$$

ce vecteur  $x_1$  est bien un vecteur propre de  $v$  aussi.

► Supposons que  $v$  ne soit pas l'endomorphisme nul. Dans ce cas,  $\text{Im } v$  est un **espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle** qui est stable par  $v$ .

Il existe donc un vecteur propre  $y_0 = v(z_0) \in \text{Im } v$  pour l'endomorphisme de  $\text{Im } v$  induit par restriction de  $v$ . C'est bien entendu un vecteur propre pour  $v$ !

Et comme  $u(y_0) = (u \circ v)(z_0) = 0$ , on en déduit que  $y_0$  est un vecteur non nul du noyau de  $u$ , c'est donc un vecteur propre de  $u$  (associé à la valeur propre 0).

Le vecteur  $y_0$  est donc un vecteur propre commun à  $u$  et à  $v$ .

2. On suppose ici qu'il existe un scalaire  $a \in \mathbb{C}$  tel que

$$u \circ v = a \cdot u.$$

Autrement dit, par linéarité de  $u$ ,

$$u \circ (v - a \cdot \text{Id}) = 0.$$

D'après la question précédente, les endomorphismes  $u$  et  $v - a \text{Id}$  admettent un vecteur propre commun. Comme les vecteurs propres de  $v - a \text{Id}$  sont aussi des vecteurs propres de  $v$ :

$$(v - a \text{Id})(x_0) = \lambda \cdot x_0 \iff v(x_0) = (\lambda + a) \cdot x_0$$

on en déduit que  $u$  et  $v$  admettent un vecteur propre commun.

3. On suppose enfin qu'il existe deux scalaires  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{C}$  tels que

$$u \circ v = a \cdot u + b \cdot v.$$

Par linéarité de  $u$  et de  $v$ , on en déduit que

$$\underbrace{(u - b \text{Id})}_{u_b} \circ \underbrace{(v - a \text{Id})}_{v_a} = ab \text{Id}.$$

On distingue alors trois cas.

► Si  $ab \neq 0$ , alors les endomorphismes  $u_b$  et  $v_a$  sont inversibles et, à un facteur près, réciproques l'un de l'autre. En particulier, ces deux endomorphismes commutent et il en va donc de même pour  $u$  et  $v$ .

Les valeurs propres de  $u_b$  (et donc aussi celles de  $v_a$ ) sont différentes de 0. Si  $x_0$  est un vecteur propre de  $u_b$  associé à  $\lambda$ , alors  $x_0$  est un vecteur propre de  $v_a$  associé à  $ab/\lambda$ :

$$\begin{aligned} u_b(x_0) = \lambda \cdot x_0 &\implies (ab) \cdot x_0 = v_a(\lambda \cdot x_0) = \lambda \cdot v(x_0) \\ &\implies v_a(x_0) = \frac{ab}{\lambda} \cdot x_0. \end{aligned}$$

Cela prouve (par symétrie) qu'un vecteur  $x_0$  est un vecteur propre de  $u_b$  si, et seulement si, c'est un vecteur propre de  $v_a$ .

On en déduit comme plus haut que  $x_0$  est un vecteur propre de  $u$  si, et seulement si,  $x_0$  est un vecteur propre de  $v$ .

Et comme  $E$  est un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle,  $u$  et  $v$  admettent au moins un vecteur propre en commun.

► Si  $ab = 0$ , on doit distinguer deux sous-cas :

▷ Si  $b = 0$ , alors  $u \circ v = a \cdot u$  et on est ramené au cas précédent.

▷ Si  $a = 0$ , alors  $u_b \circ v = 0$  et on est cette fois ramené au premier cas : il existe au moins un vecteur propre commun à  $u_b$  et à  $v$  et comme  $u$  et  $u_b$  ont les mêmes vecteurs propres, on en déduit qu'il existe au moins un vecteur propre commun à  $u$  et à  $v$ .

## Solution 45

rms130-513

1. Le polynôme  $X^3 + X = X(X^2 + 1)$  est un polynôme annulateur. Les facteurs  $X$  et  $X^2 + 1$  sont premiers entre eux, on peut donc appliquer le Théorème de décomposition des noyaux :

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + I)$$

et on sait que les deux sous-espaces sont stables par  $f$  (en tant que noyaux de polynômes en  $f$ ).

• On notera  $f_0$  et  $f_2$ , les endomorphismes de  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker}(f^2 + I)$  respectivement induits par restriction de  $f$  à ces deux sous-espaces vectoriels.

Par définition,  $f_0$  est l'endomorphisme nul et  $f_2$  admet  $X^2 + 1$  pour polynôme annulateur.

• Si  $\text{Ker}(f^2 + I) = \{0\}$ , alors  $f = \omega_E$  : c'est impossible par hypothèse.

Si  $\dim \text{Ker}(f^2 + I) = 1$ , alors  $\text{Ker}(f^2 + I)$  serait une droite stable par  $f$  et elle serait donc dirigée par un vecteur propre de  $f$  et donc de  $f_2$ .

Comme le polynôme  $X^2 + 1$ , annulateur de  $f_2$ , n'a pas de racine réelle, l'endomorphisme  $f_2$  n'a pas de valeur propre et il n'existe donc pas de vecteur propre de  $f_2$  dans le sous-espace  $\text{Ker}(f^2 + I)$  : contradiction !

Par conséquent,  $\dim \text{Ker}(f^2 + I) \geq 2$  et donc

$$\dim \text{Ker } f = \dim E - \dim \text{Ker}(f^2 + I) \leq 1.$$

• Comme  $\dim E = 3$  est impaire, le degré du polynôme caractéristique de  $f$  est impair (égal à 3) et comme il s'agit d'un polynôme à coefficients réels, on en déduit qu'il admet au moins une racine réelle (Théorème des valeurs intermédiaires).

L'endomorphisme  $f$  admet donc au moins une valeur propre. On sait que toutes les valeurs propres de  $f$  sont des racines du polynôme annulateur  $X(X^2 + 1)$ , donc la seule valeur propre possible est 0.

Par conséquent,  $\text{Sp}(f) = \{0\}$  et  $\dim \text{Ker } f \geq 1$ .

• En conclusion,  $\dim \text{Ker } f = 1$  et  $\dim \text{Ker}(f^2 + I) = 2$ .

► Choisissons un vecteur non nul  $e_1 \in \text{Ker } f$ . Un tel choix est possible puisque  $\dim \text{Ker } f = 1$  et ce vecteur est un vecteur directeur du sous-espace  $\text{Ker } f$ .

Choisissons ensuite un vecteur non nul  $e_2 \in \text{Ker}(f^2 + I)$ . Un tel choix est possible puisque  $\dim \text{Ker}(f^2 + I) = 2$ . On a déjà démontré que ce vecteur  $e_2$  n'était pas un vecteur propre de  $f$ , donc le vecteur  $f(e_2)$  n'est pas colinéaire à  $e_2$ . Mais comme  $\text{Ker}(f^2 + I)$  est stable par  $f$ , le vecteur  $e_3 = f(e_2)$  appartient encore à  $\text{Ker}(f^2 + I)$ .

La famille  $(e_2, e_3)$  est donc une famille libre de deux vecteurs dans le plan  $\text{Ker}(f^2 + I)$  : c'est donc une base de  $\text{Ker}(f^2 + I)$ .

Par concaténation de bases, la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$ .

De plus,  $f(e_1) = 0$  (car  $e_1 \in \text{Ker } f$ ),  $f(e_2) = e_3$  (par construction de  $e_3$ ) et

$$f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$$

car  $e_2 \in \text{Ker}(f^2 + I)$  et, en restriction à ce sous-espace, l'application linéaire  $f^2 + I$  est identiquement nulle.

La matrice de  $f$  relative à une telle base est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En dimension  $n$ , on a encore

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + I).$$

Nous allons démontrer par récurrence (sur la dimension) qu'il existe des plans vectoriels

$$P_1, P_2, \dots, P_r$$

tous stables par  $f$  et tels que

$$\text{Ker}(f^2 + I) = \bigoplus_{j=1}^r P_j.$$

• Comme  $f \neq \omega_E$ , le sous-espace  $F = \text{Ker}(f^2 + I)$  n'est pas réduit au vecteur nul. Le raisonnement fait au

3. a montre que  $F$  contient alors un plan

$$P_1 = \text{Vect}(e_1, e_2).$$

• On suppose connue une famille de plans

$$P_1 = \text{Vect}(e_1, e_2), \dots, P_k = \text{Vect}(e_{2k-1}, e_{2k})$$

stables par  $f$  et tels que

$$F_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{j=1}^k P_j \subset F.$$

Si  $F_k = F$ , alors la propriété est établie pour  $r = k$  et  $\dim F = 2k$ .

Sinon, on peut choisir un vecteur

$$e_{2k+1} \in F \setminus F_k$$

et ce vecteur est nécessairement différent de  $0_E$ .

• Comme  $F$  est stable par  $f$ , le vecteur

$$e_{2k+2} = f(e_{2k+1})$$

appartient encore à  $F$ . On a vu plus haut que le sous-espace  $F$  ne contenait aucun vecteur propre de  $f$ . Par conséquent, les vecteurs  $e_{2k+1}$  et  $e_{2k+2} = f(e_{2k+1})$  ne sont pas colinéaires et le sous-espace

$$P_{k+1} = \text{Vect}(e_{2k+1}, e_{2k+2})$$

est un plan contenu dans  $F$ .

• Ce plan  $P_{k+1}$  est stable par  $f$  : tout d'abord  $f(e_{2k+1}) = e_{2k+2} \in P_{k+1}$  par construction et

$$f(e_{2k+2}) = f^2(e_{2k+1}) = -e_{2k+1} \in P_{k+1}$$

puisque  $X^2 + 1$  est un polynôme annulateur de  $f$  restreint à  $F$ .

• Considérons un vecteur  $x \in P_{k+1} \cap F_k$ . Alors  $f(x) \in P_{k+1} \cap F_k$  (une intersection de sous-espaces vectoriels stables par  $f$  est encore stable par  $f$ ) et comme il n'y a pas de vecteurs propres dans  $F$  (et donc dans  $F_k$ ), alors

— ou bien  $x = 0_E$ ,

— ou bien  $(x, f(x))$  est une famille libre de deux vecteurs dans le plan  $P_{k+1}$ .

Dans le second cas, on aurait une base de  $P_{k+1}$  constituée de vecteurs de  $F_k$  et par conséquent  $P_{k+1}$  serait contenu dans  $F_k$ , ce qui est faux par hypothèse.

Par conséquent,  $x = 0_E$  et on a démontré que  $P_{k+1}$  et  $F_k$  étaient en somme directe.

• Comme  $F$  est un sous-espace de dimension finie, il est impossible de trouver une suite infinie de plans  $P_k$  tels que

$$\forall k \geq 1, \quad \bigoplus_{j=1}^k P_j \subset F.$$

Il existe donc un entier  $r \geq 1$  (car  $f \neq \omega$ ) tel que

$$F = \bigoplus_{j=1}^r P_j$$

et en particulier  $\dim F = 2r$  est paire.

• Si  $\dim E$  est paire, il est donc possible que  $\dim \text{Ker } f = 0$ . C'est le cas en particulier pour les matrices diagonales par blocs de la forme

$$\text{Diag}(B, B, \dots, B) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Si  $\dim E$  est impaire, en complétant la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_{2r-1}, e_{2r})$  avec des vecteurs de  $\text{Ker } f$  pour obtenir une base de  $E$ , on a démontré que  $f$  pouvait être représenté par la matrice diagonale par blocs.

$$\text{Diag}(0_{n-2r}, B, \dots, B).$$

## Solution 46

rms130-516

Supposons que  $u$  admette une valeur propre (réelle). Dans ce cas, il existerait aussi un vecteur propre  $x$  (non nul...) et la droite  $\mathbb{R} \cdot x$  serait stable par  $u$ .

D'après l'énoncé, seuls  $\{0\}$  et  $E$  sont stables par  $u$  avec  $\dim E \geq 2$ .

Par conséquent, le spectre (réel) de  $u$  est vide et  $u$  n'admet aucun vecteur propre.

• Considérons le polynôme minimal de  $u$  et factorisons-le en produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$P = \prod_{k=1}^r P_k^{m_k}.$$

Les facteurs  $P_k$  étant des polynômes irréductibles deux à deux distincts, les facteurs  $P_k^{m_k}$  sont deux à deux premiers entre eux. D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k^{m_k}(u).$$

Pour tout indice  $1 \leq k \leq r$ , le sous-espace  $\text{Ker } P_k(u)$  est stable par  $u$ , distinct de  $\{0\}$  (puisque  $P_k$  est un diviseur du polynôme minimal) et

$$\text{Ker } P_k(u) \subset \text{Ker } P_k^{m_k}(u)$$

puisque  $m_k \geq 1$ .

• D'après l'hypothèse de l'énoncé,

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad \text{Ker } P_k(u) = E.$$

Mais comme les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } P_k^{m_k}(u)$  sont en somme directe, on doit en conclure que  $r = 1$  et que  $\text{Ker } P_1(u) = E$ .

Le polynôme minimal de  $u$  est donc irréductible :  $P = P_1$ .

• Dans  $\mathbb{R}[X]$ , les polynômes irréductibles sont d'une part les polynômes de degré 1 et d'autre part les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Les racines (réelles) du polynôme minimal sont les valeurs propres de  $u$  et on a constaté pour commencer que  $u$  n'avait pas de valeurs propres. Par conséquent, son polynôme minimal est un irréductible de degré 2.

• Notons  $X^2 + aX + b$ , le polynôme minimal de  $u$  et considérons un vecteur  $x_0 \neq 0_E$ .

Si les vecteurs  $x_0$  et  $u(x_0)$  étaient colinéaires, alors  $x_0$  serait un vecteur propre de  $u$  : il n'en existe pas, on l'a déjà vu ! Par conséquent, la famille  $(x_0, u(x_0))$  est libre et le sous-espace

$$F = \text{Vect}(x_0, u(x_0))$$

est un plan.

Comme  $u^2 + au + bI = \omega_E$ , alors

$$u(u(x_0)) = -b \cdot x_0 - a \cdot u(x_0) \in F$$

et par suite, le plan  $F$  est stable par  $u$ .

Or on a supposé que  $E$  était le seul sous-espace distinct de  $\{0\}$  qui soit stable par  $u$ . Donc  $E = F$  est bien un plan vectoriel.

#### Solution 47

rms130-541

1. Par hypothèse, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une matrice inversible  $P_k$  telle que

$$A_k P_k = P_k B_k.$$

• Cette manière, peu habituelle, d'écrire la propriété de similitude va nous affranchir des questions relatives à la continuité de la fonction  $[P \mapsto P^{-1}]$ .

On sait que  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $A$  et  $B$ . Si la suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge elle aussi vers une matrice  $P$  et que cette matrice  $P$  est encore inversible, alors on a  $AP = PB$  (par continuité de la multiplication matricielle, opération bilinéaire sur un espace de dimension finie), donc les matrices  $A$  et  $B$  sont bien semblables.

• Mais le groupe  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  des matrices inversibles est un ouvert, pas un fermé, donc il se pourrait que la suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergeât vers une matrice  $P$  non inversible. Et il se pourrait aussi que la suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ne fût même pas convergente...

• Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , ces deux matrices sont semblables : la matrice  $A_k$  est triangulaire, elle admet  $n = 2$  valeurs propres distinctes, donc elle est semblable à la matrice diagonale  $B_k$ .

Les deux suites  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergent pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  (et donc pour toutes les normes sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ), respectivement vers

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = 0_2.$$

La matrice  $A$  est nilpotente d'indice 2 et la matrice  $B$  est diagonale, donc  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

▮ Une matrice de passage qui mène de  $A_k$  à  $B_k$  est, par exemple, la matrice

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}.$$

La suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge mais sa limite n'est pas inversible...

Une autre matrice de passage possible est

$$Q_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et cette fois, la suite  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est divergente (car pas bornée).

2. On suppose ici que toutes les matrices de passage appartiennent au groupe orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$ . Comme le groupe  $O_n(\mathbb{R})$  est compact, il existe une suite extraite  $(P_{\varphi(j)})_{j \in \mathbb{N}}$  qui converge vers une matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$ .

En tant que suites extraites de suites convergentes, les deux suites  $(A_{\varphi(j)})_{j \in \mathbb{N}}$  et  $(B_{\varphi(j)})_{j \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $A$  et  $B$  respectivement.

Comme la multiplication matricielle est une opération continue et que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad A_{\varphi(j)} P_{\varphi(j)} = P_{\varphi(j)} B_{\varphi(j)},$$

on en déduit par passage à la limite que

$$AP = PB$$

et comme  $P$  est une matrice orthogonale, on en déduit que les limites  $A$  et  $B$  sont encore orthogonalement semblables.

#### Solution 48

rms130-761

Le membre de gauche est une matrice symétrique, la matrice du membre de droite est quelconque : nous allons certainement nous simplifier la tâche en nous souvenant que

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Quelle que soit la matrice  $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe un unique couple  $(S, T)$  tel que

$$X = S + T, \quad S^T = S, \quad T^T = -T.$$

On a alors

$$X^T + X = 2S \quad \text{et} \quad \text{tr } X = \text{tr } S$$

et l'équation devient

$$2S = \text{tr } S \cdot A.$$

On en déduit en particulier que

$$2 \text{tr } S = \text{tr } S \cdot \text{tr } A.$$

• Premier cas : si  $\text{tr } S = 0$ , l'équation devient  $2S = 0$ , c'est-à-dire  $S = 0$  et donc  $X = T$ , la matrice antisymétrique  $T$  étant quelconque et la matrice  $A$  n'apparaissant plus dans l'équation !

• Deuxième cas : si  $\text{tr } S \neq 0$ , alors il faut que  $\text{tr } A = 2$ .

Si  $\text{tr } A \neq 2$ , l'équation n'a pas de solution.

Si  $\text{tr } A = 2$ , l'équation devient

$$\text{tr } A \cdot S = \underbrace{\text{tr } S}_{\neq 0} \cdot A,$$

donc il faut aussi que  $A$  soit symétrique.

Réciproquement, si  $\text{tr } A = 2$  et si  $A$  est symétrique, alors on pose

$$X = \alpha A + T$$

où  $\alpha$  est réel et  $T$  antisymétrique. On en déduit que

$$\text{tr } X = \alpha \text{tr } A + 0 = 2\alpha$$

et que

$$X^T + X = 2\alpha A = \text{tr } X \cdot A,$$

donc  $X$  est bien solution.

► En conclusion, les solutions de l'équation sont

- d'une part les matrices antisymétriques ;
- d'autre part, mais seulement si  $A$  est symétrique et si  $\text{tr } A = 2$ , les matrices de la forme

$$X = \alpha A + T$$

où  $\alpha$  est un réel quelconque et  $T$ , une matrice antisymétrique.

**Solution 49**

rms130-768

1. On suppose que  $f$  et  $g$  commutent.

• Soit  $y \in \text{Im } f$ . Il existe donc  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  et

$$g(y) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \text{Im } f,$$

donc  $\text{Im } f$  est stable par  $g$ .

• Soit  $x \in \text{Ker } f$  : on a donc  $f(x) = 0$  et par linéarité de  $g$ , on a  $g(f(x)) = 0$ . Comme  $f$  et  $g$  commutent, on a aussi  $f(g(x)) = 0$ , c'est-à-dire  $g(x) \in \text{Ker } f$ , donc  $\text{Ker } f$  est stable par  $g$ .

📖 *C'est du cours !*

2. Si  $f$  et  $p$  commutent, alors  $\text{Im } p$  et  $\text{Ker } p$  sont stables par  $f$  (d'après la question précédente).

• Réciproquement, supposons que  $\text{Im } p$  et  $\text{Ker } p$  soient stables par  $f$ .

On sait que  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$  et que

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in \text{Ker } p}. \quad (*)$$

En appliquant  $(*)$  à  $f(x)$  au lieu de  $x$ , on obtient que

$$f(x) = (p \circ f)(x) + [f(x) - (p \circ f)(x)].$$

Par linéarité de  $f$  et du fait que  $\text{Im } p$  et  $\text{Ker } p$  sont stables par  $f$ , on en déduit que

$$f(x) = \underbrace{(f \circ p)(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{[f(x) - (f \circ p)(x)]}_{\in \text{Ker } p}.$$

Or  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ , donc la décomposition du vecteur  $f(x)$  est unique : par identification, on a donc

$$\forall x \in E, \quad (p \circ f)(x) = (f \circ p)(x)$$

donc  $p$  et  $f$  commutent.

📖 *Il ne suffit pas de savoir que  $\text{Im } p$  et  $\text{Ker } p$  sont supplémentaires dans  $E$ , il faut aussi connaître et utiliser la décomposition  $(*)$ .*

**Solution 50**

rms130-772

1. Toute matrice nilpotente est trigonalisable (son polynôme minimal, de la forme  $X^d$ , est scindé) et donc semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Par conséquent, les deux matrices

$$A_n = I_n + N + \dots + N^{n-1}$$

et

$$B_n = I_n + 2N + \dots + nN^{n-1}$$

sont semblables aux matrices triangulaires

$$I_n + T + \dots + T^{n-1} \quad \text{et} \quad I_n + 2T + 3T^2 + \dots + nT^{n-1}$$

dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 et donc tous différents de 0 : ces deux matrices sont donc inversibles.

📖 *Pour calculer leurs inverses, inspirons-nous des séries entières : pour  $|x| < 1$ ,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

*et l'inverse de cette somme est égal à  $(1-x)$ ; de même,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

*et l'inverse de cette somme est égal à  $(1-x)^2$ .*

• Comme  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est nilpotente, alors  $N^n = 0_n$  (penser à Cayley-Hamilton!) et

$$(I_n - N)(I_n + N + \cdots + N^{n-1}) = I_n - N^n = I_n$$

(somme télescopique), ce qui prouve que  $A_n$  est bien inversible et que son inverse est égal à  $(I_n - N)$ .

2. De plus,

$$\begin{aligned} N \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)N^k \right) &= \sum_{k=1}^n kN^k = N + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k \\ N^2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)N^k \right) &= \sum_{k=2}^{n+1} kN^k = \sum_{k=2}^{n-1} kN^k \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (I_n - N)^2 B_n &= (I_n - 2N + N^2) \left( \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)N^k \right) \\ &= \left( I_n + 2N + \sum_{k=2}^{n-1} (k+1)N^k \right) \\ &\quad - 2 \left( N + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k \right) + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k \\ &= I_n \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'inverse de  $B_n$  est égal à  $(I_n - N)^2$ .

### Solution 51

rms130-779

1. L'image de  $f$  est engendrée par les colonnes de  $A$ , donc  $\text{rg } f = 2$  et

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)).$$

D'après le théorème du rang,  $\dim \text{Ker } f = 2$  et comme deux relations de liaison entre les colonnes sautent aux yeux, on en déduit que

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0)).$$

2. Quel que soit l'endomorphisme  $f$ , l'image de  $f$  est TOUJOURS stable par  $f$ ! (Et le calcul pour le prouver est immédiat!)

3. Prenons pour base de  $\text{Im } f$  les deux vecteurs donnés ci-dessus :

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)).$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1, 1) &= (4, 2, 2, 4) = 2 \cdot (1, 1, 1, 1) + 2 \cdot (1, 0, 0, 1) \\ f(1, 0, 0, 1) &= (2, 2, 2, 2) = 2 \cdot (1, 1, 1, 1) + 0 \cdot (1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

et on en déduit que la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

▮ A priori, la matrice trouvée dépend de la base choisie! Mais c'est sans importance pour la suite.

4. Le polynôme caractéristique de  $M$  est égal à  $X^2 - 2X - 4$ .  
Les valeurs propres de la matrice  $M$  sont donc

$$1 \pm \sqrt{5}$$

et, quelle que soit la valeur propre  $\lambda$  de  $M$ , il est clair que les vecteurs du noyau de

$$(M - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

sont proportionnels au vecteur (non nul !)

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

. De plus,

$$(M - \lambda I_2) \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\lambda - 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'après le polynôme caractéristique de  $M$ .

Les vecteurs propres de la matrice  $M$  nous donnent des vecteurs propres de  $g$  (et donc de  $f$ ) par leurs coordonnées relatives à la base  $\mathcal{B}$  que nous avons choisie plus haut.

Plus précisément, un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda = 1 \pm \sqrt{5}$  est donné par

$$\lambda \cdot (1, 1, 1, 1) + 2 \cdot (1, 0, 0, 1) = (\lambda + 2, \lambda, \lambda, \lambda + 2).$$

5. En conclusion, l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable (sa matrice est symétrique réelle...);
- le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est  $\text{Ker } f$ , dont on a donné une base plus haut;
  - le sous-espace propre associé à la valeur propre  $1 + \sqrt{5}$  est la droite dirigée par le vecteur

$$(1 + \sqrt{5}) \cdot (1, 1, 1, 1) + 2 \cdot (1, 0, 0, 1)$$

- et le sous-espace propre associé à la valeur propre  $1 - \sqrt{5}$  est la droite dirigée par le vecteur

$$(1 - \sqrt{5}) \cdot (1, 1, 1, 1) + 2 \cdot (1, 0, 0, 1).$$

## Solution 52

rms130-783

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , une matrice dont le polynôme caractéristique est égal à

$$(X - 1)(X - 2)^2.$$

Comme ce polynôme est scindé, la matrice  $A$  est trigonalisable et semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toutes ces matrices ont même rang (3), même déterminant (4), même spectre ( $\{1, 2, 2\}$ ), même trace (5)... Sont-elles pour autant semblables ?

Le polynôme minimal de  $A$  (qui est aussi celui de  $T$ ) est un diviseur unitaire du polynôme caractéristique, qui possède les mêmes racines que celui-ci. Par conséquent, il n'y a que deux possibilités :

- si  $\mu = (X - 1)(X - 2)$ , alors le polynôme minimal est scindé à racines simples, donc  $A$  est diagonalisable;
- si  $\mu = (X - 1)(X - 2)^2$ , alors le polynôme minimal est scindé mais avec une racine double, donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

En discutant sur les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$ , nous allons voir que ces deux cas sont compatibles avec le polynôme caractéristique donné — et donc que toutes les matrices  $A$  considérées ne sont pas semblables.

Tout d'abord, quels que soient les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ , le rang de la matrice

$$T - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc

$$\dim \text{Ker}(A - I_3) = 1.$$

Au contraire, le rang de la matrice

$$T - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 1 pour  $a = 0$  et égal à 2 pour  $a \neq 0$ .

Par conséquent,

— ou bien  $\alpha = 0$  et dans ce cas

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) + \dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

et la matrice  $A$  est diagonalisable ;

— ou bien  $\alpha \neq 0$  et dans ce cas

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) + \dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$$

et la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

**Conclusion :** Les matrices

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables (puisque  $A_0$  est diagonalisable alors que  $A_1$  n'est pas diagonalisable). Elles ont même polynôme caractéristique :

$$(X - 1)(X - 2)^2$$

mais pas le même polynôme minimal.

### Solution 53

**rms130-785**

Soit  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , un vecteur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Cette matrice  $M$  est non nulle et vérifie

$$\operatorname{tr}(M)I_n + M = \lambda M$$

soit

$$(\lambda - 1)M = \operatorname{tr}(M) \cdot I_n.$$

▮ Deux cas se présentent :

— ou bien  $\lambda = 1$  et dans ce cas, il faut que  $\operatorname{tr}(M) = 0$  ;

— ou bien  $\lambda \neq 1$  et dans ce cas

$$M = \frac{\operatorname{tr}(M)}{\lambda - 1} \cdot I_n \quad (\star)$$

donc  $M \in \mathbb{C} \cdot I_n$ .

▮ *C'est le passage un peu surprenant de l'exercice : négliger le calcul de  $\lambda$  pour lire la relation  $(\star)$  sous la forme  $M = (\dots) \cdot I_n$ .*

▮ **Sous-espace propre associé à  $\lambda = 1$**

L'ensemble  $H = [\operatorname{tr}(M) = 0]$  est un hyperplan de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  (en tant que noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle) et

$$\forall M \in H, \quad \Phi(M) = M.$$

Donc 1 est valeur propre de  $\Phi$  et

$$\operatorname{Ker}(\Phi - I) = [\operatorname{tr}(M) = 0].$$

▮ **L'autre sous-espace propre**

Il est clair que

$$\Phi(I_n) = (n + 1)I_n$$

donc  $(n + 1)$  est valeur propre de  $\Phi$  et le sous-espace propre associé à cette valeur propre est la droite vectorielle  $\mathbb{C} \cdot I_n$ .

▮ *La première partie de l'étude (analyse) nous a montré que les sous-espaces propres de  $\Phi$  étaient contenus dans des sous-espaces vectoriels clairement identifiés. Il ne nous restait donc plus qu'à étudier les **inclusions réciproques** pour pouvoir conclure.*

▮ **Conclusion**

Comme  $n \geq 1$  (!!!), l'endomorphisme  $\Phi$  possède exactement deux valeurs propres distinctes : 1, associée à l'hyperplan  $H$  et  $(n + 1)$ , associée à la droite  $\mathbb{C} \cdot I_n$ .

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace :

$$\dim H + \dim \mathbb{C} \cdot I_n = [\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) - 1] + 1 = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

(et peu nous importe que cette dimension soit égale à  $n^2$ ...), l'endomorphisme  $\Phi$  est diagonalisable.

▮ *On peut donc calculer facilement la trace et le déterminant de  $\Phi$  :*

$$\operatorname{tr} \Phi = (n^2 - 1) \times 1 + (n + 1) = n(n + 1)$$

$$\det \Phi = 1^{n^2-1} \times (n + 1)^1 = (n + 1).$$

## Solution 54

rms130-787

1.

✎ La forme particulière de la matrice  $A$  se prête à des calculs bourrins : la troisième colonne nous montre que 5 est valeur propre et nous pousse à calculer le polynôme caractéristique en développant par la dernière colonne.

Dans ces conditions, le cofacteur de  $(X - 5)$  est le polynôme caractéristique de la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

dont il suffit de calculer la trace et le déterminant.

Le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à

$$(X - 5)(X^2 - X - 2) = (X - 5)(X - 2)(X + 1).$$

✎ La factorisation du polynôme caractéristique peut se finir de tête : la somme des racines du facteur de degré 2 est égale à 1 et leur produit à  $-2$ , donc ces racines sont 2 et  $-1$ ...

♣ Il est clair que le sous-espace propre associé à 5 est la droite vectorielle dirigée par

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle dirigée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

le sous-espace propre associé à  $-1$  est la droite vectorielle dirigée par

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient donc une matrice inversible (puisque les trois droites propres sont en somme directe) telle que

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(5, 2, -1)$$

(d'après la Formule du changement de base).

♣ On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = Q \text{Diag}(5^n, 2^n, (-1)^n) Q^{-1}.$$

Comme la matrice  $Q$  est assez sympathique, on se lance dans le calcul de l'inverse :

$$\begin{pmatrix} Q \\ I_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 \\ Q^{-1} \end{pmatrix}$$

d'où

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après quelques calculs un peu lassants, on trouve finalement

$$A^n = 5^n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P_5} + 2^n \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{P_2} + (-1)^n \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{-1}}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

La connaissance très précise du Théorème de décomposition des noyaux et de la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange nous permet d'éviter les calculs fastidieux !

Les facteurs  $(X-5)$ ,  $(X-2)$  et  $(X+1)$  sont deux à deux premiers entre eux, donc les polynômes  $(X-2)(X+1)$ ,  $(X-5)(X+1)$  et  $(X-5)(X-2)$  sont globalement premiers entre eux (Théorème de décomposition des noyaux) et il existe donc trois polynômes  $U_5$ ,  $U_2$  et  $U_{-1}$  tels que

$$U_5 \cdot (X-2)(X+1) + U_2 \cdot (X-5)(X+1) + U_{-1} \cdot (X-5)(X-2) = 1$$

(oui, c'est Bézout !).

Les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires 5, 2 et  $-1$  sont, comme on sait :

$$\frac{(X-2)(X+1)}{(5-2)(5+1)}, \quad \frac{(X-5)(X+1)}{(2-5)(2+1)}, \quad \frac{(X-5)(X-2)}{(-1-5)(-1-2)}.$$

La somme de ces trois polynômes prend la valeur 1 lorsqu'on substitue 5, 2 et  $-1$  à  $X$  (à chaque fois, un terme est égal à 1 et les deux autres sont nuls). Comme cette somme est un polynôme de degré inférieur à 2, on en déduit que

$$\frac{(X-2)(X+1)}{18} - \frac{(X-5)(X+1)}{9} - \frac{(X-5)(X-2)}{18} = 1.$$

(C'était notre programme La résolution de l'équation de Bézout sans larmes.)

En revenant à la démonstration du Théorème de décomposition des noyaux, on en déduit que les matrices obtenues en substituant  $A$  à  $X$  :

$$P_5 = \frac{1}{18} \cdot (A - 2I_3)(A + I_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A - 2I_3}{3} \cdot \frac{A + I_3}{3}, \quad (14)$$

$$P_2 = \frac{-1}{9} \cdot (A - 5I_3)(A + I_3) = \frac{5I_3 - A}{3} \cdot \frac{A + I_3}{3}, \quad (15)$$

$$P_{-1} = \frac{-1}{18} \cdot (A - 5I_3)(A - 2I_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5I_3 - A}{3} \cdot \frac{A - 2I_2}{3} \quad (16)$$

sont les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres de  $A$  et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 5^n \cdot P_5 + 2^n \cdot P_2 + (-1)^n \cdot P_{-1}.$$

Attention à ne surtout pas développer les expressions des projecteurs spectraux en fonction de  $A$  : c'est seulement sous la forme ci-dessus qu'ils sont simples à calculer puisque

$$\frac{5I_3 - A}{3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{A - 2I_3}{3} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{A + I_3}{3} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En résumé, on a remplacé les six produits matriciels

$$Q \operatorname{Diag}(1, 0, 0) Q^{-1}, \quad Q \operatorname{Diag}(0, 1, 0) Q^{-1}, \quad Q \operatorname{Diag}(0, 0, 1) Q^{-1}$$

et le calcul préalable de  $Q^{-1}$  par les trois produits matriciels

$$(A - 2I_3)(A + I_3), \quad (A - 5I_3)(A + I_3), \quad (A - 5I_3)(A - 2I_2).$$

Ça vaut vraiment le coup d'étudier les détails de la théorie !

2. a. Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

2. b. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= -2^n(u_0 + 2v_0) + 2(-1)^n(u_0 + v_0), \\ v_n &= 2^n(u_0 + 2v_0) - (-1)^n(u_0 + v_0), \\ w_n &= 5^n(u_0 + 2v_0 + w_0) - 2^n(u_0 + 2v_0). \end{aligned}$$

### Solution 55

rms130-834

1.

✎ La première question est un archi-classique, qui constitue un exo dans l'exo. J'en donne une démonstration élémentaire à défaut d'être brève.

Une autre démonstration (par récurrence et avec le concours du Théorème de Cayley-Hamilton) figure dans le cours.

Comme  $M$  est une matrice à coefficients complexes, elle est semblable à une matrice triangulaire. En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres (distinctes) de  $M$  et  $m_1, \dots, m_r$  leurs multiplicités respectives, on a donc

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \text{tr}(M^k) = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i^k = 0. \quad (1)$$

✎ Évidemment, la relation précédente est fausse pour  $k = 0$  puisque

$$\text{tr}(M^0) = \text{tr}(I_n) = n.$$

✎ Si  $M$  était une matrice à coefficients réels, il ne faudrait pas hésiter à faire comme si c'était une matrice à coefficients complexes, puisque ni les hypothèses (nullité de la trace des itérées), ni le résultat final ( $M^n = 0_n$ ) ne dépendent de la nature réelle ou complexe des coefficients.

D'après la relation (1),

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Comme les multiplicités  $m_i$  sont des entiers non nuls, la matrice carrée n'est pas inversible et son déterminant, nul, est quasiment un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r \times V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r). \quad (3)$$

Ce déterminant de Vandermonde est différent de 0 puisque les  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts. Par conséquent, l'une des valeurs propres  $\lambda_i$  est nulle (et toutes les autres sont différentes de 0) : quitte à changer les indices, on peut supposer que  $\lambda_r = 0$ . La relation (1) devient alors

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \text{tr}(M^k) = \sum_{i=1}^{r-1} m_i \lambda_i^k = 0 \quad (4)$$

et on peut cette fois en déduire que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \cdots & \lambda_{r-1}^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Cette matrice carrée est alors inversible (son déterminant n'est pas nul) et admet un vecteur non nul dans son noyau ! C'est impossible... sauf si  $r - 1 = 0$  ! Autrement dit :  $r = 1$  et  $\lambda_r = 0$  est la seule valeur propre de  $M$ .

Ainsi,  $M$  est semblable à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et par conséquent  $M^n = 0_n$ .

🔗 *Comme on sait, le déterminant de Vandermonde est lié aux polynômes interpolateurs de Lagrange. Avec une petite astuce de calcul bien placée, on peut abréger un peu la démonstration.*

Puisque

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i^k = 0,$$

alors

$$\forall P \in \mathbb{K}_{r-1}[X], \quad \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i \cdot P(\lambda_i) = 0.$$

(Toute l'astuce consiste à considérer les polynômes sous la forme  $XP$  puisque  $\text{tr}(M^0) \neq 0$ .) Comme les  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts, on peut considérer les polynômes interpolateurs  $(L_i)_{1 \leq i \leq r}$  associés, qui sont tous de degré  $(r - 1)$  et

$$\forall 1 \leq j \leq r, \quad 0 = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i \cdot L_j(\lambda_i) = \underbrace{m_j}_{\in \mathbb{N}^*} \lambda_j.$$

Comme les multiplicités  $m_i$  sont toutes supérieures à 1, on en déduit que tous les  $\lambda_j$  sont nuls. Comme ils sont deux à deux distincts par hypothèse, on conclut que  $r = 1$  et  $\lambda_1 = 0$ .

2. Deux matrices semblables ont même trace, donc

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(A) + t \cdot \text{tr}(B)$$

et donc  $\text{tr}(B) = 0$ .

Comme  $A$  et  $(A + t \cdot B)$  sont semblables, leurs itérées sont également semblables et donc

$$\forall k \geq 1, \quad \text{tr}(A^k) = \text{tr}[(A + t \cdot B)^k].$$

**Piège!** Comme  $A$  et  $B$  ne commutent pas, on ne peut pas appliquer la formule du binôme pour développer  $(A + t \cdot B)^k$ . Pas grave! On sait tout de même que

$$(A + t \cdot B)^k = t^k \cdot B^k + \dots$$

où les matrices regroupées dans  $\dots$  constituent une expression polynomiale en  $t$  de degré *strictement* inférieur à  $k$ . On a donc

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \text{tr}(A^k) = t^k \cdot \text{tr}(B^k) + \dots$$

où les complexes regroupés dans  $\dots$  constituent toujours une expression polynomiale en  $t$  de degré strictement inférieur à  $k$ .

Cette égalité entre expressions polynomiales est vraie pour une **infinité de valeurs** de  $t$  (pour *tout*  $t \in \mathbb{C}$  en fait) et comme le membre de gauche ne dépend pas de  $t$ , on en déduit en particulier que  $\text{tr}(B^k) = 0$  pour tout  $k \geq 1$ .

D'après la première question, la matrice  $B$  est donc nilpotente.

🔗 *Attention avec la formule du binôme! Elle s'applique quand les deux termes commutent, ce qui n'est a priori pas le cas ici. De plus, la relation bien connue  $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$  ne nous est pas d'un grand secours. On peut vérifier que*

$$\begin{aligned} \text{tr}(A + B)^2 &= \text{tr}(A^2) + 2 \text{tr}(AB) + \text{tr}(B^2) \\ \text{tr}(A + B)^3 &= \text{tr}(A^3) + 3 \text{tr}(A^2B) + 3 \text{tr}(AB^2) + \text{tr}(B^3) \end{aligned}$$

mais ça coince dès le degré 4 car

$$\begin{aligned} \text{tr}(A \cdot BAB) &= \text{tr}(BAB \cdot A) \stackrel{?}{=} \text{tr}(A^2 \cdot B^2) = \text{tr}(AB^2 \cdot A) \\ &= \text{tr}(B \cdot A^2B) = \text{tr}(B^2 \cdot A^2). \end{aligned}$$

3. La trace est une forme linéaire sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , espace vectoriel de dimension finie, c'est donc en particulier une application continue.

• Comme la suite de matrices  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice nulle  $0_n$ , on en déduit que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{tr}(M_p) = 0.$$

Comme les matrices  $M_p$  sont toutes semblables, leurs traces sont égales et en particulier

$$\text{tr}(M_0) = 0.$$

• Comme produit de suites convergentes, la suite de matrices

$$(M_p^k)_{p \in \mathbb{N}}$$

converge vers la matrice nulle quel que soit l'entier  $k \geq 1$  (mais pas pour  $k = 0$ , bien sûr!).

• Si deux suites  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $A$  et  $B$ , alors la suite produit  $(M_p N_p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers  $AB$ , le produit des deux limites.

Cela s'explique par le fait que la multiplication matricielle peut être vue comme une opération bilinéaire sur un produit d'espaces vectoriels de dimension finie :

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Comme  $M_p$  est semblable à  $M_0$ , la matrice  $M_p^k$  est semblable à  $M_0^k$  et le raisonnement précédent nous donne que

$$\forall k \geq 1, \quad \text{tr}(M_0^k) = 0.$$

• D'après la première question, la matrice  $M_0$  est nilpotente.

4. Comme  $M_0$  est nilpotente, elle admet un polynôme annulateur scindé n'ayant que 0 pour seule racine. Elle est donc semblable à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls : il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$P^{-1}M_0P = T_0 = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{C}^n$  représenté par la matrice  $T_0$  dans la base

$$\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n).$$

On a en particulier

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 0 \\ u(e_2) &= t_{1,2} \cdot e_1 \\ &\vdots \\ u(e_n) &= t_{1,n} \cdot e_1 + \cdots + t_{n-1,n} \cdot e_{n-1}. \end{aligned}$$

Pour tout entier  $k \geq 1$ , la famille

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k &= (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \\ &= (k^{n-i} \cdot e_i)_{1 \leq i \leq n} = (k^{n-1} \cdot e_1, k^{n-2} \cdot e_2, \dots, k \cdot e_{n-1}, e_n) \end{aligned}$$

est évidemment une base de  $\mathbb{C}^n$  et

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= k^{n-1} \cdot u(e_1) = 0 \\ u(\varepsilon_2) &= k^{n-2} \cdot u(e_2) = \frac{t_{1,2}}{k} \cdot \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ u(\varepsilon_n) &= u(e_n) = \frac{t_{1,n}}{k^{n-1}} \cdot \varepsilon_1 + \cdots + \frac{t_{n-1,n}}{k} \cdot \varepsilon_{n-1} \end{aligned}$$

ou plus explicitement

$$\begin{aligned}\forall 2 \leq j \leq n, \quad u(\varepsilon_j) &= k^{n-j} \cdot u(e_j) = \sum_{i=1}^{j-1} (t_{i,j} k^{n-j}) \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}} \cdot (k^{n-i} \cdot e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}} \cdot \varepsilon_i.\end{aligned}$$

La matrice de  $u$  relative à la base  $\mathcal{B}_k$  est donc

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t_{1,2}}{k} & \frac{t_{1,3}}{k^2} & \cdots & \frac{t_{1,n-1}}{k^{n-2}} & \frac{t_{1,n}}{k^{n-1}} \\ \vdots & 0 & \frac{t_{2,3}}{k} & \ddots & & \frac{t_{2,n}}{k^{n-2}} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \frac{t_{n-2,n-1}}{k} & \frac{t_{n-2,n}}{k^2} \\ \vdots & & & & 0 & \frac{t_{n-1,n}}{k} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Comme  $T_0$  et  $T_k$  représentent le même endomorphisme  $u$  dans deux bases différentes, ces deux matrices sont semblables et comme  $T_0$  est, par construction, semblable à  $M_0$ , toutes les matrices  $T_k$  sont semblables à  $M_0$ .

On passe de  $T_0$  à  $T_k$  en divisant les coefficients de  $T_0$  par des entiers supérieurs à  $k$ , donc  $T_k$  converge vers la matrice nulle lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .

On a ainsi construit une suite  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices semblables à la matrice  $M_0$  qui converge vers la matrice nulle.

✎ Impossible de s'en sortir sans avoir bien compris le mécanisme de la trigonalisation !

Si une matrice est trigonalisable sans être diagonalisable, on peut choisir comme on veut l'ordre de grandeur des coefficients au-dessus de la diagonale, simplement en étirant plus ou moins les vecteurs de la base qu'on a trouvée.

✎ Cette propriété un peu étrange des matrices nilpotentes signifie que l'ensemble des matrices non diagonalisables n'est pas fermé : on a construit une suite convergente de matrices non diagonalisables et pourtant la limite de cette suite est diagonalisable.

On retrouve cette propriété dans plusieurs exercices.

## Solution 56

rms130-954

1. a. Par hypothèse,  $X^d$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

Par définition, le polynôme minimal de  $M$  est un diviseur unitaire de  $X^d$ , donc il est de la forme  $X^k$ .

Par définition de l'indice de nilpotence,  $X^d$  est en fait le polynôme minimal de  $M$ .

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le degré du polynôme minimal de  $M$  est inférieur à  $n$ , donc  $d \leq n$ .

✎ On peut donner une démonstration moins savante (mais pas plus courte) en étudiant les sous-espaces  $\text{Ker } f^k$  pour  $0 \leq k \leq d$ . Plus précisément, il s'agit de démontrer que

$$\forall 0 \leq k < d, \quad \text{Ker } f^k \subsetneq \text{Ker } f^{k+1}.$$

On en déduit alors que

$$\forall 0 \leq k < d, \quad \dim \text{Ker } f^{k+1} \geq 1 + \dim \text{Ker } f^k$$

(inégalité stricte entre nombres entiers) et donc (réurrence finie) que

$$\forall 0 \leq k \leq d, \quad \dim \text{Ker } f^k \geq k.$$

En particulier, comme  $f^d$  est l'endomorphisme nul,

$$n = \dim E = \dim \text{Ker } f^d \geq d.$$

**1. b.** Comme  $M$  est nilpotente, son spectre est réduit à  $\{0\}$  (le spectre est l'ensemble des racines du polynôme minimal). Par conséquent, pour tout réel  $\lambda \neq 0$ , la matrice  $M - \lambda I_n$  est inversible, donc la matrice

$$M^2 - I_n = (M - I_n)(M + I_n)$$

est inversible (en tant que produit de matrices inversibles).

Pour tout entier pair  $p \geq d - 1$ , on a donc

$$-(M^2 - I_n)(I_n + M^2 + M^4 + \dots + M^p) = I_n - M^{p+2} = I_n$$

puisque, par hypothèse sur  $p$ , on a  $p + 2 \geq d$ . On en déduit que

$$(M^2 - I_n)^{-1} = -(I_n + M^2 + M^4 + \dots + M^p)$$

**quel que soit l'entier pair  $p \geq d - 1$**  (en changeant l'entier  $p$ , on ne fait que rajouter des termes nuls à la somme).

**2. a.** La matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet  $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$  pour polynôme annulateur.

• Dans le corps  $\mathbb{C}(X)$  des fractions rationnelles,

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = \frac{X^5 - 1}{X - 1}$$

donc les racines du polynôme annulateur sont les racines cinquièmes de l'unité à l'exception de 1, donc le spectre de  $M$  est contenu dans  $\mathbb{U}_5$ .

En particulier, notre polynôme annulateur est scindé à racines simples (dans  $\mathbb{C}[X]$ ), donc la matrice  $M$  est diagonalisable.

• Comme  $M$  est une matrice à **coefficients complexes**, son polynôme caractéristique est scindé et par conséquent

$$\operatorname{tr} M = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} m_\lambda \cdot \lambda.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\operatorname{tr} M| \leq \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} \underbrace{m_\lambda}_{\in \mathbb{N}^*} \cdot \underbrace{|\lambda|}_{=1} = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} m_\lambda = n.$$

**2. b.** Il y a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, les termes complexes de cette somme ont tous le même argument modulo  $2\pi$  (**cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire dans  $\mathbb{C}$** ), c'est-à-dire si  $M$  n'admet qu'une seule valeur propre.

Comme  $M$  est diagonalisable, on en déduit que  $M$  est une homothétie, de rapport  $\lambda \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$ .

• Faut-il préciser que la réciproque est évidente ?

**2. c.** Si  $M$  est une matrice à coefficients réels, elle ne peut pas être une homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$ , donc l'inégalité est stricte :

$$|\operatorname{tr} M| < n.$$

## Solution 57

**rms130-956**

**1.** Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables (leurs rangs sont deux à deux distincts) et pourtant,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k) = \operatorname{tr}(Z^k) = 0$$

et

$$\operatorname{tr}(A^0) = \operatorname{tr}(B^0) = \operatorname{tr}(Z^0) = 3.$$

**2.** Comme les matrices  $A$  et  $B$  sont des matrices à coefficients complexes, elles sont semblables à des matrices triangulaires  $T_A$  et  $T_B$  : il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  (a priori distinctes) telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = P T_A^k P^{-1} \quad \text{et} \quad B^k = Q T_B^k Q^{-1}.$$

Comme deux matrices semblables ont même trace, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{tr}(T_A^k) = \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k) = \operatorname{tr}(T_B^k).$$

Nous supposons donc dorénavant que les matrices  $A$  et  $B$  sont triangulaires.

En particulier, leurs polynômes caractéristiques sont tous les deux scindés et unitaires. Pour démontrer qu'ils sont égaux, il reste donc à vérifier qu'ils ont les mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , les valeurs propres (complexes, deux à deux distinctes) de  $A$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ , leurs multiplicités respectives (appartenant à  $\mathbb{N}^*$ ). On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \lambda_i^k.$$

On a de même, avec des notations analogues,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{tr}(B^k) = \sum_{i=1}^q \beta_i \cdot \mu_i^k.$$

Par conséquent,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \lambda_i^k - \sum_{i=1}^q \beta_i \cdot \mu_i^k = 0.$$

Pour simplifier cette expression, nous allons poser

$$\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq p} \cup \{\mu_i\}_{1 \leq i \leq q} = \{\nu_i\}_{1 \leq i \leq r}.$$

On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^r \gamma_i \cdot \nu_i^k = 0$$

avec

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_j - \beta_\ell \in \mathbb{Z}, & \text{si } \nu_i = \lambda_j = \mu_\ell \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \\ \alpha_j \geq 1, & \text{si } \nu_i = \lambda_j \in \text{Sp}(A) \setminus \text{Sp}(B) \\ -\beta_\ell \leq -1, & \text{si } \nu_i = \mu_\ell \in \text{Sp}(B) \setminus \text{Sp}(A). \end{cases}$$

Les complexes  $\nu_i$  étant deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde qui leur est associée est inversible. Or la famille  $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq r}$  est un vecteur qui appartient au noyau de cette matrice : tous les  $\gamma_i$  sont nuls. On est donc dans le premier cas, quel que soit l'indice  $1 \leq i \leq r$ .

On en déduit que les familles  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$  et  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq q}$  sont égales à l'ordre près (en particulier  $p = q$ ). Si on prend la peine de les réindexer pour que

$$\forall 1 \leq i \leq p, \quad \alpha_i = \beta_i$$

on en déduit aussi que  $\gamma_i = 0 = \mu_i - \nu_i$ .

On a ainsi démontré (en admettant un résultat bien connu sur les matrices de Vandermonde) que les matrices  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Par conséquent, ces matrices ont même polynôme caractéristique.

## Solution 58

rms130-972

1. Supposons que l'indice de nilpotence de  $u$  soit égal à  $d$  et posons

$$w = I - u + \dots + (-1)^{d-1} u^{d-1} = \sum_{k=0}^{d-1} (-u)^k \in L(E).$$

Il est clair que  $v$  et  $w$  commutent (ce sont des polynômes en  $u$ ) et

$$\begin{aligned} w \circ v &= \sum_{k=0}^{d-1} (-u)^k \circ (I + u) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k (u^k + u^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k u^k - \sum_{k=1}^d (-1)^k u^k && \text{(changement d'indice)} \\ &= I + (-1)^d u^d && \text{(téléscopage)} \\ &= I && \text{(car } u^d = \omega_E) \end{aligned}$$

donc  $v$  est inversible et

$$v^{-1} = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k v^k.$$

🔗 *Question très classique!*

**2. a.** Soit  $d$ , le degré de  $P$ . Il est clair que  $u = [Q \mapsto Q'']$  est un endomorphisme nilpotent de  $E = \mathbb{R}_d[X]$  et son indice de nilpotence est inférieur à  $d$  (peu importe sa valeur exacte).

🔗 *Sur  $\mathbb{R}[X]$ , l'endomorphisme  $[Q \mapsto Q'']$  n'est pas nilpotent! (Bien que 0 soit sa seule valeur propre...)*

D'après la question précédente, l'endomorphisme  $v = I + u$  est inversible, donc il existe un, et un seul, polynôme  $Q \in \mathbb{R}_d[X]$  tel que

$$Q'' + Q = v(Q) = P.$$

De plus,

$$Q = v^{-1}(P) = \sum_{k=0}^d (-1)^k v^k(P) = \sum_{k=0}^d (-1)^k P^{(2k)}. \quad (17)$$

**2. b.** En tant qu'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  (et pas de  $\mathbb{R}_d[X]$ ), l'application  $v$  est inversible car

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \quad \deg v(Q) = \deg Q$$

et en particulier, l'image de la base canonique est une famille de polynômes échelonnés en degré.

On en déduit d'une part qu'il existe un, et un seul, polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q'' + Q = P$  et d'autre part que  $\deg Q = \deg P$ .

• Il est clair d'après (17) que : si les coefficients de  $P$  sont des entiers relatifs, alors les coefficients de  $Q$  sont aussi des entiers relatifs.

• Comme  $P$  est à coefficients entiers,  $P^{(2k)}$  est aussi un polynôme à coefficients entiers et en particulier  $P^{(2k)}(0)$  est un entier.

Supposons que  $P \in \mathbb{Z}[X]$  soit divisible par  $X^n$  : il existe donc un polynôme  $U_n \in \mathbb{Z}_n[X]$  tel que  $P = X^n \cdot U_n$ . D'après la Formule de Leibniz,

$$P^{(2k)} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \cdot D^j(X^n) \cdot D^{2k-j}U_n$$

en notant  $D$  la dérivation sur l'espace des polynômes.

Par définition,

$$\begin{aligned} \forall j < n, \quad D^j(X^n) &= \frac{n!}{(n-j)!} \cdot X^{n-j} \\ D^n(X^n) &= n! \\ \forall j > n, \quad D^j(X^n) &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent,

- si  $2k < n$ , alors  $P^{(2k)}(0) = 0$  puisque tous les termes sont nuls;
- si  $2k \geq n$ , alors

$$P^{(2k)}(0) = \binom{2k}{n} \cdot n! \cdot (D^{2k-n}U_n)(0).$$

On sait que les coefficients binomiaux sont des entiers et comme  $U_n$  est un polynôme à coefficients entiers, on en déduit que

$$(D^{2k-n}U_n)(0) \in \mathbb{Z}.$$

Quel que soit l'entier  $k$ , l'entier  $P^{(2k)}(0)$  est donc bien un multiple de  $n!$ . Par conséquent, l'entier

$$Q(0) = \sum_{k=0}^d (-1)^k P^{(2k)}(0)$$

est un multiple de  $n!$  (en tant que somme de multiples, éventuellement nuls, de  $n!$ ).

**3.** On pose

$$P_n = X^n(p - qX)^n \in \mathbb{Z}[X].$$

D'après la question précédente, il existe un, et un seul, polynôme  $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$  tel que

$$Q_n'' + Q_n = P_n,$$

et l'entier  $Q_n(0)$  est divisible par  $n!$ .

Considérons maintenant

$$Q_n(\pi - X) = Q_n\left(\frac{p}{q} - X\right) = \left(\frac{p}{q} - X\right)^n (qX)^n = Q_n.$$

On en déduit que  $Q_n(\pi) = Q_n(0)$ .

• On intègre deux fois par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt &= \int_0^\pi [Q_n''(t) + Q_n(t)] \sin t \, dt \\ &= [Q_n'(t) \sin t]_0^\pi + \int_0^\pi Q_n'(t) \cos t \, dt + \int_0^\pi Q_n(t) \sin t \, dt \\ &= [Q_n(t) \cos t]_0^\pi - \int_0^\pi Q_n(t) \sin t \, dt + \int_0^\pi Q_n(t) \sin t \, dt \\ &= -2Q_n(0) \in n!\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!} \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt \in \mathbb{Z}.$$

Mais la fonction  $[t \mapsto P_n(t) \sin t]$  est clairement continue et strictement positive sur  $]0, \pi[$ , donc

$$\frac{1}{n!} \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt > 0$$

et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!} \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt \in \mathbb{N}.$$

Cela dit,

$$\forall t \in [0, \pi], \quad P_n(t) \sin t \leq \pi^n \cdot p^n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt \leq \frac{\pi^{n+1} p^n}{n!}$$

et par croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt = 0.$$

Mais **une suite d'entiers strictement positifs ne peut pas tendre vers 0**, cette contradiction prouve que  $\pi$  ne peut pas s'écrire  $p/q$  : le nombre  $\pi$  est donc irrationnel.

### Solution 59

**rms130-973**

1. Soit  $\varphi_0 = [t \mapsto 1]$ . On a donc  $\varphi_0 = \varphi_0^2$  et par définition d'une dérivation,

$$\delta(\varphi_0) = 2\varphi_0 \cdot \delta(\varphi_0) = 2 \cdot \delta(\varphi_0).$$

On en déduit que la fonction  $\delta(\varphi_0)$  est identiquement nulle et, par linéarité de  $\delta$ , l'image par  $\delta$  de toute fonction constante est la fonction nulle.

2. Soit  $f \in E$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $f(0) = 0$ . D'après le Théorème fondamental,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x f'(t) \, dt$$

et en posant  $t = x \cdot u$ , on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x \int_0^1 f'(x \cdot u) \, du.$$

Il est clair que cette égalité est encore vraie pour  $x = 0$ . Il reste donc à vérifier que la fonction  $g$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^1 f'(x \cdot u) \, du$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour cela, on pose

$$\forall (x, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad \gamma(x, u) = f'(x \cdot u).$$

Il est clair que l'application

$$[x \mapsto \gamma(x, u)]$$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (régularité) et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, u) = u^k \cdot f^{(k+1)}(x \cdot u).$$

Il est tout aussi clair que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction

$$\left[ x \mapsto \frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, u) \right]$$

est intégrable sur le segment  $[0, 1]$  : c'est une fonction continue.

Quant à la domination, il suffit de considérer un réel  $A > 0$  et de supposer que  $x \in [-A, A]$ . Pour tout  $u \in [0, 1]$ , on a donc

$$x \cdot u \in [-A, A]$$

et par conséquent, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\forall x \in [-A, A], \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| \frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, u) \right| \leq \max_{t \in [-A, A]} f^{(k+1)}(t)$$

ce maximum existant bien puisque  $f^{(k+1)}$  est une fonction continue sur le segment  $[-A, A]$ .

On a ainsi trouvé un majorant indépendant de  $x \in [-A, A]$  et intégrable sur  $[0, 1]$  (toute fonction constante est intégrable sur un intervalle borné).

On en déduit que la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (= l'union des segments  $[-A, A]$ ) et que

$$\forall k \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(x \cdot u) \, du.$$

De manière analogue, en supposant que

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0,$$

on déduirait de la Formule de Taylor avec reste intégral que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt$$

et donc que, avec le même changement de variable,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x \cdot u) \, du$$

(y compris pour  $x = 0$ ). Bien entendu, et pour les mêmes raisons que celles qu'on a évoquées plus haut, l'intégrale est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de la variable  $x$ .

3. Plus généralement, si  $f \in E$ , alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction  $g_a \in E$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(a) + (x-a)g_a(x) \quad \text{et que} \quad g_a(a) = f'(a).$$

Si  $\delta$  est une dérivation, on en déduit que

$$\delta(f) = 0 + \delta(X) \cdot g_a + (X-a) \cdot \delta(g_a)$$

où  $X \in E$  désigne l'application  $[x \mapsto x]$ .

Les applications constantes  $[x \mapsto f(a)]$  et  $[x \mapsto a]$  appartiennent au noyau de la dérivation.

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(f)(x) = \delta(X)(x) \cdot g_a(x) + (x - a) \cdot \delta(g_a)(x)$$

et en particulier

$$\delta(f)(a) = \delta(X)(a) \cdot g_a(a) + (a - a) \cdot \delta(g_a)(a) = \delta(X)(a) \cdot f'(a).$$

On a ainsi démontré que

$$\forall f \in E, \quad \delta(f) = \delta(X) \cdot f'.$$

Toute dérivation sur  $E$  se déduit donc de la dérivation usuelle.

Quelle que soit la fonction  $\varphi \in E$ , l'application  $\delta_\varphi = [f \mapsto \varphi \cdot f']$  est une dérivation sur  $E$ . Il existe donc un isomorphisme entre  $E$  et les dérivations sur  $E$ .

## Solution 60

rms130-988

1. Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$f(P) = \underbrace{P(a)}_{\in \mathbb{R}} \cdot A \in \mathbb{R}_n[X]$$

et la linéarité de  $f$  est évidente :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(a) \cdot A = \lambda \cdot [P(a) \cdot A] + Q(a) \cdot A$$

donc  $f$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Manifestement, l'image de  $f$  est contenue dans la droite  $\mathbb{R} \cdot A$ , donc le rang de  $f$  est inférieur à 1.

Réciproquement,

$$f(A) = \underbrace{A(a)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{A}_{\neq 0} \neq 0$$

donc  $f$  n'est pas l'endomorphisme nul et son rang est donc égal à 1.

$$\text{Im } f = \mathbb{R} \cdot A$$

La suite est sans surprise lorsqu'on se souvient d'avoir traité plusieurs fois la diagonalisabilité des endomorphismes de rang 1 (cf rms130-1246 par exemple).

2. Comme  $A \neq 0$ , alors

$$f(P) = 0 \iff P(a) = 0$$

donc le noyau de  $f$  est aussi le noyau de la forme linéaire

$$[P \mapsto P(a)].$$

Comme cette forme linéaire n'est pas identiquement nulle, son noyau est un hyperplan.

Plus précisément, le noyau de  $f$  est l'idéal  $\langle (X - a) \rangle$ , c'est-à-dire

$$\text{Vect}((X - a)^k, 1 \leq k \leq n).$$

En d'autres termes, le scalaire 0 est une valeur propre de  $f$  et le sous-espace propre associé à 0 est un sous-espace de dimension  $n$ .

Il est normal que la dimension d'un hyperplan soit égale à  $n$  — puisque la dimension de l'espace  $\mathbb{R}_n[X]$  est égale à  $(n + 1)!$

Par ailleurs, si  $\lambda$  est une valeur propre non nulle de  $f$ , alors il existe un polynôme  $P \neq 0$  tel que

$$f(P) = P(a) \cdot A = \lambda \cdot P$$

et donc

$$P = \frac{P(a)}{\lambda} \cdot A \in \mathbb{R} \cdot A = \text{Im } f.$$

Réciproquement,  $f(A) = A(a) \cdot A$  (comme on l'a déjà vu), donc  $A(a)$  est une valeur propre de  $f$  et le sous-espace propre associé à  $A(a)$  est la droite vectorielle  $\mathbb{R} \cdot A$ .

En conclusion,  $f$  possède deux valeurs propres : 0 et  $A(a) \neq 0$  et comme

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker}[f - A(a) \cdot \operatorname{Id}] = \dim \mathbb{R}_n[X],$$

l'endomorphisme est diagonalisable.

*✎ Au cas où la question se poserait : la trace de  $f$  est égale à  $A(a)$  et son déterminant est nul (somme et produit des valeurs propres).*

3. D'après la question précédente, l'équation

$$P + P(a)A = B$$

d'inconnue  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  peut aussi s'écrire

$$(\operatorname{Id} + f)(P) = B.$$

L'endomorphisme  $\operatorname{Id} + f$  possède deux valeurs propres : 1 de multiplicité  $n$  et  $[1 + A(a)]$  de multiplicité 1.

✎ Si  $A(a) = -1$ , alors  $\operatorname{Id} + f$  est diagonalisable et

$$\operatorname{Sp}\{\operatorname{Id} + f\} = \{0; 1\}$$

donc  $\operatorname{Id} + f$  est un projecteur. Plus précisément, c'est la projection sur l'hyperplan

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Id} + f) = \operatorname{Ker}[(f + \operatorname{Id}) - \operatorname{Id}] = \operatorname{Ker} f = \langle (X - a) \rangle$$

parallèlement à la droite

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + f) = \operatorname{Ker}[f - A(a) \cdot \operatorname{Id}] = \mathbb{R} \cdot A.$$

Il faut alors distinguer deux cas.

— Ou bien  $B(a) = 0$ , c'est-à-dire  $B \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id} + f)$ . Dans ce cas, il est clair que

$$B + B(a) \cdot A = B$$

donc  $B$  est une solution particulière et la solution générale est la somme de cette solution particulière et d'un vecteur quelconque de  $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + f)$ . Donc l'ensemble  $E$  des solutions est une droite affine :

$$E = B + \mathbb{R} \cdot A.$$

— Ou bien  $B(a) \neq 0$ , donc  $B \notin \operatorname{Im}(\operatorname{Id} + f)$ . Dans ce cas, l'équation n'a pas de solution.

$$E = \emptyset$$

✎ Si  $A(a) \neq -1$ , alors l'endomorphisme  $\operatorname{Id} + f$  est en fait un automorphisme (son spectre ne contient pas 0) et l'ensemble  $E$  des solutions est un singleton.

Comme  $f$  est diagonalisable, en "concaténant" des bases de ses sous-espaces propres, on obtient une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Il est donc judicieux de considérer la base

$$\mathcal{B} = (A, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n).$$

Tout polynôme  $P$  admet une décomposition dans cette base :

$$P = \alpha_0 \cdot A + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot (X - a)^k.$$

En particulier ( $X \leftarrow a$ ), on a

$$P(a) = \alpha_0 \cdot \underbrace{A(a)}_{\neq 0}.$$

On dispose ainsi de la décomposition du second membre :

$$B = \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A + \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot (X - a)^k$$

et de la décomposition du premier membre :

$$P + P(a) \cdot A = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{A(a)}\right)}_{\neq 0} P(a) \cdot A + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot (X - a)^k.$$

La décomposition d'un vecteur dans une **base** étant unique, on peut identifier terme à terme et en déduire que l'unique solution de l'équation est

$$\begin{aligned} P &= \frac{B(a)}{A(a) \cdot [1 + A(a)]} \cdot A + \sum_{k=1}^n \beta \cdot (X - a)^k \\ &= \frac{B(a)}{A(a) \cdot [1 + A(a)]} \cdot A + B - \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A \\ &= \frac{-B(a)}{1 + A(a)} \cdot A + B. \end{aligned}$$

Il faut bien comprendre ce qui est implicite dans les calculs qui précèdent : on a décomposé les deux vecteurs  $B$  (la donnée) et  $P$  (l'inconnue) dans la somme directe des sous-espaces propres.

On a trouvé que

$$P = \underbrace{\frac{P(a)}{A(a)} \cdot A}_{\in \text{Ker}[(\text{Id} + f) - (1 + A(a))]} + \underbrace{\left( P - \frac{P(a)}{A(a)} \cdot A \right)}_{\in \text{Ker}[(\text{Id} + f) - 1]}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\text{Id} + f)(P) &= [1 + A(a)] \frac{P(a)}{A(a)} \cdot A + \left( P - \frac{P(a)}{A(a)} \cdot A \right) \\ &= \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A + \left( B - \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A \right). \end{aligned}$$

Or la décomposition d'un vecteur sur la somme directe

$$\mathbb{R}_n[X] = \text{Ker}[(\text{Id} + f) - [1 + A(a)]] \oplus \text{Ker}[(\text{Id} + f) - 1]$$

est unique, ce qui permet d'identifier terme à terme (et cette fois, il n'y a plus que **deux** termes). On en déduit que la solution est le polynôme

$$P = \frac{1}{1 + A(a)} \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A + \left( B - \frac{B(a)}{A(a)} \cdot A \right).$$

## Solution 61

rms130-996

1. Remarquons pour commencer que l'énoncé nous donne un polynôme annulateur unitaire de  $v$  :

$$X^2 + X + 1.$$

Comme  $E$  est un espace vectoriel *réel*, ce polynôme annulateur doit être considéré comme un polynôme irréductible (donc sans diviseur propre), c'est donc le **polynôme minimal** de  $v$ .

Comme il n'a pas de racine réelle, le spectre de  $v$  est vide.

Le spectre complexe de  $v$  est  $\{j, j^2 = \bar{j}\}$  et de ce point de vue, le polynôme minimal de  $v$  est scindé à racines simples donc les matrices qui représentent  $v$  sont diagonalisables en tant que matrices complexes.

Mais j'insiste, toute cette discussion est hors sujet !

Comme le vecteur  $x$  n'est pas nul, alors la "famille"  $(x)$  est libre. Si la famille  $(x, v(x))$  était liée, il existerait donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  (**espace vectoriel réel**!) tel que

$$v(x) = \lambda \cdot x$$

et  $x$  serait un vecteur propre de  $v$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

On a vu que  $v$  n'avait pas de valeur propre, donc la famille  $(x, v(x))$  est libre.

2. Même démarche ! On suppose cette fois que la famille

$$(x, y, v(x))$$

est libre. Par conséquent, si la famille

$$(x, y, v(x), v(y))$$

était liée, alors il existerait trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$v(y) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot v(x). \quad (18)$$

✎ En général, dans une famille liée, un vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres vecteurs... mais lequel ? Impossible de le savoir sans poser quelques calculs !

En revanche, quand on passe d'une famille **libre**

$$(u_1, \dots, u_n)$$

à une famille **liée**

$$(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}),$$

c'est le dernier vecteur ajouté, c'est-à-dire  $u_{n+1}$ , qui introduit la relation de liaison, c'est donc lui qu'on peut exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Par linéarité de  $v$ ,

$$\begin{aligned} -y - v(y) &= v^2(y) \\ &= a \cdot v(x) + b \cdot v(y) + c \cdot v^2(x) \\ &= a \cdot v(x) + b \cdot v(y) + c \cdot (-x - v(x)) \end{aligned}$$

donc

$$-c \cdot x + (a - c) \cdot v(x) + y + (b + 1) \cdot v(y) = 0$$

et d'après (18)

$$\begin{aligned} 0 &= -c \cdot x + (a - c) \cdot v(x) + y + (b + 1) \cdot (a \cdot x + b \cdot y + c \cdot v(x)) \\ &= [a(b + 1) - c] \cdot x + [1 + b(b + 1)] \cdot y + [(a - c) + (b + 1)c] \cdot v(x). \end{aligned}$$

Comme  $(x, y, v(x))$  est une famille libre, on en déduit que les trois coefficients de cette relation de liaison sont nuls et en particulier que

$$1 + b(b + 1) = 1 + b + b^2 = 0.$$

Comme  $b \in \mathbb{R}$ , c'est impossible !

On a démontré par l'absurde que la famille

$$(x, y, v(x), v(y))$$

était libre.

**3. a.** Dans un espace de dimension 4 (non réduit à  $\{0\}$  par conséquent), on peut choisir un vecteur  $e_1 \neq 0$ . On pose alors  $e_3 = v(e_1)$ .

D'après la première question, la famille  $(e_1, e_3)$  est nécessairement libre. Elle engendre un sous-espace de dimension 2, donc on peut choisir un vecteur  $e_2 \notin \text{Vect}(e_1, e_3)$  et poser  $e_4 = v(e_2)$ .

La famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est alors libre et d'après la deuxième question, la famille  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est libre elle aussi.

En tant que famille libre de 4 éléments dans un espace de dimension 4, il s'agit d'une base.

✎ Si on choisit un vecteur "au hasard" dans  $\mathbb{R}^4$ , il sera presque sûrement non nul. Et si on choisit ensuite "au hasard" un second vecteur dans  $\mathbb{R}^4$ , il sera presque sûrement en dehors du plan  $\text{Vect}(e_1, e_3)$  (en dimension 4 comme en dimension 3, le volume d'un plan est nul). On peut donc confier le soin de choisir la base  $(e_k)_{1 \leq k \leq 4}$  à la fonction **random** !

**3. b.** Par définition de  $e_2$  et  $e_4$  et d'après le polynôme minimal de  $v$ , la matrice de  $v$  dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

✎ Cette matrice n'est pas diagonalisable, car son polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples !

✎ On peut trouver le polynôme caractéristique de cette matrice sans aucun calcul !

En effet, le polynôme caractéristique est ici un polynôme unitaire de degré 4 (taille de la matrice !), c'est un multiple du polynôme minimal et ces deux polynômes ont les mêmes facteurs irréductibles. Cette dernière affirmation est hors-programme, on est seulement censé savoir que ces deux polynômes ont les mêmes racines.

Comme le polynôme minimal est irréductible de degré 2, on en déduit que le polynôme caractéristique est égal à

$$(X^2 + X + 1)^2.$$

✪ Si on souhaite poser les calculs, il vaut mieux changer de base... en remettant les vecteurs dans un ordre géométriquement intelligent ! En effet, la deuxième question nous a révélé que les deux plans  $\text{Vect}(e_1, e_3)$  et  $\text{Vect}(e_2, e_4)$  étaient supplémentaires dans  $E$  et tous les deux stables par  $v$  : ce serait dommage de négliger une telle information !

La matrice de  $v$  dans la base  $(e_1, e_3, e_2, e_4)$  est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

elle est donc diagonale par blocs et les blocs diagonaux sont des matrices compagnons ! Donc son polynôme caractéristique est bien  $(X^2 + X + 1)^2$ .

## Solution 62

rms130-1000

1. Par hypothèse, il existe une matrice inversible  $Q$  telle que

$$Q^{-1}MQ = N.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q^{-1}M^kQ = N^k$$

et par combinaison linéaire que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad Q^{-1}P(M)Q = P(N).$$

✎ L'application  $[A \mapsto Q^{-1}AQ]$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$  dans elle-même : tout est là !

2. Comme  $A$  est diagonalisable, le polynôme minimal  $\mu$  de  $A$  est un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples. Comme les matrices  $B_n$  sont semblables à  $A$ , elles ont même polynôme minimal que  $A$ , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(B_n) = 0_d.$$

L'application  $[M \mapsto \mu(M)]$  est continue sur  $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ .

✎ Sur une algèbre associative unitaire, l'identité  $[M \mapsto M]$  est continue ; un produit de fonctions continues est une fonction continue et une combinaison linéaire de fonctions continues est continue, donc toute application polynomiale  $[M \mapsto P(M)]$  est continue.

Cette propriété est indépendante de la dimension de l'algèbre, puisque l'identité est continue en toute dimension.

Donc l'hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = B$$

entraîne (par composition de limites) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$$

et donc que  $\mu$  est un polynôme annulateur de  $B$ .

Comme  $\mu$  est scindé à racines simples, on en déduit que  $B$  est diagonalisable.

✎ On a prouvé que  $\mu$  était un polynôme annulateur unitaire de  $B$ , on n'a pas encore prouvé que c'était le polynôme minimal de  $B$  !

✪ Considérons l'application qui, à une matrice  $M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ , associe son polynôme caractéristique  $\chi(M) \in \mathbb{K}_d[X]$ .

✎ Si  $M = (m_{i,j})$ , alors  $XI_d - M = (n_{i,j})$  avec  $n_{i,j} = -m_{i,j}$  si  $i \neq j$  et  $n_{i,i} = X - m_{i,i}$  et

$$\chi(M) = \det(XI_d - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) n_{1,\sigma(1)} \cdots n_{d,\sigma(d)}.$$

Seule cette formule permet de comprendre ce qui suit !

L'espace d'arrivée  $\mathbb{K}_d[X]$  est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur cet espace sont donc équivalentes. On peut ainsi le rapporter à sa base canonique :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad \chi(M) = \sum_{k=0}^d \chi_k(M) X^k$$

et en déduire que l'application  $\chi$  est continue de  $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}_d[X]$  si, et seulement si, les  $(d+1)$  composantes  $\chi_k$  ( $0 \leq k \leq d$ ) sont continues de  $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$ .

Or chaque composante  $\chi_k(M)$  est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice  $M$ . Donc l'application  $\chi$  est continue sur  $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ .

Comme  $A$  et les matrices  $B_n$  sont toutes semblables, elles ont même polynôme caractéristique. Par continuité de  $\chi$ ,

$$\chi(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi(B_n) = \chi(A).$$

Comme  $A$  et  $B$  ont même polynôme caractéristique, elles ont mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Ces matrices sont diagonalisables, donc leurs sous-espaces propres respectifs ont mêmes dimensions, ce qui prouve que  $A$  et  $B$  sont semblables.

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , les matrices

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables entre elles. Cependant, leur limite est la matrice nulle qui n'est semblable qu'à elle-même et donc pas semblable à  $B_1$ .

### Solution 63

**rms130-1054**

1. Comme  $\psi_A$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il est injectif si, et seulement si, il est surjectif.

Or la trace de  $\psi_A(M)$  est nulle, quelle que soit la matrice  $M$ , donc

$$\text{Im } \psi_A \subset [\text{tr}(N) = 0] \subsetneq \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

donc  $\psi_A$  n'est pas surjectif.

*▮ Ou, si on préfère, tout polynôme en  $A$  commute à  $A$ , donc*

$$\mathbb{R}[A] \subset \text{Ker } \psi_A$$

*et comme  $\dim \mathbb{R}[A] \geq 1$ , l'endomorphisme  $\psi_A$  n'est donc pas injectif.*

*On rappelle que la dimension de la sous-algèbre  $\mathbb{R}[A]$  est égale au degré du polynôme minimal de  $A$ . Elle est donc strictement positive!*

2. a. Pour  $k = 1$ , on a

$$AB - BA = B = 1.B^1$$

par hypothèse.

On suppose qu'il existe un entier  $k \geq 1$  tel que

$$AB^k - B^k A = k.B^k.$$

On multiplie à droite par  $B$  :

$$AB^{k+1} - B^k \cdot \underbrace{AB}_{=BA+B} = k.B^{k+1}$$

et en développant on obtient

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (k+1).B^{k+1}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

2. b. Comme  $\psi_A \in L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$ , le cardinal du spectre de  $\psi_A$  est inférieur à  $n^2 = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

Si  $B$  n'était pas nilpotente, alors  $B^k \neq 0_n$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Par conséquent,  $B^k$  serait un vecteur propre de  $\psi_A$  associé à la valeur propre  $k$  et le spectre de  $\psi_A$  contiendrait donc  $\mathbb{N}^*$  tout entier : c'est absurde!

Donc  $B$  est nilpotente.

3. La matrice  $N$  est la matrice nilpotente d'indice  $n$  de référence :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation

$$AN - NA = N$$

dont l'inconnue est  $A$ . C'est une équation linéaire avec second membre, donc la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène

$$BN - NB = 0.$$

### Résolution du système homogène

Résoudre le système homogène, c'est en fait calculer le commutant de  $N$ .

Il est clair que la sous-algèbre  $\mathbb{R}[N]$  des polynômes en  $N$  est contenue dans le commutant de  $N$ .

Avant d'aller plus loin, il est impératif de remarquer que : si

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d,$$

alors

$$P(N) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-4} \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots \\ & & & & a_0 & a_1 \\ & & & & & a_0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, y a-t-il dans le commutant de  $N$  des matrices qui ne sont pas des polynômes en  $N$ ? Eh bien non!

Notons  $(e_1, \dots, e_n)$ , la base canonique de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a

$$\forall 2 \leq i \leq n, \quad Ne_i = e_{i-1}$$

et aussi  $Ne_1 = 0$ . Par conséquent,

$$\forall 0 \leq k < i, \quad N^k e_i = e_{i-k}$$

ou, si on préfère,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad e_i = N^{n-i} e_n.$$

Considérons une matrice  $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$NB = BN$$

et décomposons la dernière colonne de  $B$  dans la base canonique :

$$Be_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot e_i = \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot N^{n-i} \right) e_n.$$

Comme  $N$  et  $B$  commutent, alors  $N^k$  et  $B$  commutent quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ . Donc

$$Be_i = BN^{n-i} e_n = N^{n-i} Be_n = N^{n-i} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot N^{n-i} \right) e_n \right]$$

et comme la sous-algèbre  $\mathbb{R}[N]$  est commutative, on en déduit que

$$\begin{aligned} N^{n-i} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot N^{n-i} \right) e_n \right] &= \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot N^{n-i} \right) (N^{n-i} e_n) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot N^{n-i} \right) e_i \end{aligned}$$

et donc que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad B e_i = \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot N^{n-i} \right) e_i.$$

Comme  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une **base**, on en déduit que

$$B = \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot N^{n-i} \right) \in \mathbb{R}[N].$$

Bref, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$NB - BN = 0$$

est exactement le sous-espace (ou la sous-algèbre) des polynômes en  $N$ .

✎ *D'une manière générale, le commutant d'une matrice  $M$  contient toujours la sous-algèbre des polynômes en  $M$ .*

### Solution particulière

Avec  $A_0 = \text{Diag}(n, n-1, \dots, 2, 1)$ , on a

$$A_0 N = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n & & & \\ & n-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 2 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et aussi

$$N A_0 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

donc on a bien

$$A_0 N - N A_0 = N.$$

### Conclusion

La matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  vérifie

$$AN - NA = N$$

si, et seulement si, il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$A = A_0 + P(N).$$

✎ *Mais comment peut-on penser à  $A_0$  ???*

*J'ai commencé par écrire le produit  $AN$  colonne par colonne et le produit  $NA$  ligne par ligne (cf plus haut). C'était un peu plus clair, mais pas encore assez !*

*J'ai donc posé le calcul comme un bourrin : l'équation  $AN - NA = N$  devient alors*

$$\begin{pmatrix} -a_{2,1} \\ \vdots \\ -a_{n,1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline a_{i,j-1} - a_{i+1,j} \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

*On en déduit tout d'abord que*

$$\begin{cases} a_{2,1} = \cdots = a_{n,1} = 0 \\ a_{n,1} = \cdots = a_{n,n-1} = 0 \end{cases}$$

*mais aussi que*

$$\forall j \neq i+1, \quad a_{i,j-1} = a_{i+1,j}$$

(j'ai renoncé à ce moment-là à être plus précis sur les quantificateurs), ce qui m'a donné

$$a_{2,1} = \dots = a_{i,i-1} = a_{i+1,i} = \dots = a_{n,n-1} = 0.$$

En n'ayant pas encore regardé de près à quoi ressemblait l'ensemble des solutions de l'équation homogène, j'ai alors cherché une solution particulière diagonale en remarquant que

$$\forall j = i+1, \quad a_{i,i} = a_{i+1,i+1} + 1$$

et le tour était joué : il suffisait de vérifier que la matrice  $A_0$  était une solution particulière.

### Solution 64

rms130-1133

1. La matrice  $A$  admet  $X^3 + X = X(X^2 + 1) = X(X+i)(X-i)$  pour polynôme annulateur. Ce polynôme annulateur est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}[X]$ , donc la matrice  $A$  est diagonalisable en tant que matrice complexe :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \quad P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

où les  $\lambda_i$  appartiennent à  $\{0, i, -i\}$  (= l'ensemble des racines du polynôme annulateur).

✎ Ce polynôme annulateur n'est pas scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Si la matrice  $A$  était diagonalisable en tant que matrice réelle, alors son polynôme minimal serait scindé à racines simples dans  $\mathbb{R}[X]$ . Comme le seul diviseur scindé de ce polynôme est  $X$ , cela signifierait que  $A$  serait la matrice nulle !

2. Comme  $u \neq 0$ , le rang de  $u$  n'est pas nul. Donc il y a au moins une valeur propre non nulle parmi les  $\lambda_k$ .

Comme  $A$  est une matrice réelle, ses valeurs propres complexes sont deux à deux conjuguées avec la même multiplicité. Par conséquent,  $i$  et  $-i$  sont toutes les deux valeurs propres. Leur multiplicité commune ne peut pas être strictement supérieure à 1 (on est en dimension 3!), donc la matrice  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

et son rang est égal à 2.

3. Soit  $x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$ . Il existe donc  $x_0 \in E$  tel que  $x = u(x_0)$  et

$$u(x) = u^2(x_0) = 0_E.$$

Comme  $u^3 + u = 0$  et que  $u$  est linéaire, on en déduit que

$$x = u(x_0) = -u^3(x_0) = -u(0_E) = 0_E.$$

Ainsi  $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0_E\}$ .

D'après le Théorème du rang,  $\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u$ . Par conséquent,

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

✎ On a donné ici une preuve élémentaire qui repose sur le polynôme annulateur connu. Mais le résultat établi est en fait vrai pour tout endomorphisme ayant un polynôme annulateur dont 0 est racine simple !

Supposons que  $P = XP_0$  soit un polynôme annulateur de  $u$  et que  $P_0$  ne soit pas divisible par  $X$ . Le polynôme  $P_0$  est alors premier à  $X$  et (Bézout !) il existe deux polynômes  $A$  et  $B$  tels que

$$AX + BP_0 = 1.$$

On en déduit que

$$P_0(u) \circ u = 0 \quad \text{et que} \quad A(u) \circ u + B(u) \circ P_0(u) = \text{Id}.$$

Considérons alors un vecteur  $x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$  : il existe un vecteur  $x_0$  tel que  $x = u(x_0)$  et par conséquent

$$\begin{aligned} x &= \text{Id}(x) = A(u)[u(x)] + B(u)[P_0(u) \circ u(x)] \\ &= A(u)(0_E) + B(u)(0_E) = 0_E. \end{aligned}$$

On a donc  $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0_E\}$  et donc  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$  (Théorème du rang).

4. Comme  $X$  et  $X^2 + 1$  sont premiers entre eux et que leur produit est un polynôme annulateur de  $u$ , on déduit du Théorème de décomposition des noyaux que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}).$$

☞ Suffit-il d'annoncer que  $X$  et  $X^2 + 1$  sont premiers entre eux ? Ou faut-il prendre la peine d'écrire la relation de Bézout :

$$(-X).X + (1).(X^2 + 1) = 1$$

qui justifie ce fait ?

♣ Comme  $u^3 + u = 0$ , alors

$$\forall x \in E, \quad (u^2 + \text{Id})[u(x)] = (u^3 + u)(x) = 0_E$$

donc  $\text{Im } u \subset \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ .

D'après les décompositions en somme directe,

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$$

on a aussi  $\dim \text{Im } u = \dim \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$  et par conséquent (inclusion et égalité des dimensions)

$$\text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + \text{Id}).$$

☞ Il suffit de tracer trois droites dans le plan pour constater qu'on peut avoir

$$E = F \oplus G = F \oplus H$$

sans que pour autant  $G = H$  !

5. Considérons un vecteur directeur  $e_1$  de  $\text{Ker } u$  (qui est une droite comme on l'a vu).

♣ Considérons un vecteur  $e_2$  non nul dans le plan  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ . Si  $e_2$  et  $u(e_2)$  étaient colinéaires (en tant que vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , pas en tant que vecteurs de  $\mathbb{C}^3$ ), alors il existerait un réel  $\lambda$  tel que

$$u(e_2) = \lambda \cdot e_2.$$

On aurait alors  $u^2(e_2) = \lambda^2 \cdot e_2$ , et comme  $\lambda \in \mathbb{R}$ , cela contredirait  $u^2(e_2) = -e_2$  (puisque  $e_2 \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ ).

Par conséquent,  $(e_2, u(e_2))$  est toujours une famille libre, et donc une base, de  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id})$  (quel que soit le choix du vecteur  $e_2$  dans ce plan).

♣ Comme  $\text{Ker } u$  et  $\text{Ker}(u^2 + \text{Id})$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ , on en déduit que

$$(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, u(e_2))$$

est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

On observe alors que

$$u(e_1) = 0_E = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$u(e_2) = e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

$$u(e_3) = -e_2 = 0 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

puisque  $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$  (car  $e_2 \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ ).

Par conséquent, la matrice de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution 65****rms130-1135**

1. On peut calculer facilement le polynôme caractéristique au moyen d'opérations de pivot judicieuses (et sans passer par une relation de récurrence).

Partant de

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & & b \\ & b & & \\ & & b & \\ b & & & a-\lambda \\ & b & & b & a-\lambda \end{vmatrix}$$

on effectue d'abord les opérations

$$\forall 2 \leq i \leq n, \quad L_i \leftarrow L_i - L_1$$

pour obtenir

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & & b \\ b-a+\lambda & a-b-\lambda & 0 & 0 \\ & 0 & & \\ b-a+\lambda & 0 & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

avant d'effectuer

$$C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^n C_j$$

pour parvenir à une matrice triangulaire

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda+(n-1)b & b & & b \\ 0 & a-b-\lambda & 0 & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

qui donne directement

$$\chi_M = (X - a + b)^{n-1} (X - a - (n-1)b).$$

• On en déduit en particulier que

$$\det M(a, b) = (-1)^n \chi_M(0) = (a - b)^{n-1} (a + (n-1)b).$$

🔗 On n'est pas obligé de calculer le polynôme caractéristique pour trouver le déterminant !

🔗 **Autre méthode très astucieuse pour calculer le déterminant.**

On commence par considérer

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & & c+x \\ b+x & & & c+x \\ & b+x & & a+x \\ b+x & & b+x & a+x \end{vmatrix}.$$

On peut vérifier que  $f$  est une fonction affine de  $x$  en effectuant les opérations de pivot

$$\forall 2 \leq j \leq n, \quad C_j \leftarrow C_j - C_1$$

pour obtenir

$$\begin{vmatrix} a+x & c-a & & c-a \\ b+x & a-b & c-b & c-b \\ & 0 & & c-b \\ b+x & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

qu'on développe par la première colonne :

$$f(x) = (a+x) \times M_{1,1} + (b+x) \times \left[ \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} M_{i,1} \right]$$

où les mineurs  $M_{i,1}$  ne dépendent pas de  $x$ .

Il existe donc deux constantes  $A$  et  $B$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Ax + B.$$

• Pour  $x = -c$ , il est clair que

$$f(c) = Ac + B = (a-c)^n$$

(déterminant d'une matrice triangulaire inférieure) et pour  $x = -b$ , il est tout aussi clair que

$$f(b) = Ab + B = (a-b)^n$$

(déterminant d'une matrice triangulaire supérieure).

• En supposant que  $b \neq c$ , on déduit des formules de Cramer que

$$A = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{c-b} \quad \text{et} \quad B = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

En particulier,

$$f(0) = B = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

• En tant que fonction de  $b$  et  $c$ , l'expression  $f(x)$  est continue (car polynomiale !) donc

$$\det M(a, b) = \lim_{c \rightarrow b} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$$

On pose alors  $c = b + h$  et on conclut par un développement limité :

$$\frac{(a-b)^n}{h} \cdot \left( (b+h) - b \left[ 1 - \frac{h}{a-b} \right]^n \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} (a-b)^{n-1} ((a-b) + nb).$$

2. La matrice  $M(a, b)$  est symétrique mais ses coefficients  $a$  et  $b$  sont complexes : on ne peut donc pas conclure directement à l'aide du Théorème spectral !

La matrice  $M(0, 1)$  est, elle, symétrique réelle donc diagonalisable : il existe une matrice de passage  $Q$  telle que

$$Q^{-1}M(0, 1)Q$$

soit diagonale.

On en déduit alors que, quels que soient les nombres complexes  $a$  et  $b$ , la matrice

$$Q^{-1}M(a, b)Q = a \underbrace{Q^{-1}M(1, 0)Q}_{I_n} + b \underbrace{Q^{-1}M(0, 1)Q}_{\text{diag.}}$$

est diagonale, ce qui prouve que toutes les matrices  $M(a, b)$  sont diagonalisables.

• Qu'on puisse ici choisir la matrice de passage dans le groupe orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$  est sans intérêt.

3. Si  $b = 0$ , alors  $M(a, b) = aI_n$  est une homothétie et son polynôme minimal est donc  $(X - a)$ .

Si  $b \neq 0$ , alors  $M(a, b)$  n'est pas une homothétie et le degré de son polynôme minimal est donc supérieur à 2.

Il est alors classique de considérer la matrice

$$J = M(1, 1)$$

dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a donc

$$J^2 = nJ$$

et comme

$$M(a, b) - (a-b)I_n = bJ$$

alors

$$\begin{aligned} [M(a, b) - (a - b)I_n]^2 &= b^2 J^2 \\ &= nb \cdot (bJ) \\ &= nb \cdot [M(a, b) - (a - b)I_n]. \end{aligned}$$

Cela nous montre que le polynôme

$$[X - (a - b)]^2 - nb \cdot [X - (a - b)]$$

est un polynôme annulateur de  $M(a, b)$ , de degré 2 et unitaire : c'est donc le polynôme minimal de  $M(a, b)$ .

Conclusion :

$$\mu_M = (X - a + b)(X - a - (n - 1)b).$$

#### ▮ Variante plus élaborée :

Le polynôme caractéristique de  $M(a, b)$  nous donne ses deux valeurs propres (ou sa valeur propre si  $b = 0$ ) et on sait que  $M(a, b)$  est diagonalisable. Par conséquent, son polynôme minimal est unitaire, scindé, à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de  $M(a, b)$  (c'est-à-dire les racines de  $\chi_M$ ) : cela caractérise le polynôme minimal.

4. Comme  $I_n + M(a, b) = M(a + 1, b)$ , le déterminant de  $I_n + M(a, b)$  est égal à

$$(1 + a - b)^{n-1} (1 + a + (n - 1)b).$$

### Solution 66

rms130-1202

1. Par hypothèse, le polynôme

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

est un polynôme annulateur de  $u$ .

• La dimension de  $\mathbb{R}^3$  est égale à 3, donc le degré du polynôme caractéristique  $\chi$  de  $u$ , égal à 3, est impair.

Tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré impair possède au moins une racine réelle (avatar du Théorème des valeurs intermédiaires), donc  $\chi$  possède au moins une racine réelle, donc  $u$  admet au moins une valeur propre réelle.

Toute valeur propre de  $u$  est en particulier une racine du polynôme annulateur  $(X^3 - 1)$  et la seule racine réelle de  $(X^3 - 1)$  est égale à 1. Par conséquent, 1 est bien une valeur propre de  $u$  (et c'est sa seule valeur propre réelle).

2. Les facteurs  $(X - 1)$  et  $(X^2 + X + 1)$  sont irréductibles (dans  $\mathbb{R}[X]$ ), unitaires et distincts, donc ils sont premiers entre eux. Comme leur produit :  $(X^3 - 1)$  est un polynôme annulateur de  $u$ , on déduit du Théorème de décomposition des noyaux

$$E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}).$$

3. Commençons par analyser la matrice donnée.

Si cette matrice représente  $u$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , alors

$$e_2 = u(e_1), \quad e_3 = u(e_2) = u^2(e_1) \quad \text{et} \quad e_1 = u(e_3) = u^3(e_1) = e_1$$

puisque, par hypothèse,  $u^3 = \text{Id}$ .

▮ Ainsi  $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ . Il s'agit donc uniquement de bien choisir le vecteur  $e_1$ ...

• Si on choisit  $e_1 \in \text{Ker}(u - \text{Id})$ , alors  $e_2 = u(e_1) = e_1$ , ce qui contredit le fait que la famille  $(e_1, e_2)$  doive être une famille libre.

• Si on choisit  $e_1 \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ , alors

$$e_3 + e_2 + e_1 = (u^2 + u + \text{Id})(e_1) = 0$$

ce qui contredit le fait que la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  soit libre.

• Puisque  $E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ , le vecteur  $e_1$  peut être décomposé

$$e_1 = \underbrace{y}_{\in \text{Ker}(u - \text{Id})} + \underbrace{z}_{\in \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})}$$

et d'après ce qui précède, il faut que  $y \neq 0$  et que  $z \neq 0$ .

► Comme  $1 \in \text{Sp}(u)$ , alors  $\text{Ker}(u - \text{Id}) \neq \{0\}$ , donc il existe  $y_0$  non nul dans  $\text{Ker}(u - \text{Id})$ .

► Comme  $u \neq \text{Id}$ , alors  $\text{Ker}(u - \text{Id}) \subsetneq \mathbb{R}^3$ , donc  $\text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}) \neq \{0\}$  et il existe  $z_0 \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ , non nul.

La famille  $(z_0)$  est donc une famille libre.

## ► Le sous-espace

$$G = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$$

est stable par  $u$  et l'endomorphisme  $u_G \in L(G)$  induit par restriction de  $u$  admet évidemment  $X^2 + X + 1$  pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme n'a pas de racine réelle, cela signifie que  $u_G$  n'a pas de valeur propre réelle et donc que le sous-espace  $G$  ne contient aucun vecteur propre de  $u_G$ .

Si le couple

$$(z_0, u(z_0)) = (z_0, u_G(z_0))$$

était lié, alors  $z_0$  serait un vecteur propre de  $u_G$  : on vient de voir que c'est impossible!

Par conséquent, le couple  $(z_0, u(z_0))$  est une famille libre.

► Comme les sous-espaces  $\text{Ker}(u - \text{Id})$  et  $G$  sont en somme directe, que  $(y_0)$  est une famille libre de  $\text{Ker}(u - \text{Id})$  et que  $(z_0, u(z_0))$  est une famille libre de  $G$ , la famille

$$(y_0, z_0, u(z_0))$$

est libre.

✎ La propriété de somme directe permet de concaténer des familles libres en conservant l'indépendance linéaire des vecteurs (sans avoir à poser de calculs pour justifier ce fait).

## ► Posons maintenant

$$e_1 = y_0 + z_0.$$

Par linéarité de  $u$ ,

$$u(e_1) = y_0 + u(z_0) \quad \text{et} \quad u^2(e_1) = y_0 + u^2(z_0) = y_0 - z_0 - u(z_0)$$

puisque  $z_0 \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$  et donc  $u^2(z_0) + u(z_0) + z_0 = 0$ .

▷ Soient  $a, b$  et  $c$ , trois réels tels que

$$ae_1 + bu(e_1) + cu^2(e_1) = 0.$$

On en déduit que

$$(a + b + c)y_0 + (a - c)z_0 + (b - c)u(z_0) = 0.$$

▷ Comme la famille  $(y_0, z_0, u(z_0))$  est libre, on en déduit que

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

et donc que  $a = b = c = 0$  (système de Cramer). Par conséquent, la famille

$$(e_1, u(e_1), u^2(e_1))$$

est libre. Il s'agit donc d'une base de  $\mathbb{R}^3$  et la matrice de  $u$  relative à cette base est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(par définition de la base pour les deux premières colonnes; à cause de  $u^3 = \text{Id}$  pour la troisième colonne).

**Solution 67****rms130-1203**

1. Soient  $a$  et  $b$ , deux réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ae_1(t) + be_2(t) = 0.$$

Avec  $t = 0$ , on obtient  $a = 0$  et avec  $t = \pi/2$ , on a aussi  $b = 0$ . Donc la famille  $(e_1, e_2)$  est libre.

2. L'application  $T_f$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , en tant que combinaison linéaire de  $e_1$  et de  $e_2$ .

D'autre part,

$$[f \mapsto f(0)] \quad \text{et} \quad [f \mapsto f'(0)]$$

sont bien des formes linéaires sur  $E$ , donc  $[f \mapsto T_f]$  est bien une application linéaire.

✎ On sait que la dimension de l'espace de départ  $E$  est infinie. On a remarqué que l'image de  $u$  était contenue dans  $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ , espace vectoriel de dimension deux.

Comme  $\dim F < \dim E$ , l'application  $u \in L(E, F)$  n'est pas injective.

3. On a déjà remarqué que le sous-espace  $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$  était stable par  $u$ , donc il existe bien un endomorphisme de  $F$  induit par restriction de  $u$  : c'est celui que l'énoncé note  $v$ .

✎ La question est très mal formulée. La notation  $u|_F$  désigne la restriction de  $u$  à  $F$  et, par définition, il s'agit d'une application de  $F$  dans  $E$  (puisque  $u : E \rightarrow E$ ), qui ne peut donc pas être un endomorphisme.

4. D'après la première question,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est une base de  $F$ . Dans cette base, la matrice de  $v$  est

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

La trace est égale à  $3 = 2 + 1$  et le déterminant à  $2 = 2 \times 1$ , donc les valeurs propres de  $v$  sont 1 et 2.

♣ Comme

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -9 \end{pmatrix},$$

les applications

$$2e_1 + 3e_2 \quad \text{et} \quad 3e_1 + 4e_2$$

sont des vecteurs propres de  $v$  respectivement associés aux valeurs propres 1 et 2.

♣ En posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

on définit donc une matrice inversible telle que

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(1, 2).$$

## Solution 68

rms130-1204

✎ On n'a ici aucune idée de ce que pourrait être le polynôme minimal de  $f$  (on ne dispose d'aucune indication sur la nature géométrique de  $f$  [projecteur, symétrie...] par exemple).

Le seul théorème applicable est donc celui qui nous assure que le degré du polynôme minimal est inférieur à la dimension de l'espace vectoriel ambiant.

On ne peut donc pas se contenter d'étudier  $f$ , endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Le sous-espace  $\text{Im } f$  est un sous-espace stable par  $f$  de dimension  $r = \text{rg } f$ . On note  $f_0$ , l'endomorphisme de  $F = \text{Im } f$  induit par restriction de  $f$  à  $\text{Im } f$ .

Comme  $\dim \text{Im } f = r$ , on en déduit que le degré du polynôme minimal de  $f_0$  est inférieur ou égal à  $r$ .

Il existe donc un polynôme

$$\mu_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

dont le degré  $d$  est inférieur à  $r$  et qui annule  $f_0$  :

$$\forall y \in \text{Im } f, \quad (f_0^d + a_{d-1}f_0^{d-1} + \cdots + a_1f_0 + a_0 \text{Id})(y) = 0_E.$$

Comme  $f_0$  est induit par restriction de  $f$  à  $\text{Im } f$ , on en déduit qu'en fait

$$\forall y \in \text{Im } f, \quad (f^d + a_{d-1}f^{d-1} + \cdots + a_1f + a_0 \text{Id})(y) = 0_E.$$

Pour tout  $x \in E$ , on a  $y = f(x) \in \text{Im } f$  (par définition même de  $\text{Im } f$ ), donc

$$\forall x \in E, \quad (f^d + a_{d-1}f^{d-1} + \cdots + a_1f + a_0 \text{Id})[f(x)] = 0_E$$

ce qui prouve que le polynôme

$$X^{d+1} + a_{d-1}X^d + \cdots + a_1X^2 + a_0X$$

est un polynôme unitaire annulateur de  $f$ .

Le polynôme minimal de  $f$  est un diviseur de ce polynôme, donc le degré du polynôme minimal de  $f$  est inférieur ou égal à  $(r + 1)$ .

## Solution 69

rms130-1206

1.

✎ Nous allons traiter cet exercice de manière élémentaire, mais on pourrait évoquer plusieurs résultats de nature géométrique pour aller plus vite en voyant plus loin. À tout à l'heure !

On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de telle sorte que

$$A = (x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$$

ou, plus clairement en lisant A colonne par colonne,

$$A = (x_1 X \quad x_2 X \quad \cdots \quad x_n X).$$

♣ Comme  $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  n'est pas la colonne nulle,

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n x_k^2 > 0$$

donc la matrice A n'est pas la matrice nulle et son rang est donc au moins égal à 1.

Réciproquement, toutes les colonnes de A sont proportionnelles à la colonne X, donc le rang de A est au plus égal à 1.

Bref : le rang de A est égal à 1.

♣ En particulier, 0 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé à cette valeur propre (alias  $\text{Ker } A$ ) est un sous-espace de dimension  $(n - 1)$ .

D'autre part,

$$AX = (XX^T) \cdot X = X \cdot \underbrace{(X^T X)}_{=\text{tr}(A) \in \mathbb{R}} = \text{tr}(A) \cdot X$$

et comme la colonne X n'est pas la colonne nulle, il s'agit d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre  $\text{tr}(A) > 0$ .

Conclusion : le spectre de A est  $\{0, \text{tr}(A)\}$ .

2. On a trouvé deux valeurs propres distinctes 0 et  $\text{tr}(A) > 0$ , on a constaté que les dimensions des deux sous-espaces propres étaient respectivement égale à  $(n - 1)$  et au moins égale à 1, donc A est diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à  $\text{tr}(A)$  est donc la droite  $\mathbb{R} \cdot X$  et le polynôme caractéristique de A est donc égal à

$$(X - 0)^{n-1} (X - \text{tr } A)^1 = X^{n-1} (X - \text{tr } A).$$

3. Comme A est semblable à

$$\text{Diag}(\text{tr } A, 0, \dots, 0),$$

alors  $I_n + A$  est semblable à

$$\text{Diag}(1 + \text{tr } A, 1, \dots, 1)$$

donc

$$\det(I_n + A) = (1 + \text{tr } A) \cdot 1^{n-1} = 1 + \text{tr } A = 1 + X^T \cdot X.$$

✎ Un peu de géométrie maintenant ?

Soient  $e$ , le vecteur représenté par la colonne X dans la base canonique de  $E = \mathbb{R}^n$  et  $\varphi$ , l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de E.

On suppose que E est muni du produit scalaire canonique. Dans ces conditions,

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u) = e \cdot \langle e | u \rangle = \langle e | u \rangle \cdot e = \|e\|^2 \cdot p(u)$$

où  $p$  est la projection orthogonale sur la droite  $D = \mathbb{R} \cdot e$ .

Il est donc clair que le rang de  $\varphi$  est égal à 1 (= le rang de  $p$ ), que les valeurs propres de  $\varphi$  sont 0 et  $\|e\|^2$  (proportionnelles aux valeurs propres de  $p$ ) et que les sous-espaces propres de  $\varphi$  respectivement associés à ces valeurs propres sont l'hyperplan  $H = (\mathbb{R} \cdot e)^\perp$  et  $\mathbb{R} \cdot e$  (= les sous-espaces propres de  $p$ , c'est-à-dire le noyau et l'image de la projection).

**Solution 70****rms130-1208**

1. Comme la matrice  $M$  est complexe, elle est trigonalisable : il existe une matrice  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$Q^{-1}M^2Q = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

et comme des matrices semblables ont même trace, on en déduit que

$$\text{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

2. On considère ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La question précédente nous suggère de calculer

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \cdots & 2 & n \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & n \end{pmatrix}.$$

✎ Si on se laisse emporter par son élan (ce qui ne manque pas d'arriver si on a déjà étudié cette matrice), on trouve aussi

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} 2n + (2n-4) & 4 + (2n-4) & \cdots & 4 + (2n-4) & 2n + (2n-4) \\ 4 + (2n-4) & 4 & \cdots & 4 & 4 + (2n-4) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 4 + (2n-4) & 4 & \cdots & 4 & 4 + (2n-4) \\ 2n + (2n-4) & 4 + (2n-4) & \cdots & 4 + (2n-4) & 2n + (2n-4) \end{pmatrix} \\ &= 2A^2 + (2n-4)A \end{aligned}$$

ce qui prouve que le polynôme minimal de  $A$  est égal à

$$X^3 - 2X^2 - (2n-4)X = X[X^2 - 2X - (2n-4)]$$

et le spectre de  $A$  s'en déduit facilement.

Mais quel rapport avec la première question ?

✎ Il est clair que le rang de la matrice  $A$  est égal à 2 : les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles et toutes les autres colonnes sont égales à l'une de ces deux colonnes.

Comme  $n \geq 3$ , alors 0 est une valeur propre de  $A$  et le sous-espace propre associé est un sous-espace de dimension  $(n-2)$ . Plus précisément, une base à peu près évidente de  $\text{Ker } A$  est

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

c'est-à-dire (en faisant appel à la base canonique de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ )

$$\text{Ker } A = \text{Vect}(E_1 - E_n, \underbrace{E_2 - E_3, \dots, E_2 - E_i, \dots, E_2 - E_{n-1}}_{(n-3) \text{ vecteurs}})$$

✎ Il est plus simple de donner une caractérisation cartésienne de ce sous-espace propre :

$$\begin{aligned}\text{Ker } A &= [x_1 + \dots + x_n = 0] \cap [x_1 + x_n = 0] \\ &= [x_1 + x_n = 0] \cap [x_2 + \dots + x_{n-1} = 0]\end{aligned}$$

mais l'énoncé demande les **vecteurs propres** et pas seulement les sous-espaces propres.

✎ En considérant très provisoirement  $A$  comme une matrice complexe, on peut appliquer le résultat établi à la première question ! En effet, le spectre de  $A$  est

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-2)}\}$$

donc

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A = 2 \quad \text{et} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \text{tr } A^2 = 4n - 4.$$

Or  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2$ , donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1\lambda_2 = 4 - 2n \end{cases}$$

ce qui prouve que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les racines du polynôme

$$X^2 - 2X + (4 - 2n)$$

et donc que

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2n-3}.$$

Nous allons nous passer de ces valeurs et calculer simultanément les vecteurs propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en écrivant ces deux valeurs propres sous la forme  $1 + \alpha$ .

Il s'agit donc de résoudre le système

$$AX = (1 + \alpha)X$$

sachant que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle (puisque  $1 + \alpha$  est une valeur propre simple).

Pour  $2 \leq i < n$ , on obtient

$$x_1 + x_n = (1 + \alpha)x_i$$

et comme  $1 + \alpha \neq 0$ , on en déduit que

$$x_2 = \dots = x_{n-1}$$

et nous allons utiliser  $x_2$  comme un paramètre pour exprimer les autres coordonnées.

La première équation nous donne alors

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = x_1 + \alpha x_1$$

c'est-à-dire

$$\alpha x_1 - x_n = (n-2)x_2.$$

La dernière équation est inutile puisque la matrice  $[A - (1 + \alpha)I_n]$  n'est pas inversible.

Bref, il s'agit en fait de résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_n = (n-2)x_2 \\ x_1 + x_n = (1 + \alpha)x_2 \end{cases}$$

en fonction du paramètre  $x_2$  : on applique les formules de Cramer et on en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre  $1 + \alpha$  ont pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{(n-2)+(1+\alpha)}{1+\alpha} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\alpha(1+\alpha)-(n-2)}{1+\alpha} \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \end{pmatrix}$$

puisque  $\alpha^2 = 2n - 3$ .

✎ Et si  $1 + \alpha$  n'était pas valeur propre ? Dans ce cas, la dernière équation viendrait compléter ces calculs et nous devrions imposer  $x_2 = 0$  pour éviter toute contradiction. Le vecteur nul serait donc la seule solution...

✎ Il est bon de conclure en remarquant que la matrice  $A$  est symétrique réelle et qu'on n'est donc pas surpris de constater qu'elle est diagonalisable !

Bien que pertinente, cette remarque n'apporte aucune aide dans les calculs à mener ici...

On peut aussi préciser que **les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux**, ce qui est assez facile à vérifier sur les bases qu'on en a données. Le seul calcul à poser est le suivant (pour vérifier l'orthogonalité des sous-espaces propres associés à  $1 \pm \alpha$ ) :

$$2 \frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{n-1-\alpha}{1-\alpha} + (n-2) = 2 \frac{(n-1)^2 - \alpha^2}{1-\alpha^2} + (n-2) = 0$$

puisque  $\alpha^2 = 2n - 3$ .

✎ On peut aussi calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . On suivra une tradition typographique bien établie : les coefficients nuls ne seront pas écrits.

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\lambda \in \mathbb{C}$ , aucune importance !)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ \lambda & & & & -\lambda \end{vmatrix} \quad (L_n \leftarrow L_n - L_1) \end{aligned}$$

On factorise la dernière ligne par  $-\lambda$  et on continue :

$$\det(A - \lambda I_n) = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_n)$$

On développe par la dernière ligne et (**astuce!**) on multiplie la première ligne par  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= - \begin{vmatrix} \lambda(2-\lambda) & \lambda & \cdots & \lambda \\ 2 & -\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \lambda(2-\lambda) + 2(n-2) & & & \\ & 2 & & -\lambda \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \\ &= -(-\lambda)^{n-2} [\lambda(2-\lambda) + 2(n-2)] \end{aligned}$$

et par conséquent le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$X^{n-2} [X^2 - 2X - 2n + 4].$$

## Solution 71

rms130-1212

1. Par bilinéarité de la multiplication matricielle

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),$$

l'application  $f_A$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

2. Si  $A^2 = A$ , alors

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad (f_A \circ f_A)(M) = A(AM) = A^2M = AM = f_A(M)$$

donc  $f_A$  est un projecteur de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

3. En généralisant le calcul précédent (récurrence + combinaison linéaire), on constate que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad P(f_A)(M) = P(A)M. \quad (19)$$

• Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$ , alors la relation (19) montre que  $P(f_A)$  est l'endomorphisme nul de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  et donc que  $P$  est aussi un polynôme annulateur de  $f_A$ .

• Réciproquement, si  $P$  est un polynôme annulateur de  $f_A$ , alors  $P(A)M$  est la matrice nulle quelle que soit la matrice  $M$  et en particulier  $P(A) = 0_n$  (pour  $M = I_n$ !). Donc  $P$  est aussi un polynôme annulateur de  $A$ .

• En conclusion, la matrice  $A$  et l'endomorphisme  $f_A$  ont le même idéal annulateur et par suite, elles ont le même polynôme minimal.

Or une matrice/un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples, donc  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $f_A$  est diagonalisable.

🔗 On aurait pu répondre à cette question en comparant les sous-espaces propres de  $A$  aux sous-espaces propres de  $f_A$ . Mais pour cela, il aurait fallu traiter les questions suivantes au préalable!

Pour aborder les questions de cet exercice dans l'ordre où elles sont posées (ce qui est le choix de l'examinateur), il faut donc pouvoir caractériser les matrices/endomorphismes diagonalisables sans connaître leurs valeurs propres et les sous-espaces propres : il ne reste donc que le polynôme minimal!

4. Si  $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une colonne non nulle telle que  $AX = \lambda X$ , alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

n'est pas la matrice nulle et

$$f_A(M) = AM = \begin{pmatrix} AX & AX & \cdots & AX \end{pmatrix} = \lambda M$$

donc  $M$  est bien un vecteur propre de  $f_A$  associé à  $\lambda$ . Par conséquent,  $\lambda$  est aussi une valeur propre de  $f_A$ .

🔗 Plus subtilement, si  $X^i$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_i$ , alors la famille des matrices définies par

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad X_j^i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & X^i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

$\uparrow$   
 j-ème colonne

est une famille libre de vecteurs propres de  $f_A$  associés à  $\lambda_i$ .

• Réciproquement, si  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  n'est pas la matrice nulle et si  $AM = \lambda M$ , alors

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad AC_j = \lambda C_j$$

et comme l'une des colonnes  $C_j$  au moins n'est pas la colonne nulle, on en déduit que  $\lambda$  est aussi une valeur propre de  $A$ .

5. D'après les deux dernières questions,

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f_A)$$

(par double inclusion).

🔗 Plus précisément, si

$$(X^1, \dots, X^n)$$

est une base de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$ , la famille

$$(X_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est une famille libre de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  constituée de  $n^2$  vecteurs propres de  $f_A$  et donc une base de vecteurs propres de  $f_A$ .

On pouvait donc démontrer, sans recourir au polynôme minimal, que : si  $A$  est diagonalisable, alors  $f_A$  est diagonalisable.

On pourrait aussi établir la réciproque de manière analogue, mais la démonstration est plus embrouillée (il s'agit d'extraire une famille libre de  $n$  colonnes d'une famille libre de  $n^2$  matrices).

## Solution 72

rms130-1296

1. Comme la sous-algèbre  $\mathbb{C}[J]$  de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  est commutative, les matrices  $M(a, b, c)$  (qui sont toutes des polynômes en  $J$ ) commutent entre elles.

✎ Comme  $J^3 = I_3$ , alors  $\mathbb{C}[J] = \text{Vect}(I_3, J, J^2)$ . Mais cela ne sert à rien pour répondre à la question !

2. Comme  $J^3 = I_3$  et que le polynôme annulateur

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$$

est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}[X]$ , la matrice  $J$  est diagonalisable.

✎ Considérons une valeur propre  $\lambda$  de  $J$  et une colonne propre

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

associée à cette valeur propre. On a alors

$$JX = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

donc

$$b = \lambda a \quad \text{et} \quad c = \lambda b = \lambda^2 a.$$

✎ On a aussi  $a = \lambda^3 a$  sur la troisième ligne, mais comme  $\lambda$  est une racine cubique de l'unité, c'est sans importance !

✎ Comme  $j^4 = j$ , les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de  $J$  associés respectivement aux valeurs propres  $1, j$  et  $j^2$ .

✎ Comme  $J \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  admet **trois** valeurs propres distinctes, ce sont des valeurs propres simples et les sous-espaces propres sont donc des droites.

Par conséquent,

$$\text{Ker}(J - I_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(J - jI_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(J - j^2I_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

3. D'après la question précédente, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix},$$

la matrice  $P$  est inversible et

$$P^{-1}JP = \text{Diag}(1, j, j^2).$$

On en déduit que

$$P^{-1}J^2P = \text{Diag}(1, j^2, j)$$

et donc que

$$P^{-1}M(a, b, c)P = \text{Diag}(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj).$$

Autrement dit, la base de vecteurs propres qu'on a trouvée pour  $J$  est une base de vecteurs propres pour chacune des matrices  $M(a, b, c)$  et

$$\text{Sp}(M(a, b, c)) = \{a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj\}.$$

✎ La même démarche peut s'appliquer en dimension  $n$ , avec les racines  $n$ -ièmes de l'unité (et toujours une matrice de Vandermonde en guise de matrice de passage vers une base de vecteurs propres).

**Solution 73****rms130-1287**

**1. a.** Les vecteurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  ne sont pas proportionnels, donc la famille  $\mathcal{B}$  est libre. En tant que famille libre de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension deux, la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

**1. b.** Par définition, la matrice de passage de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}$  s'obtient en écrivant en colonne les décompositions des vecteurs de  $\mathcal{B}$  dans la base canonique, donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1. c.** Il s'agit de calculer  $f(\varepsilon_1)$  et  $f(\varepsilon_2)$ . Dans la base canonique,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que  $f(\varepsilon_1) = 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2$  et que  $f(\varepsilon_2) = 0 \cdot \varepsilon_1 + 4 \cdot \varepsilon_2$ . Par conséquent,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*☞ D'après la formule de changement de base, on a aussi*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP.$$

*Mais pour appliquer cette formule, il faut déjà calculer*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**2. a.** D'après l'hypothèse sur  $g$  et la commutativité des itérés d'un endomorphisme,

$$f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f.$$

**2. b.** On travaille dans la base canonique :

$$\mathcal{M}_{\text{can}}(f - \text{Id}) = A - I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\text{can}}(f - 4\text{Id}) = A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de rang 1. D'après le Théorème du rang, leurs noyaux sont des sous-espaces de dimension 1 et comme on sait que  $\varepsilon_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$  et que  $\varepsilon_2 \in \text{Ker}(f - 4\text{Id})$ , on en déduit que

$$\text{Ker}(f - \text{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1, \quad \text{Ker}(f - 4\text{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_2.$$

**2. c.** Il s'agit de calculer, autant que possible, les vecteurs  $g(\varepsilon_1)$  et  $g(\varepsilon_2)$  et plus précisément de vérifier que  $g(\varepsilon_k)$  est proportionnel à  $\varepsilon_k$  pour  $k \in \{1, 2\}$ .

D'après la question précédente, il suffit de vérifier que

$$g(\varepsilon_1) \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \quad \text{et que} \quad g(\varepsilon_2) \in \text{Ker}(f - 4\text{Id}).$$

Or, comme  $f$  et  $g$  commutent,

$$\begin{aligned} (f - \text{Id})[g(\varepsilon_1)] &= (f \circ g)(\varepsilon_1) - g(\varepsilon_1) \\ &= (g \circ f)(\varepsilon_1) - g(\varepsilon_1) = g(1 \cdot \varepsilon_1) - g(\varepsilon_1) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned} (f - 4\text{Id})[g(\varepsilon_2)] &= (f \circ g)(\varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2) \\ &= (g \circ f)(\varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2) = g(4 \cdot \varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Cela prouve que la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$  est diagonale.

*▮ Comme  $f$  et  $g$  commutent, chaque sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ . Comme ces sous-espaces propres sont des droites, les vecteurs qui dirigent ces droites sont nécessairement des vecteurs propres de  $g$ . La base  $\mathcal{B}$  est donc une base de vecteurs propres pour  $f$  et pour  $g$  : ces endomorphismes sont dits co-diagonalisables.*

3. Si  $M^2 = A$ , alors l'endomorphisme  $g$  représenté dans la base canonique par la matrice  $M$  vérifie  $g \circ g = f$ . D'après ce qui précède, il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

et comme  $g \circ g = f$ , alors

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et donc  $\alpha^2 = 1$ ,  $\beta^2 = 4$ .

• Réciproquement, quels que soient les scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha^2 = 1$  et  $\beta^2 = 4$ ,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$$

ce qui prouve que l'endomorphisme  $g$  tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

vérifie  $g \circ g = f$  et donc que

$$\left( P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} \right)^2 = A.$$

L'équation  $M^2 = A$  admet donc exactement quatre solutions :

$$P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

soit

$$\pm \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pm \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

*▮ Comme l'anneau  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  n'est pas intègre, il est normal qu'une équation du second degré admette plus de deux solutions.*

## Solution 74

**rms130-1289**

1. Par linéarité de la dérivation sur  $\mathbb{R}[X]$ , l'application  $f$  est linéaire de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , donc c'est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

2. Il est clair que  $f(1) = 1$  (vecteur propre!) et que

$$\forall k \geq 1, \quad f(X^k) = X^k - kX^{k-1}.$$

3. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il est clair que  $\deg f(X^k) = k$ , donc la famille  $(f(X^k))_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$  (échelonnée en degré).

Comme l'image par  $f$  d'une base de  $\mathbb{R}[X]$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ , on peut conclure que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

4. Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on sait que  $\deg(P') \leq \deg P$  et donc

$$\deg f(P) = \deg(P - P') \leq \deg P.$$

En particulier, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\deg f(P) \leq \deg P \leq n$$

donc  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ , ce qui prouve que le sous-espace  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $f$ .

5. a. On peut donc considérer  $f$  comme un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ , espace vectoriel de dimension finie. D'après la question précédente, cet endomorphisme est injectif et donc, d'après le Théorème du rang, il réalise une bijection de  $\mathbb{R}_n[X]$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Ainsi, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , il existe un, et un seul, polynôme  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $f(P) = Q$ .

▮ Il serait bon d'évoquer ici l'endomorphisme  $f_n$  induit par restriction de  $f$  au sous-espace stable  $\mathbb{R}_n[X]$  — car c'est bien de lui qu'on parle ici.

La matrice de cet endomorphisme relative à la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est une matrice triangulaire de  $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1. Cette matrice est donc inversible (ce qui n'est pas une surprise), mais elle n'est pas diagonalisable (car elle est distincte de  $I_{n+1}$ ).

5.b. On vérifie par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(P^{(k)}) = P^{(k)} - P^{(k+1)}.$$

En particulier, comme  $\deg P \leq n$ , on a  $f(P^{(n)}) = P^{(n)}$  et  $f(P^{(k)}) = 0$  pour tout  $k > n$ .

5.c. Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$P = P^{(n+1)} + \sum_{k=0}^n (P^{(k)} - P^{(k+1)}) \quad (\text{par télescopage})$$

$$= 0 + \sum_{k=0}^n f(P^{(k)}) \quad (\text{car } \deg P \leq n)$$

$$= f\left(\sum_{k=0}^n P^{(k)}\right) \quad (\text{par linéarité de } f)$$

Comme  $f$  est injective, on en déduit que l'unique antécédent de  $P$  par  $f$  est le polynôme

$$Q = \sum_{k=0}^n P^{(k)}.$$

## Solution 75

**rms130-1301**

1. Les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de  $M$  est au moins égal à 2. Les quatre premières colonnes sont égales, donc le rang de  $M$  est au plus égal à 2. Le rang de  $M$  est donc égal à 2.

2. On sait qu'une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son rang est égal au nombre de ses colonnes (Théorème du rang). D'après la question précédente,  $\text{rg } M < 5$ , donc  $M$  n'est pas inversible.

3. D'après le Théorème du rang, le nombre de colonnes d'une matrice est la somme du rang de cette matrice et de la dimension de son noyau. Par conséquent,

$$\dim \text{Ker } M = 5 - 2 = 3.$$

Il reste à trouver une famille libre de trois vecteurs dans  $\text{Ker } M$ .

On connaît trois relations de liaison évidentes entre les colonnes de  $M$  :

$$C_1 - C_2 = C_2 - C_3 = C_3 - C_4 = 0.$$

Par conséquent, le noyau de  $M$  contient les trois vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme ces trois vecteurs forment clairement une famille libre (les colonnes sont échelonnées), on a trouvé une base de  $\text{Ker } M$ .

4. On trouve :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

et on en déduit facilement que

$$M^3 - M^2 = 4M.$$

Autrement dit, la matrice  $M$  admet pour polynôme annulateur

$$X^3 - X^2 - 4X = X(X^2 - X - 4) = X(X - \alpha)(X - \beta)$$

avec

$$\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

✎ Pour la matrice  $M$ , c'est un polynôme annulateur unitaire. D'après la matrice  $M^2$ , la matrice  $M$  n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur à 2, donc ce polynôme annulateur est en fait le polynôme minimal de  $M$ .

5. La matrice  $M$  est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

✎ Par ailleurs, on a calculé son polynôme minimal, qui est bien scindé à racines simples.

• Les valeurs propres de  $M$  sont les racines de son polynôme minimal, donc

$$\text{Sp}(M) = \{0, \alpha, \beta\}$$

et on a déjà calculé une base du sous-espace propre  $\text{Ker } M$ .

• Comme  $M$  est diagonalisable,

$$5 = \dim \text{Ker } M + \dim \text{Ker}(M - \alpha I_5) + \dim \text{Ker}(M - \beta I_5)$$

et comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont des valeurs propres de  $M$ ,

$$\dim \text{Ker}(M - \alpha I_5) \geq 1 \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(M - \beta I_5) \geq 1.$$

Par conséquent, les deux sous-espaces propres  $\text{Ker}(M - \alpha I_5)$  et  $\text{Ker}(M - \beta I_5)$  sont des droites vectorielles.

• Comme d'habitude en pareil cas, on va caractériser les deux sous-espaces propres par un seul calcul, puisqu'il sont dirigés par des vecteurs "conjugés".

**Analyse** — Pour  $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M - \lambda I_5)$$

équivalent à

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut donc que

$$x_5 = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3 = \lambda x_4$$

c'est-à-dire qu'il existe un scalaire  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

**Synthèse** — Comme  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$  et que le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est une droite, il est inutile d'aller plus loin! Pour  $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$ ,

$$\text{Ker}(M - \lambda I_5) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

✎ En exploitant la cinquième ligne de la matrice, on aurait obtenu la relation

$$4 + \lambda = \lambda^2,$$

c'est exactement ce que dit le polynôme minimal de  $M$ !

✎ La matrice  $M$  est symétrique réelle et le Théorème spectral nous assure que les sous-espaces propres de  $M$  sont deux à deux orthogonaux. On le vérifie facilement en tenant compte du fait que  $\alpha\beta = -4$  (d'après le polynôme minimal).

**Solution 76****rms132-455**

1. Supposons que  $H$  soit un hyperplan de  $E$ . Par définition, il existe une droite  $D$  telle que

$$E = H \oplus D$$

et comme  $D$  est une droite, il existe un vecteur  $u$  (non nul!) tel que  $D = \mathbb{K} \cdot u$ . Pour tout vecteur  $x \in E$ , il existe donc un unique couple

$$(y, \ell(x)) \in H \times \mathbb{K} \quad \text{tel que} \quad x = y + \ell(x) \cdot u. \quad (20)$$

On a ainsi défini une application  $\ell : E \rightarrow \mathbb{K}$ .

► Étant donnés deux vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  dans  $E$ , il existe donc deux vecteurs  $y_1$  et  $y_2$  dans  $H$  et deux scalaires  $\ell(x_1)$  et  $\ell(x_2)$  tels que

$$x_1 = y_1 + \ell(x_1) \cdot u \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + \ell(x_2) \cdot u.$$

Pour tout scalaire  $\alpha$ , on a donc

$$\alpha \cdot x_1 + x_2 = (\alpha \cdot y_1 + y_2) + [\alpha \ell(x_1) + \ell(x_2)] \cdot u.$$

Mais en appliquant (20) au vecteur  $\alpha \cdot x_1 + x_2$ , on a aussi

$$\alpha \cdot x_1 + x_2 = \underbrace{z_1}_{\in H} + \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) \cdot u$$

et l'unicité de la décomposition (20) permet d'identifier terme à terme :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) = \alpha \ell(x_1) + \ell(x_2),$$

ce qui prouve que  $\ell$  est bien une forme linéaire sur  $E$ .

► Comme  $u = 0_E + 1 \cdot u$  avec  $0_E \in H$  et  $1 \in \mathbb{K}$ , l'unicité de la décomposition (20) nous dit que  $\ell(u) = 1$ , donc la forme linéaire  $\ell$  n'est pas identiquement nulle.

► Si  $\ell(x) = 0$ , alors  $x = y + \ell(x) \cdot u = y \in H$ .

Réciproquement, si  $x \in H$ , alors  $x = x + 0 \cdot u$  avec  $x \in H$  et  $0 \in \mathbb{K}$ . À nouveau, l'unicité de la décomposition (20) nous donne  $\ell(x) = 0$ .

L'hyperplan  $H$  est donc bien le noyau de la forme linéaire  $\ell$ .

• Réciproquement, si  $H$  est le noyau d'une forme linéaire  $\ell$  non identiquement nulle, alors il existe un vecteur  $u$  tel que  $\ell(u) \neq 0$ . Par linéarité de  $\ell$ , ce vecteur  $u$  ne peut être nul et

$$\forall x \in H, \quad \ell(x) = \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot \ell(u) = \ell\left(\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\right),$$

donc la différence

$$x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u$$

appartient à  $\text{Ker } \ell = H$  (principe de superposition).

Chaque vecteur  $x \in E$  admet donc une décomposition

$$\underbrace{\left[ x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u \right]}_{\in H} + \underbrace{\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u}_{\in \mathbb{K} \cdot u},$$

ce qui prouve que  $E = H + \mathbb{K} \cdot u$ .

Enfin, comme  $\ell(u) \neq 0$ , le vecteur  $u$  n'appartient pas à  $H$  et la droite dirigée par  $\mathbb{K} \cdot u$  est donc en somme directe avec  $H$ .

On a ainsi démontré que  $E = H \oplus D$  et donc que  $H$  est un hyperplan.

🔗 Il est utile de retenir une vision géométrique de ce résultat, plus évident qu'il n'y paraît.

Considérons un espace  $E$  de dimension 3 et un plan  $P \subset E$  : il existe une base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de ce plan et on peut la compléter en une base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $E$ . À cette base correspondent des formes coordonnées  $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*$  telles que

$$\forall u \in E, \quad u = \varepsilon_1^*(u) \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2^*(u) \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3^*(u) \cdot \varepsilon_3$$

et on voit qu'ici le plan  $P$  est le noyau de la forme coordonnée  $\varepsilon_3^*$  :

$$u \in P \iff \varepsilon_3^*(u) = 0.$$

*Plus concrètement encore, quelle que soit la base choisie dans E, le plan P peut être représenté par une équation cartésienne, au sens où*

$$u : (x, y, z) \in P \iff ax + by + cz = 0$$

*avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Le plan P apparaît donc comme le noyau de la forme linéaire  $\ell$  définie par*

$$\forall u : (x, y, z) \in E, \quad \ell(u) = ax + by + cz.$$

*On s'est contenté de démontrer que ce cas très particulier était en fait le cas général !*

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la trace, il est clair que l'application

$$\Phi(A) = [M \mapsto \text{tr}(AM)]$$

est une application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$ , c'est-à-dire une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . L'application  $\Phi$  est donc bien une application de  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans l'espace dual  $E^* = L(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$  des formes linéaires sur E.

• Soient A et B, deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda$ , un scalaire. Alors

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}[(\lambda A + B)M] &= \text{tr}(\lambda AM + BM) \\ &= \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(BM) \\ &= \lambda \Phi(A)(M) + \Phi(B)(M). \end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on en déduit que

$$\Phi(\lambda A + B) = \lambda \Phi(A) + \Phi(B)$$

et donc que  $\Phi$  est une application linéaire de E dans  $E^*$ .

On sait que  $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$  et que  $\dim L(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) = n^2 \times 1 = n^2$ , c'est-à-dire que l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont deux espaces de même dimension (finie !). D'après le Théorème du rang, il suffit que  $\Phi$  soit injective pour que  $\Phi$  soit un isomorphisme.

Soit  $A \in \text{Ker } \Phi$ . Cela signifie que  $\text{tr}(AM) = 0$  pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Avec les notations habituelles,

$$\text{tr}(AM) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} m_{j,i}.$$

Par conséquent, en faisant varier M dans la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \text{tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0,$$

ce qui prouve que A est la matrice nulle.

On a ainsi démontré que  $\Phi$  était un isomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sur son dual.

Avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on peut donner une interprétation euclidienne de ces calculs : comme

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(A)(M) = \langle A^T | M \rangle,$$

on n'a fait que redémontrer le Théorème de représentation de Riesz.

3. La matrice C est obtenue en permutant les colonnes de la matrice  $I_n$ , donc elles ont même rang : la matrice C est bien inversible.

• Multiplier à gauche par  $J_r$  revient à annuler les  $(n - r)$  dernières lignes de la matrice C. Par conséquent,

$$\forall 1 \leq r \leq n, \quad \text{tr}(J_r C) = 0.$$

4. Soit H, un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Il existe donc une forme linéaire non nulle  $\ell$  telle que  $H = \text{Ker } \ell$  (première question) et une matrice A non nulle telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \ell(M) = \text{tr}(AM).$$

Comme A n'est pas nulle, son rang r est compris entre 1 et n et il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}AP = J_r, \quad \text{soit } A = QJ_rP^{-1}.$$

Donc

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \ell(M) = \text{tr}(QJ_rP^{-1}M) = \text{tr}(J_rP^{-1}MQ).$$

En choisissant

$$M = PCQ^{-1},$$

on définit une matrice inversible (produit de trois matrices inversibles) et  $\ell(M) = \text{tr}(J_r C) = 0$  d'après la question précédente. Par conséquent, l'hyperplan H contient la matrice inversible  $PCQ^{-1}$ .

On a ainsi démontré que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  contient une matrice inversible.

**Solution 77**

rms132-464

- Il est clair que l'ensemble

$$F = \{u(x), u \in \mathcal{A}\}$$

est contenu dans l'espace vectoriel  $E$ .

- Comme  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $L(E)$ , alors l'application nulle  $0_E$  appartient à  $\mathcal{A}$  et par conséquent

$$0_E = \omega_E(x) \in F.$$

Quels que soient le scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  et les vecteurs  $a$  et  $b$  dans  $F$ , il existe deux endomorphismes  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{A}$  tels que

$$a = u(x) \quad \text{et} \quad b = v(x).$$

Par conséquent,

$$\lambda a + b = (\lambda u + v)(x).$$

Or  $\lambda u + v \in \mathcal{A}$  (une algèbre est stable par combinaison linéaire), donc

$$\lambda a + b \in F.$$

Ainsi, l'ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- Une algèbre est, par définition, unitaire, donc  $I_E \in \mathcal{A}$  et donc

$$x = I_E(x) \in F.$$

Comme  $x \neq 0_E$  par hypothèse, le sous-espace  $F$  n'est pas réduit à  $\{0_E\}$ .

- Soit  $a \in F$  : il existe donc  $v \in \mathcal{A}$  tel que  $a = v(x)$ .

Pour tout  $u \in \mathcal{A}$ , la composée  $u \circ v$  appartient à  $\mathcal{A}$  (stable par  $\circ$ , qui est la multiplication interne), donc

$$u(a) = (u \circ v)(x) \in F.$$

Le sous-espace  $F$  est donc stable par  $\mathcal{A}$ . Comme il n'est pas réduit à  $\{0_E\}$ , il est par hypothèse égal à  $E$ .

- Pour tout  $y \in E$ , on a donc  $y \in F$  et, par construction de  $F$ , il existe donc  $u \in \mathcal{A}$  tel que  $y = u(x)$ .

**Solution 78**

rms132-466

1. Toute matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  admet un polynôme minimal  $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ . Or les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres et  $M$  est inversible, donc 0 n'est pas racine du polynôme minimal. Ainsi, le coefficient constant du polynôme minimal n'est pas nul :

$$P_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0.$$

Comme  $P_0$  est un polynôme annulateur de  $M$ , on en déduit que

$$M^d + a_{d-1}M^{d-1} + \cdots + a_1M + a_0I_n = 0_n$$

et donc que

$$M(M^{d-1} + a_{d-1}M^{d-2} + \cdots + a_2M + a_1I_n) = -a_0I_n,$$

ce qui prouve que le polynôme

$$P = \frac{-1}{a_0}(X^{d-1} + a_{d-1}X^{d-2} + \cdots + a_2X + a_1)$$

vérifie  $M^{-1} = P(M)$ .

2. Le polynôme  $P$  qu'on vient d'exhiber dépend de la matrice  $M$ .

S'il existait un polynôme  $P$  indépendant de la matrice  $M$  (entre les deux questions, seule la position des quantificateurs est modifiée), alors il faudrait en particulier que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda I_n) = \frac{1}{\lambda} I_n$$

et donc que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

► Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la propriété précédente est impossible (limite à l'origine ou à l'infini!). Il n'existe donc pas de polynôme universel!

► Si  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \lambda^{-1} = \lambda$$

et le polynôme  $P = X$  vérifie la condition nécessaire.

Il y a  $16 = 2^4$  matrices dans  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ , parmi lesquelles six sont inversibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que ces six matrices vérifient  $A^2 = I_2$ , c'est-à-dire  $A^{-1} = A$ . Autrement dit, le polynôme  $X$  convient pour toutes les matrices de  $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

► Ce n'est pas vrai dans  $GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  puisque les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont distinctes.

*🔗 Cela prouve que le polynôme  $X$  n'est pas universel, cela ne prouve pas qu'il n'existe pas de polynôme universel !*

► Quels que soient l'entier  $n \geq 1$  et le nombre premier  $p$ , l'espace vectoriel  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  ne contient que  $p^{n^2}$  matrices, donc le groupe  $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  est fini.

En parcourant l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , on n'a donc qu'un nombre *fini* de polynômes minimaux.

Le ppcm de ces polynômes est donc un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de  $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  et le raisonnement de la première question permet d'en déduire qu'il existe un polynôme universel  $P$  tel que

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad P(M) = M^{-1}.$$

## Solution 79

rms132-467

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un endomorphisme  $\Phi$  de  $E$  tel que  $\Phi^2 = D$ .

• On considère le vecteur  $f = [x \mapsto e^{-x}] \in E$  et on pose alors

$$g = \Phi(f) \in E.$$

Ce vecteur  $g$  n'est pas nul, car

$$\Phi(g) = \Phi \circ \Phi(f) = D(f) = -f \neq 0_E.$$

Le vecteur  $g$  est donc un vecteur propre de  $D$  associé à la valeur propre  $-1$  :

$$D(g) = (\Phi \circ \Phi) \circ \Phi(f) = \Phi[(\Phi \circ \Phi)(f)] = \Phi[D(f)] = -\Phi(f) = -g$$

par linéarité de  $\Phi$ .

• Mais chercher les vecteurs propres de  $D$  associés à la valeur propre  $-1$  :

$$D(y) = (-1) \cdot y$$

équivalent à résoudre l'équation différentielle  $y' = -y$ .

Les solutions de cette équation différentielle constituent la droite vectorielle  $\mathbb{R} \cdot f$ , donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $g = \lambda \cdot f$ .

• Par linéarité de  $\Phi$ , on en déduit que

$$\Phi(g) = \lambda \cdot \Phi(f) = \lambda \cdot g.$$

Mais, par définition de  $g$ ,

$$\Phi(g) = (\Phi \circ \Phi)(f) = D(f) = -f,$$

donc

$$f = -\lambda \cdot g = -\lambda \cdot (\lambda \cdot f) = -\lambda^2 \cdot f.$$

Comme  $f \neq 0_E$ , on en déduit que  $\lambda^2 = -1$ , ce qui est impossible puisque  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

CQFD

**Solution 80**

rms132-488

1. On connaît un polynôme annulateur de  $A$  et il est scindé :

$$X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1).$$

La matrice  $A$  est donc trigonalisable. Comme notre polynôme annulateur possède une racine double, rien ne prouve pour le moment que la matrice  $A$  soit diagonalisable. On sait cependant que le spectre de  $A$  est contenu dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur connu :

$$\text{Sp}(A) \subset \{0, \pm 1\}.$$

✦ Si  $\{\pm 1\} \subset \text{Sp}(A)$ , alors en fait

$$\text{Sp}(A) = \{\pm 1\}$$

et en particulier  $A$  est inversible. Par conséquent, il reste  $A^2 = I_n$  et  $A$  admet  $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$  pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme annulateur est scindé à racines simples, on en déduit que  $A$  est diagonalisable.

🔗 Dans ce cas, le polynôme  $(X-1)(X+1)$  est en fait le polynôme minimal de  $A$ .

2. Dans un second temps, on a

$$\{\pm 1\} \subset \text{Sp}(A) \subset \{0, \pm 1\}.$$

► Si  $n = 2$ , alors  $A$  possède au plus deux valeurs propres distinctes, donc  $\text{Sp}(A) = \{\pm 1\}$  et, pour les mêmes raisons que précédemment, la matrice  $A$  est diagonalisable.

► Si  $n = 3$  et si  $\text{Sp}(A) = \{0, \pm 1\}$ , alors  $A$  est une matrice de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  qui possède trois valeurs propres distinctes, donc  $A$  est diagonalisable (et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles).

► Si  $n = 3$  et si  $\text{Sp}(A) = \{\pm 1\}$ , alors  $A$  est inversible et, comme plus haut, elle est donc diagonalisable.

► Si  $n = 4$ , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$$

vérifie bien  $A^4 = A^2$  mais

$$A(A - I_4)(A + I_4) = A^3 - A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_4,$$

donc son polynôme minimal est  $X^2(X-1)(X+1)$ , ce qui prouve que  $A$  n'est pas diagonalisable.

🔗 On aurait pu aussi observer que le noyau de  $A$  était une droite et que, par conséquent, la somme des dimensions des sous-espaces propres était égale à 3 (et pas à 4) pour conclure.

**Solution 81**

rms132-498

Si  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors

$$AX = \lambda X$$

donc la matrice

$$M = (X \quad \cdots \quad X) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

n'est pas la matrice nulle (puisque  $X$  n'est pas la colonne nulle) et

$$f_A(M) = AM = (AX \quad \cdots \quad AX) = \lambda M$$

donc  $M$  est un vecteur propre de  $f_A$  associé à  $\lambda$ .

🔗 Les matrices

$$(X \quad 0 \quad \cdots \quad 0), \quad (0 \quad X \quad 0 \quad \cdots \quad 0), \quad \dots, \\ (0 \quad \cdots \quad 0 \quad X \quad 0), \quad (0 \quad \cdots \quad 0 \quad X)$$

forment une famille libre de  $n$  vecteurs propres de  $f_A$  associés à  $\lambda$ . Si la matrice  $A$  est diagonalisable, alors on peut définir une base de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  et en déduire une base de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $f_A$  : cela prouve que  $f_A$  est diagonalisable.

• Réciproquement, s'il existe une matrice carrée

$$M = (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n) \neq 0_n$$

telle que

$$f_A(M) = \lambda M,$$

alors

$$(AC_1 \ AC_2 \ \cdots \ AC_n) = AM = \lambda M = (\lambda C_1 \ \lambda C_2 \ \cdots \ \lambda C_n).$$

Comme  $M \neq 0_n$ , il existe au moins une colonne  $C_j$  non nulle et comme

$$AC_j = \lambda C_j,$$

on en déduit que  $\lambda$  est aussi une valeur propre de  $A$ .

## Solution 82

rms132-755

1. Pour  $k = 0$ , on a  $\det A = \pm 1$ , donc  $A$  est inversible en tant qu'élément de (l'algèbre)  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .  
Cela dit, d'après les formules de Cramer,

$$A \cdot \text{Com}(A)^T = \det A \cdot I_n = \pm I_n.$$

Puisque les coefficients de la comatrice sont des déterminants de matrices extraites de  $A$  (et donc de matrices à coefficients entiers), la comatrice appartient à  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$  et la matrice  $A$  est donc inversible dans l'anneau  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ .

2. Supposons que  $\det B \neq 0$ . D'après la propriété de morphisme de  $\det$  et l'hypothèse,

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad \det(AB^{-1} + kI_n) = \frac{\pm 1}{\det B}.$$

Dans cette identité, le paramètre  $k$  prend  $(2n + 1)$  valeurs et l'expression  $\det(AB^{-1} + kI_n)$  prend au plus deux valeurs : cette expression prend donc l'une des valeurs au moins  $(n + 1)$  fois.

Or l'application

$$[\lambda \mapsto \det(\lambda I_n + AB^{-1})]$$

est une application polynomiale de degré  $n$  : c'est le polynôme caractéristique de la matrice  $-AB^{-1}$ .

Si une application polynomiale prend  $(n + 1)$  fois la même valeur, il n'y a que deux possibilités : ou bien elle est constante, ou bien son degré est au moins égal à  $(n + 1)$ . Quoiqu'il en soit, son degré ne peut pas être égal à  $n$ . Notre hypothèse est donc absurde, on a démontré que  $\det B = 0$ .

## Solution 83

rms132-759

✎ Pour se lancer dans la démonstration qui suit, il faut commencer par traduire l'énoncé : deux matrices semblables ont toujours même image par  $\varphi$ .

On note, comme de coutume,  $E_{i,j}$  (pour  $1 \leq i, j \leq n$ ) les matrices de la base canonique de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

• Soit  $D = \text{Diag}(1, 2, \dots, n)$ . Pour  $i \neq j$ , la matrice  $D + E_{i,j}$  est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Cette matrice est donc diagonalisable et semblable à la matrice diagonale  $D$  (mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités).

Par hypothèse,  $\varphi(D + E_{i,j}) = \varphi(D)$  et par linéarité de  $\varphi$ ,

$$\forall i \neq j, \quad \varphi(E_{i,j}) = 0.$$

• Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , les matrices  $E_{1,1}$  et  $E_{i,i}$  sont semblables : la matrice de permutation

$$P_{1,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie  $P_{1,i}^{-1} E_{i,i} P_{1,i} = E_{1,1}$  et par conséquent,  $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1})$ .

Autre point de vue : la matrice  $E_{1,1}$  représente l'application linéaire

$$[(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, 0, \dots, 0)]$$

dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  et la matrice  $E_{i,i}$  représente cette même application linéaire dans la base

$$(e_i, e_2, \dots, e_{i-1}, e_1, e_{i+1}, \dots, e_n).$$

En posant  $\lambda = \varphi(E_{1,1})$ , on a donc

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \lambda = \lambda \operatorname{tr} A$$

pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### Solution 84

rms132-1111

Comme  $u$  admet  $n = \dim E$  valeurs propres distinctes, cet endomorphisme est diagonalisable :

$$E = \bigoplus_{k=1}^n \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I)$$

et ses sous-espaces propres sont des droites :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I) = 1.$$

Si  $v^2 = u$ , alors  $u$  et  $v$  commutent (ce sont deux polynômes en  $v$ ) et par conséquent, tout sous-espace propre de  $u$  est aussi stable par  $v$ . Comme les sous-espaces propres de  $u$  sont des droites, leurs vecteurs directeurs respectifs (qui sont par construction des vecteurs propres de  $u$ ) sont donc des vecteurs propres de  $v$ .

Autrement dit, quelle que soit la base

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

constituée de vecteurs propres pour  $u$  considérée,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \operatorname{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \Delta.$$

Mais  $u = v^2$ , donc  $D = \Delta^2$  et par conséquent

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mu_k^2 = \lambda_k.$$

On distingue alors les cas suivants.

- Si l'un des  $\lambda_k$  au moins est strictement négatif, le problème posé n'a pas de solution. (On travaille sur un espace vectoriel réel, donc les  $\mu_k$  doivent être réels).
- Si tous les  $\lambda_k$  sont strictement positifs, alors

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mu_k = \pm \sqrt{\lambda_k}.$$

Il y a donc  $2^n$  choix possibles pour la famille  $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$  et donc  $2^n$  endomorphismes  $v$  tels que  $v^2 = u$ .

- Si l'un des  $\lambda_k$  est nul ( $\lambda_1 = 0$  par exemple), alors les  $(n-1)$  autres sont strictement positifs (puisque'ils sont deux à deux distincts) et il y a cette fois seulement  $2^{n-1}$  choix possibles pour la famille  $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$  (puisque'on a nécessairement  $\mu_1 = 0$ ) et donc seulement  $2^{n-1}$  endomorphismes  $v$  tels que  $v^2 = u$ .

#### Solution 85

rms132-1122

1. La matrice  $A$  est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable : ses valeurs propres sont réelles et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Je n'ai pas envie de calculer le polynôme caractéristique de  $A$ , même si ça ne pose aucune difficulté particulière, je vais me débrouiller autrement.)

✎ Pour gagner un peu de place, je vais systématiquement assimiler les matrices colonnes et les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

► La deuxième colonne de la matrice  $A$  nous indique que 1 est une valeur propre de  $A$ . De plus, le rang de

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc  $\text{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$ .

► La trace de  $A$  est égale à 3 et comme  $A$  est diagonalisable, il existe deux réels  $1 \pm \alpha$  tels que  $\text{Sp}(A) = \{1 - \alpha; 1; 1 + \alpha\}$ .  
Le déterminant de  $A$  est égal à  $-3$  (calcul rapide) et aussi à  $1 - \alpha^2$ , donc  $\alpha = 2$  et

$$\text{Sp}(A) = \{-1; 1; 3\}.$$

► Comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a  $\text{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1)$  et  $\text{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1)$ .

► En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$P^{-1}AP = \Delta \stackrel{\text{déf.}}{=} \text{Diag}(-1, 1, 3)$$

d'après la formule de changement de base (les colonnes de  $P$  forment une base de vecteurs propres de  $A$ , respectivement associés aux valeurs propres  $-1$ ,  $1$  et  $3$ ).

✎ On constate que les trois droites propres sont, comme annoncé, deux à deux orthogonales.

On aurait pu choisir une base orthonormée de vecteurs propres (ce qui nous aurait donné une matrice de passage  $P$  orthogonale), mais ici, ce n'est pas franchement utile et j'ai privilégié la simplicité de la matrice.

2. En posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

il s'agit ici de résoudre l'équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre (sous forme résoluble)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t).$$

Nous allons résoudre ce système en utilisant les éléments propres de  $A$ .

✎ Ce système différentiel est mal choisi : il s'agit en fait de résoudre d'une part l'équation différentielle  $y' = y$  et d'autre part le système

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ z' = x + 2z \end{cases}$$

qui est associé à une matrice de  $S_2(\mathbb{R})$  : on n'est donc pas vraiment en dimension 3...

### • Première méthode.

En posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

on constate que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\iff P^{-1}.X'(t) = P^{-1}.A.X(t) \\ &\iff (P^{-1}X)'(t) = (P^{-1}AP).(P^{-1}.X)(t) \\ &\iff Y'(t) = \Delta.Y(t). \end{aligned}$$

Il s'agit donc en fait de résoudre le système différentiel (découplé) suivant.

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 3w(t) \end{cases}$$

La solution générale est de la forme

$$u(t) = K_1 e^{-t}, \quad v(t) = K_2 e^t, \quad w(t) = K_3 e^{3t}$$

donc  $X = (x, y, z)$  est une solution du système étudié si, et seulement si, il existe trois constantes d'intégration  $K_1, K_2$  et  $K_3$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \\ K_2 e^t \\ -K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel étant maintenant résolu, on doit considérer que l'exercice est terminé.

Cela dit, le cours nous dit que la solution  $X$  peut s'exprimer en fonction de la position initiale  $X(0)$  à l'aide de l'exponentielle de matrice :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0)$$

avec

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} \frac{x(0) - z(0)}{2} \\ y(0) \\ \frac{x(0) + y(0)}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit (après avoir calculé  $P^{-1}$ ) que

$$X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & 0 & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ 0 & e^t & 0 \\ \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & 0 & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}}_{\exp(tA)} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

et comme la colonne  $X(0)$  est quelconque, on peut en déduire  $\exp(tA)$  par identification.

Mais ce calcul est plutôt fastidieux.

### Deuxième méthode

On a trouvé une base orthogonale de vecteurs propres pour  $A$  :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, la projection orthogonale  $P_k$  sur la droite  $\mathbb{R} \cdot u_k$  est donnée par

$$P_k = \frac{u_k \cdot u_k^T}{u_k^T \cdot u_k}.$$

On en déduit très facilement que

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées aux vecteurs propres  $u_1, u_2$  et  $u_3$  étant  $-1, 1$  et  $3$  respectivement, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n \cdot P_1 + 1^n \cdot P_2 + 3^n \cdot P_3$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = e^{-t} \cdot P_1 + e^t \cdot P_2 + e^{3t} \cdot P_3.$$

On en déduit enfin que la solution générale du système étudié est

$$X(t) = \exp(tA).X(0) = e^{-t} \cdot P_1 X(0) + e^t \cdot P_2 X(0) + e^{3t} \cdot P_3 X(0).$$

Cette méthode pour calculer  $\exp(tA)$  est préférable à la précédente (cet avis n'engage que moi).

**Solution 86****rms132-1125**

On utilise les notations habituelles pour les vecteurs de la base canonique :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**• Analyse**

► Si une telle matrice  $A$  existe, alors  $A^4 = (A^2)^2 = 0_3$ , donc  $A$  est nilpotente et son indice de nilpotence est strictement supérieur à 2. Comme l'indice de nilpotence d'une matrice de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  est inférieur à 3, on en déduit que l'indice de nilpotence de  $A$  est égal à 3 et donc que  $A^3 = 0_3$ .

En particulier, la matrice  $A$  n'est pas inversible,  $\dim \operatorname{Ker} A \geq 1$  et

$$\mathbb{R} \cdot E_1 = \operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Ker} A$$

puisque  $A^3 = A \times A^2 = 0_3$ .

► On vient de remarquer que le vecteur  $E_1$  appartient à  $\operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Im} A$ . Par ailleurs,  $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 = [z = 0]$  et  $\dim \operatorname{Ker} A \leq 2$ .

Si  $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ , alors  $\operatorname{rg} A = 1$  (Théorème du rang) et d'après les inclusions précédentes,

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R} \cdot E_1 \subset [z = 0] = \operatorname{Ker} A.$$

Dans ces conditions,  $A^2 = A \times A = 0_3$ , ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Donc  $\dim \operatorname{Ker} A = 1$  et par conséquent

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A^2 = \mathbb{R} \cdot E_1.$$

La première colonne de  $A$ , égale à  $AE_1$ , est donc la colonne nulle.

► La deuxième colonne de  $A^2$ , égale à  $A^2 E_2 = A(AE_2) = 0$ , nous dit que  $AE_2$  (la deuxième colonne de  $A$ ) appartient au noyau de  $A$ . Elle est donc proportionnelle à  $E_1$  : il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$AE_2 = \alpha E_1$$

et comme  $E_2 \notin \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot E_1$ , le scalaire  $\alpha$  ne peut pas être nul.

► Enfin, la troisième colonne de  $A^2$  vérifie :

$$E_1 = A^2 E_3 = \frac{1}{\alpha} A E_2$$

et par conséquent

$$A \left( A E_3 - \frac{1}{\alpha} E_2 \right) = 0.$$

Connaissant le noyau de  $A$ , on en déduit qu'il existe donc un réel  $\beta$  tel que

$$A E_3 - \frac{1}{\alpha} E_2 = \beta E_1.$$

Il existe donc deux réels  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**• Synthèse**

Il est clair que

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quels que soient les réels  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**Solution 87**

rms132-1127

1. On a supposé que  $A + A^3 = 0_3$ . Si la matrice  $A$  était inversible, on pourrait en déduire que  $I_3 + A^2 = 0_3$  et donc que

$$\det(A^2) = \det(-I_3) = (-1)^3 = -1.$$

Or  $\det(A^2) = (\det A)^2$  et comme  $\det A \in \mathbb{R}$ , il est impossible que  $(\det A)^2 = -1$ . Donc la matrice  $A$  n'est pas inversible.

2. Le polynôme  $X + X^3 = X(X^2 + 1)$  est un polynôme annulateur de  $f$  et les facteurs  $X$  et  $X^2 + 1$  sont premiers entre eux (ils sont irréductibles et ne sont pas associés). Le Théorème de décomposition des noyaux donne directement

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + I).$$

3. On a démontré que la matrice  $A$  n'était pas inversible. Comme  $f$  (représenté par  $A$ ) est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, la non-inversibilité de  $f$  prouve la non-injectivité de  $f$  (Théorème du rang). Autrement dit,  $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$ .

4. Comme  $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$ , il existe un vecteur non nul  $\varepsilon_1$  dans  $\text{Ker } f$ .

Comme  $f \neq 0_E$ , le sous-espace  $\text{Ker}(f^2 + I)$  n'est pas réduit à  $\{0_E\}$  et il existe donc un vecteur non nul  $\varepsilon_2$  dans  $\text{Ker}(f^2 + I)$ .

Le sous-espace  $\text{Ker}(f^2 + I)$  est stable par  $f$  (c'est le noyau d'un polynôme en  $f$ ), donc le vecteur  $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$  appartient aussi à  $\text{Ker}(f^2 + I)$ .

Si  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  était liée, alors il existerait  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3 = \lambda \cdot \varepsilon_2,$$

donc  $\varepsilon_2$  serait un vecteur propre de  $f$  associé à  $\lambda$ . Mais comme  $\varepsilon_2 \in \text{Ker}(f^2 + I)$ , on aurait aussi

$$-\varepsilon_2 = f^2(\varepsilon_2) = \lambda^2 \cdot \varepsilon_2$$

et donc  $\lambda^2 = -1$ , ce qui est impossible. On a donc une famille libre de deux vecteurs dans le sous-espace  $\text{Ker}(f^2 + I)$ .

Comme les deux sous-espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker}(f^2 + I)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ , que  $\dim \text{Ker } f \geq 1$  et que  $\dim \text{Ker}(f^2 + I) \geq 2$ , on a donc

$$\text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f^2 + I) = \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

ce qui prouve que  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et dans cette base la matrice de  $f$  est bien égale à  $B$  : les matrices  $A$  et  $B$  sont donc semblables.

**Solution 88**

rms132-1128

1. a. Comme  $u$  est un endomorphisme d'un espace de dimension finie égale à  $2n$ , on déduit du théorème du rang que

$$\dim \text{Ker } u = 2n - \text{rg } u = n. \quad (21)$$

Par ailleurs, comme  $u^2 = 0$ , on a aussi

$$\text{Im } u \subset \text{Ker } u. \quad (22)$$

On a établi une inclusion et l'égalité des dimensions (finies!), donc les deux sous-espaces sont égaux :

$$\text{Im } u = \text{Ker } u. \quad (23)$$

1. b. Comme la dimension de  $\text{Im } u$  est égale à  $n$ , il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\text{Im } u$  et, par définition de l'image, il existe une famille  $(e_{n+1}, \dots, e_{2n})$  de vecteurs tels que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad e_k = u(e_{n+k}).$$

Vérifions la famille  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$  est bien une base de  $\mathbb{R}^{2n}$  : pour des raisons de dimension, il suffit de prouver que  $\mathcal{B}$  est une famille libre. Si les scalaires  $\lambda_k$  ( $1 \leq k \leq 2n$ ) sont tels que

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = 0, \quad (24)$$

alors

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u(e_{n+k}) + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = 0.$$

Par linéarité de  $u$  et comme  $u^2 = 0$ ,

$$0 = \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k \cdot u(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot e_k.$$

Par construction, la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, donc les scalaires  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$  sont tous nuls. Il ne reste de (24) que

$$\sum_{k=1}^n \lambda \cdot e_k = 0.$$

À nouveau, la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, donc les scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont tous nuls : on a prouvé que  $\mathcal{B}$  était une famille et (donc) une base de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

• Comme  $u^2 = 0$ ,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad u(e_k) = u^2(e_{n+k}) = 0.$$

D'autre part, par définition de la famille  $\mathcal{B}$ ,

$$\forall n+1 \leq k \leq 2n, \quad u(e_{n+k}) = e_k.$$

Donc la matrice de  $u$  relative à cette base  $\mathcal{B}$  est bien la matrice voulue.

**2. a.** D'après le Théorème du rang,

$$\dim \text{Ker } u = \dim \mathbb{R}^{3n} - \text{rg } u = 3n - 2n = n. \quad (25)$$

Comme  $u^3 = u \circ u^2 = 0$ , il est clair que

$$\text{Im } u^2 \subset \text{Ker } u \quad (26)$$

et en particulier

$$\text{rg } u^2 \leq \dim \text{Ker } u = n. \quad (27)$$

Comme  $\text{Ker } u$  est un espace de dimension  $n$  (25) contenu dans  $\text{Ker } u^2$ , il existe une base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\text{Ker } u$  et on peut compléter cette base pour obtenir une base de  $\text{Ker } u^2$  :

$$\text{Vect}(\underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}_{\text{base de Ker } u}, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r) = \text{Ker } u^2. \quad (28)$$

On en déduit que

$$\text{Ker } u \oplus \text{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r) = \text{Ker } u^2. \quad (29)$$

La famille  $(u(\varepsilon_{n+1}), \dots, u(\varepsilon_r))$  est libre : en effet, si

$$\sum_{k=n+1}^r \lambda_k \cdot u(\varepsilon_k) = 0,$$

alors

$$u\left(\sum_{k=n+1}^r \lambda_k \cdot \varepsilon_k\right) = 0.$$

Dans ces conditions, la combinaison linéaire

$$\sum_{k=n+1}^r \lambda_k \cdot \varepsilon_k$$

appartient à la fois à  $\text{Ker } u$  et à  $\text{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r)$ , alors que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. Par conséquent, cette combinaison linéaire est nulle et comme la famille  $(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r)$  est libre, on en déduit que les scalaires  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_r$  sont tous nuls.

Comme  $u^2 = 0$ , la famille  $(u(\varepsilon_{n+1}), \dots, u(\varepsilon_r))$  est une famille libre de  $(r - n)$  vecteurs dans  $\text{Ker } u$ . Comme  $\dim \text{Ker } u = n$  par (25), on en déduit que  $(r - n) \leq n$ , c'est-à-dire

$$\dim \text{Ker } u^2 = r \leq 2n. \quad (30)$$

D'après le Théorème du rang,

$$\text{rg } u^2 = \dim \mathbb{R}^{3n} - \dim \text{Ker } u^2 \geq 3n - 2n = n \quad (31)$$

et d'après (27) et (25), on a donc

$$\text{rg } u^2 = n = \dim \text{Ker } u. \quad (32)$$

Avec l'inclusion (26) et l'égalité des dimensions, on a prouvé que

$$\text{Im } u^2 = \text{Ker } u.$$

**2.b.** Considérons une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\text{Im } u^2$ . Il existe donc une famille  $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$  telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad e_k = u^2(e_{2n+k})$$

et on pose

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad e_{n+k} = u(e_{2n+k}).$$

On vient de définir une famille

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}, \dots, e_{3n}) \\ &= (u^2(e_{2n+1}), \dots, u^2(e_{3n}), u(e_{2n+1}), \dots, u(e_{3n}), e_{2n+1}, \dots, e_{3n}). \end{aligned}$$

Il suffit bien entendu de vérifier que cette famille est libre pour démontrer que c'est une base de  $\mathbb{R}^{3n}$ . Considérons donc une relation de liaison :

$$0 = \sum_{k=1}^{3n} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u^2(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot u(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^n \lambda_{2n+k} \cdot e_{2n+k}$$

et appliquons  $u^2$  : comme  $u^3 = 0$ , il reste seulement

$$0 = \sum_{k=2n+1}^{3n} \lambda_k \cdot u^2(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_{2n+k} \cdot e_k$$

et comme la sous-famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre par construction, on en déduit que  $\lambda_{2n+1} = \dots = \lambda_{3n} = 0$ . Il reste alors

$$0 = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u^2(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot u(e_{2n+k})$$

et on applique  $u$ . Comme  $u^3 = 0$ ,

$$0 = \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot u^2(e_{2n+k}) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n+k} \cdot e_k.$$

On obtient, comme précédemment, ainsi que  $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$ . Il reste donc seulement

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k = 0$$

d'où on déduit enfin que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

• Comme  $u(e_1) = u^3(e_{2n+1}) = 0, \dots, u(e_n) = u^3(e_{3n}) = 0$  et comme, par construction même,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad u(e_{n+k}) = e_k \quad \text{et} \quad u(e_{2n+k}) = e_{n+k},$$

la matrice de  $u$  dans cette base a exactement la forme voulue.

### Solution 89

rms132-1129

1. La première colonne de  $A$  nous montre que  $1 \in \text{Sp}(A)$ . Le rang de la matrice

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 1, donc le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation  $[y - z = 0]$ .

La trace de  $A$  est égale à 3 et c'est aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. Comme 1 est une valeur propre de multiplicité au moins 2 (= dimension du sous-espace propre), on en déduit que 1 est en fait valeur propre triple.

La multiplicité de la valeur propre 1 étant strictement supérieure à la dimension du sous-espace propre associé à 1, on en déduit que  $A$  n'est pas diagonalisable.

2. Soit  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté par la matrice  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$ . S'il existe une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = T,$$

alors le vecteur  $\varepsilon_3$  est choisi hors de  $\text{Ker}(f - I)$ , le vecteur  $\varepsilon_2$  est l'image de  $\varepsilon_3$  par  $f - I$  et le vecteur  $\varepsilon_1$  est choisi de telle sorte que  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  soit une base de  $\text{Ker}(f - I)$ .

Choisissons  $\varepsilon_3 = (0, 1, 0)$ . Il faut alors  $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) - \varepsilon_3 = (0, 1, 1)$  et on peut choisir  $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$  (qui vérifie l'équation du plan  $\text{Ker}(f - I)$  sans être proportionnel à  $\varepsilon_2$ ).

Il est clair que la matrice

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui prouve que  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est bien une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Enfin, par construction des vecteurs  $\varepsilon_k$ , on a bien

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

ce qui prouve que  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = T$ .

Les matrices  $A$  et  $T$  sont donc bien semblables.

3. D'après ce qui précède,  $T = P^{-1}AP$ , donc  $A = PTP^{-1}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \stackrel{(*)}{=} P T^n P^{-1}.$$

On vérifie facilement (récurrence, binôme...) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nT - (n-1)I_3.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \stackrel{(*)}{=} nA - (n-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & -n \\ 0 & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

🔗 On a utilisé deux fois (\*) le fait que l'application  $[M \mapsto PMP^{-1}]$  est un morphisme d'algèbres.

4. On a déjà défini la matrice  $N$ . Il est clair que  $N$  est nilpotente d'indice 2 (c'est-à-dire  $N \neq 0_3$  et  $N^2 = 0_3$ ). Comme toute matrice commute à  $I_3$ , on peut appliquer la formule du binôme et en déduire que

$$A^n = (I_3 + N)^n = I_3 + \binom{n}{1}N^1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}N^k = I_3 + nN.$$

🔗 Ce n'est vraiment pas très différent des calculs qui précèdent...

## Solution 90

rms132-1131

1. Par définition, le noyau de  $f_a$  contient les vecteurs  $e_1 - e_3$  et  $e_2$ . Comme la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre, les vecteurs

$$\varepsilon_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

sont linéairement indépendants, donc  $\dim \text{Ker } f_a \geq 2$ .

Par ailleurs, le vecteur

$$\varepsilon_3 = f_a(e_1) = a \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - a \cdot e_3 = a \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$$

n'est pas nul (en tant que combinaison linéaire d'une famille libre dont les coefficients ne sont pas tous nuls) et appartient à l'image de  $f_a$ . Donc le rang de  $f_a$  est au moins égal à 1.

D'après le Théorème du rang,

$$\text{Ker } f_a = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{et} \quad \text{Im } f_a = \mathbb{C} \cdot (a \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

2. La matrice de  $f_a$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est égale à

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

La matrice de  $f_a$  dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est égale à

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule du changement de base, ces deux matrices sont semblables.

3. Il est clair que  $(A')^2 = 0_3$ . Comme  $A$  et  $A'$  sont semblables,  $A^2 = 0_3$ .

✎ On pouvait aussi remarquer que  $\text{Im } f_a \subset \text{Ker } f_a$  pour conclure encore plus vite.

La matrice  $A$  est donc nilpotente. Comme elle n'est pas nulle, elle est donc nilpotente d'indice 2 : son polynôme minimal est égal à  $X^2$  et son polynôme caractéristique à  $X^3$ .

4. Puisque  $A$  est nilpotente, son spectre est égal à  $\{0\}$ . Cette matrice n'est donc pas inversible.

Si elle était diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice nulle et donc en fait égale à la matrice nulle. La matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable.

### Solution 91

rms132-1132

1. Il est clair que  $\psi$  est linéaire de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ . De plus,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg P' \leq \deg P$$

donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg \psi(P) \leq \max\{\deg P, \deg P'\} \leq \deg P \leq n$$

donc  $\psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  : l'application  $\psi$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Il est clair que  $\psi(1) = 1$  et que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \psi(X^k) = X^k + kX^{k-1},$$

donc

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, donc elle est inversible.

3. Ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc  $\text{Sp } \psi = \{1\}$ .

Pour  $n \geq 2$ , la matrice est distincte de  $I_n$ , donc elle n'est pas diagonalisable.

✎ La seule matrice semblable à la matrice identité  $I_n$  est la matrice  $I_n$  elle-même.

De ce fait, la seule matrice diagonalisable dont le spectre soit réduit à  $\{\lambda\}$  est la matrice  $\lambda I_n$ , matrice de l'homothétie de rapport  $\lambda$ .

En revanche, pour  $n = 1$ , elle est diagonale (sourir).

### Solution 92

rms132-1133

1. L'hypothèse faite sur  $A$  peut se traduire matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_U.$$

Par conséquent, si  $AX = Y$ , alors

$$UY = U(AX) = (UA)X = UX$$

c'est-à-dire :  $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ .

2. D'après la question précédente,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (y_1 \quad y_2)$$

avec  $y_1 + y_2 = 1 - 1 = 0$ , donc

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = y_1 \cdot (1 \quad -1).$$

Cela prouve que le vecteur (**non nul!**)  $(1, -1)$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $y_1$ . D'après les coefficients de  $A$ , la valeur propre  $y_1$  est aussi égale à  $(a - b)$ .

3. Si  $V = (x_1, x_2)$  est un vecteur propre de  $A$ , alors

$$AV = \lambda \cdot V,$$

donc  $x_1 + x_2 = \lambda \cdot (x_1 + x_2)$ . Si  $V$  n'est pas colinéaire à  $(1, -1)$ , alors  $x_1 + x_2 \neq 0$  et par conséquent  $\lambda = 1$ .

▮ La trace de  $A$  est égale à  $a + d = a + (1 - b) = (a - b) + 1$  : c'est bien la somme des deux valeurs propres qu'on a trouvées.

### Solution 93

rms132-1134

1. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -3 \\ 2-\lambda & 5-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & 3 & -\lambda \end{vmatrix} && (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} && \left( \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right) \\ &= (2-\lambda)^2(4-\lambda). \end{aligned}$$

Donc le polynôme caractéristique de  $A$  est  $(X - 2)^2(X - 4)$  : le spectre de  $A$  est égal à  $\{2; 4\}$ . Les matrices

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

sont toutes les deux de rang 1, donc la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

Ces matrices nous indiquent que

$$\text{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \text{Ker}(A - 4I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Comme  $(X - 2)$  et  $(X - 4)$  sont scindés et n'ont pas de racine commune, ils sont premiers entre eux, donc  $(X - 2)^2$  et  $(X - 4)$  sont premiers entre eux et, d'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - 4I_3) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3)^2. \quad (\star)$$

La matrice

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nous indique que  $\text{Ker}(A - 2I_3)^2$  est le plan d'équation  $[2x - y - z = 0]$ . Comme le vecteur  $(0, 1, -1)$  appartient à ce plan sans être colinéaire au vecteur  $(1, 1, 1)$  (qui dirige  $\text{Ker}(A - 2I_3)$ ), on dispose d'une base de  $\text{Ker}(A - 2I_3)^2$ .

• On constate que

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible : c'est la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à la décomposition  $(*)$ , constituée d'un vecteur propre  $\varepsilon_1$  associé à 4 ; d'un vecteur propre  $\varepsilon_2$  associé à 2 et d'un vecteur  $\varepsilon_3$  tel que

$$(A - 2I_3)(\varepsilon_3) = \varepsilon_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad A\varepsilon_3 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 2 \cdot \varepsilon_3.$$

D'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Si B est une matrice telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \alpha \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

alors

$$P^{-1}B^2P = (P^{-1}BP)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{2}\alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et il suffit de choisir  $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  pour obtenir

$$P^{-1}B^2P = P^{-1}AP$$

et donc  $B^2 = A$ .

✎ Pour ceux qui attachent de l'importance à ces détails,

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

et le calcul explicite de B est particulièrement pénible.

✎ On a une excellente raison de chercher  $P^{-1}BP$  sous forme triangulaire.

En effet, si  $B^2 = A$ , alors  $A.B = B^3 = B.A$ , donc chaque sous-espace propre de A est stable par B et comme ces sous-espaces sont des droites, les vecteurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  qui les dirigent sont en fait des vecteurs propres de B. Ainsi,  $P^{-1}BP$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Mais de plus chaque sous-espace caractéristique  $\text{Ker}(A - \lambda I_3)^m$  de A est stable par B (cette notion n'est pas au programme), donc  $P^{-1}BP$  est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Cela nous indique sous quelle forme chercher  $P^{-1}BP$  et nous assure qu'il n'y a pas beaucoup d'autres solutions que celle qu'on vient d'exhiber.

3. Si B était diagonalisable, alors  $B^2 = A$  serait aussi diagonalisable : aucune des solutions de l'équation n'est donc diagonalisable.

#### Solution 94

rms132-1135

1. a. Supposons que A soit inversible.

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . D'après la propriété de morphisme du déterminant,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - BA) &= \det(\lambda A^{-1} - B) \cdot \det A \\ &= \det A \cdot \det(\lambda A^{-1} - B) = \det(\lambda I_n - AB). \end{aligned}$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , donc ensemble infini), on en déduit que le polynôme caractéristique de AB est égal au polynôme caractéristique de BA.

**1. b.** On sait que le groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  (toute matrice  $A$  est limite d'une suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices inversibles) et, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , les applications

$$[A \mapsto \det(\lambda I_n - AB)] \quad \text{et} \quad [A \mapsto \det(\lambda I_n - BA)]$$

sont continues (ce sont des applications polynomiales en fonction des coefficients de  $A$ ).

Comme ces deux applications sont égales sur  $GL_n(\mathbb{K})$ , elles sont aussi égales sur l'adhérence de  $GL_n(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ .

Autrement dit, quelles que soient les matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ , les matrices  $AB$  et  $BA$  ont même polynôme caractéristique.

**2. a.** En choisissant une base  $\mathcal{B}$  (quelconque!) de  $E$ , et en notant  $A$  et  $B$ , les matrices qui représentent  $f$  et  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on déduit de la question précédente que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Comme  $\lambda$  est, par définition, une valeur propre de  $f \circ g$ , on en déduit que  $\lambda$  est aussi une valeur propre de  $g \circ f$ .

• Soit  $x \in E_\lambda$ . Alors  $(f \circ g)(x) = \lambda x$  (par définition de  $E_\lambda$ ). On en déduit que

$$g[(f \circ g)(x)] = \lambda g(x),$$

c'est-à-dire

$$(g \circ f)[g(x)] = \lambda \cdot g(x)$$

ou encore que  $g(x)$  appartient à  $\text{Ker}(g \circ f - \lambda I) = F_\lambda$ .

De la même façon, on démontre que

$$\forall y \in \text{Ker}(g \circ f - \lambda I), \quad f(y) \in \text{Ker}(f \circ g - \lambda I).$$

**2. b.** Si  $x \in E_\lambda$  et  $g(x) = 0_E$ , alors

$$\lambda \cdot x = (f \circ g)(x) = f(0_E) = 0_E.$$

Comme  $\lambda \neq 0$  par hypothèse, on en déduit que  $x = 0_E$ . Autrement dit, en restriction à  $E_\lambda$ , l'endomorphisme  $g$  est injectif et par conséquent

$$\dim g(E_\lambda) = \dim E_\lambda.$$

D'après l'inclusion précédente,  $\dim E_\lambda \leq \dim F_\lambda$ .

On démontre de la même manière que  $\dim F_\lambda \leq \dim E_\lambda$  et donc que les deux sous-espaces propres  $E_\lambda$  et  $F_\lambda$  ont même dimension.

• Si  $A$  est inversible, alors  $AB = A(BA)A^{-1}$  et cette égalité toute simple montre que  $AB$  et  $BA$  sont semblables. Dans ce cas, il est clair que les polynômes caractéristiques sont égaux et que les sous-espaces propres sont deux à deux isomorphes!

## Solution 95

rms132-1137

**1.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \det(xI_6 - B) &= \begin{vmatrix} xI_3 - \alpha A & -\beta A \\ -\gamma A & xI_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xI_3 - \gamma A & -\beta A \\ xI_3 - \gamma A & xI_3 \end{vmatrix} & (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \text{ avec } \alpha + \beta = \gamma) \\ &= \begin{vmatrix} xI_3 - \gamma A & -\beta A \\ 0_3 & xI_3 + \beta A \end{vmatrix} & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{aligned}$$

et par conséquent, comme  $\beta \neq 0$  et  $\gamma \neq 0$ ,

$$\det(xI_6 - B) = \det(xI_3 - \gamma A) \det(xI_3 + \beta A) = (-\beta\gamma)^3 \chi_A\left(\frac{x}{\gamma}\right) \chi_A\left(\frac{-x}{\beta}\right)$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

• Comme le rang de  $A$  est égal à 1, son noyau est de dimension 2 (Théorème du rang). Et comme  $A$  est diagonalisable, son polynôme caractéristique est de la forme

$$\chi_A = X^2(X - a)$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$ . Le polynôme caractéristique de  $B$  est donc égal à

$$X^4(X - a\gamma)(X + a\beta).$$

Comme  $a \neq 0$  et que  $\beta + \gamma \neq 0$ , la matrice  $B$  admet donc trois valeurs propres distinctes : 0 (de multiplicité 4),  $a\gamma$  (simple) et  $-a\beta$  (simple).

▮ D'après le cours, une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé (c'est le cas pour B) et si la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

Par ailleurs, on sait que la dimension d'un sous-espace propre est comprise entre 1 et la multiplicité de la valeur propre.

Par conséquent, la matrice B est diagonalisable si, et seulement si, la dimension du sous-espace propre  $\text{Ker } B = \text{Ker}(B - 0I_6)$  est égale à 4.

2. On suppose que  $AX = 0$ . D'après les règles du calcul matriciel par blocs,

$$B \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha AX \\ \gamma AX \end{pmatrix} = 0.$$

• Pour les mêmes raisons,

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta AX \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Par hypothèse,  $\dim \text{Ker } A = 2$ , donc il existe deux colonnes linéairement indépendantes  $X_1$  et  $X_2$  telles que  $\text{ker } A = \text{Vect}(X_1, X_2)$ . On déduit des calculs précédents que les colonnes

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

appartiennent au noyau de B. Comme  $X_1$  et  $X_2$  sont linéairement indépendantes, on en déduit facilement que ces quatre colonnes sont linéairement indépendantes et donc que  $\dim \text{Ker } B \geq 4$ .

3. Comme la dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité de la valeur propre, on en déduit que  $\dim \text{Ker } B = 4$  et que B est diagonalisable.

### Solution 96

rms132-1139

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc  $\text{rg } A \geq 2$ . Les colonnes  $C_2, \dots, C_n$  sont proportionnelles, donc  $\text{rg } A = 2$ .

D'après le Théorème du rang, la somme du rang et de la dimension du noyau est égale au nombre de colonnes, donc  $\dim \text{Ker } A = n - 2$ .

2. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral).

3. Pour une matrice diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé. Par conséquent, la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à  $(n - 2)$ .

▮ En général, la multiplicité d'une valeur propre est supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

4. Comme le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n dont les racines sont les valeurs propres de A, que ce polynôme admet 0 pour racine de multiplicité  $(n - 2)$  et que ce polynôme est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  (puisque A est diagonalisable), on a

$$\chi_A = X^{n-2}(X - \alpha)(X - \beta).$$

Or la trace de A est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc

$$1 = \text{tr } A = (n - 2) \times 0 + 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta$$

donc  $\alpha + \beta = 1$  : on peut donc noter  $\lambda$  et  $(1 - \lambda)$ , les deux valeurs propres non nulles de A.

▮ Pour l'instant, on ne sait pas si  $\lambda \neq 1/2$ , donc rien ne prouve que ces deux valeurs propres soient distinctes.

5. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A. Donc

$$\mu_A = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) \quad \text{ou} \quad \mu_A = X(X - 1/2)$$

(selon que  $\lambda \neq 1/2$  ou  $\lambda = 1/2$ ). Par définition, le polynôme minimal est un polynôme annulateur.

Dans les deux cas, le polynôme

$$X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$$

est un multiple du polynôme minimal et donc un polynôme annulateur.

▮ En calculant les coefficients diagonaux de  $A^2$ , on trouve que

$$\text{tr}(A^2) = \left( \sum_{k=1}^n k^2 \right) + \sum_{k=2}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)-3}{3}.$$

Comme  $A$  est diagonalisable, on sait aussi que

$$\operatorname{tr}(A^2) = (n-2) \cdot 0^2 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Donc les valeurs propres  $\lambda$  et  $(1-\lambda)$  sont les deux racines de l'équation

$$2X^2 - 2X + 1 = \frac{n(2n+1)(n+1) - 3}{3}.$$

On en déduit d'une part que

$$X(X-\lambda)(X-1+\lambda) = X \cdot \left( X^2 - X + 1 - \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \right)$$

et d'autre part que  $\lambda \neq \frac{1}{2}$  (puisque le terme constant, égal au produit des racines, est toujours négatif).

Pour ceux que ce genre de précisions vaines amusent, les valeurs propres  $\lambda$  et  $1-\lambda$  sont

$$\frac{1}{2} \cdot \left( 1 \pm \sqrt{\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3} - 3} \right).$$

### Solution 97

rms132-1140

1. La matrice  $M$  admet  $X^4 - 4X^2 = X^2(X-2)(X+2)$  pour polynôme annulateur. Or les valeurs propres de  $M$  se trouvent parmi les racines de tous les polynômes annulateurs de  $A$ , donc

$$\operatorname{Sp}(M) \subset \{0, \pm 2\}.$$

2. On distingue deux cas.

• Si la matrice  $M$  est inversible, alors  $M^2 = 4I_3$ , donc elle admet le polynôme  $(X-2)(X+2)$  pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme est scindé et que ses racines sont simples, on en déduit que la matrice  $M$  est diagonalisable.

• Si la matrice  $M$  n'est pas inversible, alors  $0$  est une valeur propre de  $M$ . Par conséquent, elle admet trois valeurs propres distinctes :  $0, -2$  et  $2$  et comme elle appartient à  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , elle est diagonalisable.

✎ En dimension  $n \geq 4$ , on ne pourrait pas conclure puisque les deux matrices suivantes vérifient les hypothèses de l'exercice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors que seule la première est diagonalisable.

### Solution 98

rms132-1141

1. Si  $MX = \lambda X$ , alors  $M^k X = \lambda^k X$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  (par récurrence à partir de  $k = 1$ ) et, par combinaison linéaire,  $P(M)X = P(\lambda) \cdot X$  pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Si  $P$  est un polynôme annulateur, alors  $P(\lambda) \cdot X = 0$  et si  $\lambda$  est une valeur propre, alors on peut choisir  $X \neq 0$  (qui est alors un vecteur propre de  $M$  associé à  $\lambda$ ) et en déduire que  $P(\lambda) = 0$ .

2. Si  $M$  est symétrique, alors l'équation devient  $M^2 + M - I_n = 0_n$ . Dans ce cas, la matrice  $M$  admet  $P_2 = X^2 + X - 1$  pour polynôme annulateur. Comme  $\Delta = 5 \neq 0$ , ce polynôme est scindé à racines simples et comme la matrice  $M$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable.

✎ Comme  $M$  est une matrice à coefficients complexes, il est hors de question d'appliquer le Théorème spectral pour conclure.

• Comme  $0$  n'est pas une racine du polynôme annulateur  $X^2 + X - 1$ , ce n'est pas non plus une valeur propre de  $M$ , donc la matrice  $M$  est inversible et son déterminant n'est pas nul.

• Comme  $M$  est diagonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité. D'après le polynôme annulateur, il y a au plus deux valeurs propres, de multiplicités respectives  $m \in \mathbb{N}$  et  $(n-m) \in \mathbb{N}$ . Donc

$$\operatorname{tr} M = m \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + (n-m) \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-n}{2} + \frac{(2n-m)\sqrt{5}}{2}.$$

Si la trace de  $M$  était nulle, alors on aurait

$$\sqrt{5} = \frac{n}{2n-m} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est faux. Donc  $\text{tr } M \neq 0$ .

3. D'après l'équation,  $M^\top = I_n - M^2$ . En transposant l'équation,

$$I_n = M + (M^\top)^2 = M + (I_n - M^2)^2$$

c'est-à-dire

$$0_n = (I_n - M^2)^2 - (I_n - M) = (I_n - M)[(I_n - M)(I_n + M)^2 - I_n] = (I_n - M)M(I_n - M - M^2).$$

La matrice  $M$  admet donc  $P_4 = (1 - X)X(X^2 + X - 1)$  pour polynôme annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples :

$$1, \quad 0, \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

donc la matrice  $M$  est diagonalisable.

4. D'après l'équation,

$$M^\top = (I_n - M)(I_n + M).$$

On sait que  $M$  est inversible si, et seulement si,  $M^\top$  est inversible.

Comme  $-1$  n'est pas une valeur propre de  $M$  (ce n'est pas une racine de  $P_4$ ), on en déduit que  $(I_n + M)$  est inversible. Par conséquent,  $M^\top$  est inversible si, et seulement si,  $(I_n - M)$  est inversible.

Autrement dit :  $M$  est inversible si, et seulement si,  $1 \notin \text{Sp}(M)$ .

✎ *L'alternative est donc la suivante : ou bien*

$$\text{Sp}(M) \subset \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\},$$

*ou bien*

$$\{0, 1\} \subset \text{Sp}(M) \subset \left\{ 0, 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

## Solution 99

rms132-1143

1. Il est clair que  $A^0 C = C = C B^0$  et, par hypothèse,  $A^1 C = C B^1$ .  
S'il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $A^k C = C B^k$ , alors

$$A^{k+1} C = A \cdot A^k C \stackrel{\text{HR}}{=} A \cdot C B^k = A C \cdot B^k = C B \cdot B^k = C \cdot B^{k+1}.$$

On a ainsi démontré par récurrence que  $A^k C = C B^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Par combinaison linéaire, on en déduit que  $P(A) \cdot C = C \cdot P(B)$  pour tout polynôme  $P$ .

2. Quelles que soient les matrices  $M_1, \dots, M_r$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\det(M_1 \cdots M_r) = \prod_{k=1}^r \det M_k \in \mathbb{C}.$$

Un produit de complexes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul et le produit de matrices  $M_1 \cdots M_r$  est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Par conséquent, le produit  $M_1 \cdots M_r$  est inversible si, et seulement si,  $\det M_k \neq 0$  pour tout  $k$ , c'est-à-dire si toutes les matrices  $M_k$  sont inversibles.

♣ Supposons que le spectre de  $A$  et le spectre de  $B$  soient des parties disjointes de  $\mathbb{C}$  et notons  $P$ , le polynôme caractéristique de  $B$ . En tant qu'élément de  $\mathbb{C}[X]$ , ce polynôme  $P$  est scindé :

$$P = \prod_{k=1}^r (X - \mu_k)^{m_k}.$$

Comme  $P(B) = 0_n$  (Théorème de Cayley-Hamilton), on déduit de ce qui précède que

$$P(A) \cdot C = C \cdot P(B) = 0_n$$

alors que la matrice

$$P(A) = (A - \mu_1)^{m_1} \times \cdots \times (A - \mu_r)^{m_r}$$

est inversible en tant que produit de matrices inversibles (les valeurs propres  $\mu_k$  de  $B$  ne sont pas des valeurs propres de  $A$ !). On en déduit que  $C = 0_n$ , ce qui est impossible par hypothèse.

On a démontré par l'absurde que les matrices  $A$  et  $B$  admettaient une valeur propre commune.

3. Considérons une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  commune aux matrices  $A$  et  $B$ . Par définition, ni la matrice  $(A - \lambda I_n)$ , ni la matrice  $(B - \lambda I_n)$  ne sont inversibles.

D'après le Théorème du rang, la dimension de  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$  est au moins égale à 1 et la dimension de  $\text{Im}(B - \lambda I_n)$  est au plus égale à  $(n - 1)$ . Par conséquent, il existe une matrice  $C \neq 0_n$  telle que

$$\text{Im}(B - \lambda I_n) \subset \text{Ker } C \quad \text{et} \quad \text{Im } C \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Si  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  est une famille libre de cardinal  $r < n$ , on peut la compléter en une base  $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $E$ .  
Si  $(u_1, \dots, u_q)$  est une famille libre de cardinal  $q \geq 1$ , alors il existe un endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  tel que

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad \varphi(\varepsilon_k) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall r < k \leq n, \quad \varphi(\varepsilon_k) = u_1.$$

Il est clair que  $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \subset \text{Ker } \varphi$  et que  $\text{Im } \varphi = \mathbb{C} \cdot u_1 \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_q)$ ; en particulier,  $\varphi$  n'est pas l'endomorphisme nul.

On en déduit que  $C \cdot (B - \lambda I_n) = 0_n = (A - \lambda I_n) \cdot C$  et donc, après développement et simplification, que  $CB = AC$ .

### Solution 100

rms132-1145

1. Par définition,

$$M^1 = \begin{pmatrix} A^1 & 1 \cdot A^0 \cdot B \\ 0_n & A^1 \end{pmatrix}$$

et il est clair que

$$M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} A^0 & 0 \cdot B \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

Sans l'hypothèse  $AB = BA$ , la démonstration par récurrence ne serait pas possible!

On en déduit par combinaison linéaire que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A) \cdot B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente,  $P$  est un polynôme annulateur de  $M$  si, et seulement si,  $P(A) = P'(A) \cdot B = 0_n$ .

Si  $M$  est diagonalisable, alors elle admet un polynôme annulateur  $P$  qui est scindé à racines simples.

Si  $P$  et  $P'$  admettaient un facteur irréductible commun, ce serait un facteur de la forme  $(X - \alpha)$  (irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$ !) et dans ce cas,  $\alpha$  serait une racine (au moins) double de  $P$ : c'est impossible. Par conséquent,  $P$  et  $P'$  sont premiers entre eux.

On déduit alors de la relation de Bézout que la matrice  $P'(A)$  est inversible et donc que  $B = 0_n$ .

Réciproquement, si  $A$  est diagonalisable et si  $B = 0_n$ , alors  $A$  admet un polynôme annulateur  $P$  scindé à racines simples et

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0_n \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} = 0_{2n}$$

donc  $P$  est aussi un polynôme annulateur de  $M$ , ce qui prouve que  $M$  est diagonalisable.

Variante : si  $Q^{-1}AQ = \Delta$ , alors

$$\begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & \Delta \end{pmatrix}.$$

**Solution 101**

rms132-1150

Comme les matrices  $A$  et  $A^\top$  commutent,

$$B^p = (A^\top)^p \cdot A^p = 0_n.$$

Or la matrice  $B$  est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral). Étant diagonalisable et n'admettant que 0 pour valeur propre, la matrice  $B$  est donc nulle.

Pour toute matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a donc

$$0 = X^\top \cdot B \cdot X = (AX)^\top \cdot (AX) = \|AX\|^2.$$

Par conséquent,  $AX = 0$  pour toute matrice colonne  $X$  et donc  $A = 0_n$ .

**Solution 102**

rms132-1176

**1. Version longue (en récitant le cours)**

Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , il n'y a que trois possibilités :

- ou bien son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (soit  $\Delta > 0$ );
- ou bien il admet une racine double (soit  $\Delta = 0$ );
- ou bien il est irréductible (soit  $\Delta < 0$ ).

Autrement dit :

- ou bien cette matrice admet deux valeurs propres distinctes et, dans ce cas, elle est diagonalisable;
- ou bien elle n'a qu'une seule valeur propre :

$$\chi_A = (X - \lambda)^2$$

et dans ce cas,

- ou bien cette matrice est une homothétie :  $A = \lambda I_2$  (ce n'est pas le cas ici);
- ou bien cette matrice est trigonalisable mais pas diagonalisable;
- ou bien elle n'est même pas trigonalisable.

Ici, le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à

$$X^2 - (\text{tr } A)X + \det A = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$$

et par conséquent  $A$  est trigonalisable mais pas diagonalisable.

**♣ Version courte**

La trace de  $A$  est égale à 2. Comme la trace est aussi la somme des deux valeurs propres, cela suggère d'étudier le cas  $\lambda = 1$ . Or la matrice

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, donc 1 est bien valeur propre de  $A$ .

D'après la trace, 1 est donc la seule valeur propre de  $A$ , ce qui prouve que  $A$  est trigonalisable (le polynôme caractéristique est scindé et admet 1 comme racine double), mais pas diagonalisable (sinon,  $A$  serait semblable à  $I_2$  et donc en fait égale à  $I_2$ ).

**2. D'après l'expression de  $A - I_2$ ,**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_2) \quad \text{et} \quad (A - I_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On est ainsi conduit à poser

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et comme

$$A\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

on déduit de la formule de changement de base que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

♣ On sait que  $(A - I_2)^2 = 0_2$  et donc que

$$\text{Im}(A - I_2) \subset \text{Ker}(A - I_2).$$

Quel que soit le vecteur  $\varepsilon_2$  choisi, on aura forcément

$$(A - I_2)(\varepsilon_2) \in \text{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$$

et donc

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_2 + \alpha \cdot \varepsilon_1.$$

Si  $\alpha = 0$ , alors  $\varepsilon_2 \in \text{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$ , donc  $\varepsilon_2$  serait proportionnel à  $\varepsilon_1$  : ce serait un mauvais choix !

En conséquence, quel que soit  $\varepsilon_2$  **non proportionnel** à  $\varepsilon_1$ , la famille  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est une base et, d'après la formule du changement de base, la matrice  $A$  est alors semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inutile de s'inquiéter, on est sûr de trouver une matrice de passage convenable !

3. En posant  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , le système différentiel à résoudre peut s'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t).$$

En posant alors

$$Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

cette équation équivaut à l'équation

$$Y'(t) = P^{-1}.X'(t) = P^{-1}AP.P^{-1}X(t) = U.Y(t)$$

c'est-à-dire au système suivant.

$$\begin{cases} u' - u = v \\ v' - v = 0 \end{cases}$$

On en déduit dans un premier temps qu'il existe une constante  $K_2$  telle que

$$v(t) = K_2.e^t.$$

La première équation devient alors

$$u'(t) - u(t) = K_2.e^t$$

et il existe une constante  $K_1$  telle que

$$u(t) = K_1.e^t + K_2.te^t.$$

(On rappelle qu'il existe une recette simple pour trouver une solution particulière de l'équation complète : il suffit de l'appliquer.)

En conclusion :  $(x, y)$  est une solution du système différentiel étudié si, et seulement si, il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = P.Y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^t + K_2 t e^t \\ K_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2K_1 - K_2).e^t + 2K_2.te^t \\ -K_1.e^t - K_2.te^t \end{pmatrix} \\ &= e^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_1 - K_2 \\ -K_1 \end{pmatrix} + te^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_2 \\ -K_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### • Variante

On déduit de la formule du binôme que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = nU + (1 - n)I_2.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = nA + (1 - n)I_2 = I_2 + n(A - I_2).$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot A^n = e^t \cdot I_2 + te^t \cdot (A - I_2)$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0) = e^t.X(0) + te^t.(A - I_2).X(0).$$

**Solution 103****rms132-1177**

1. Le système (S) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants sous forme résoluble :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A \cdot X(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $I = \mathbb{R}$  est un intervalle, la Théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour la condition initiale particulière

$$(t = 0, X(0) = (1, 0, 0)),$$

le système (S) admet une, et une seule, solution.

2. En tant que fonctions polynomiales des fonctions  $x$ ,  $y$  et  $z$  (qui sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ), les fonctions  $f = x + y + z$  et  $g = x^2 + y^2 + z^2$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et, d'après (S),

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) &= x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0 \\ g'(t) &= 2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)) = 0 \end{aligned}$$

donc les fonctions  $f$  et  $g$  sont constantes sur l'intervalle  $I$ .

D'après la condition initiale,  $f(0) = g(0) = 1$ .

La trajectoire

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in \mathbb{R}\}$$

est donc contenue dans l'intersection du plan affine d'équation  $[x+y+z = 1]$  et de la sphère d'équation  $[x^2+y^2+z^2 = 1]$  : elle est donc contenue dans un cercle.

REMARQUE.— Il est trop tôt pour établir que l'inclusion réciproque est vraie.

### Variantes

• Si  $AX = \lambda X$ , alors  $A^n X = \lambda^n X$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et par conséquent,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^N \frac{t^n A^n}{n!} \cdot X = \sum_{n=0}^N \frac{(t\lambda)^n}{n!} \cdot X.$$

Il est clair que le second membre tend vers  $e^{\lambda t} \cdot X$ . Comme l'application

$$[M \mapsto MX]$$

est continue (application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie), on déduit du théorème de composition des limites que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (M_n \cdot X) = \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} M_n \right) \cdot X$$

et donc, par unicité de la limite, que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \cdot X = e^{\lambda t} \cdot X.$$

Ce qui vaut pour les colonnes vaut aussi pour les lignes : comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(tA) \cdot X(0) = e^{0 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(0) = f(0) = 1.$$

• On peut aussi remarquer que  $g(t) = X(t)^\top \cdot X(t)$ .

► On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= [X'(t)]^\top \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot X'(t) = [A \cdot X(t)]^\top \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot A \cdot X(t) \\ &= X(t)^\top \cdot (-A) \cdot X(t) + X(t)^\top \cdot A \cdot X(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque la matrice  $A$  est anti-symétrique.

► Mais on peut procéder d'une autre manière ! Comme  $X(t) = \exp(tA) \cdot X(0)$ , alors

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t)^T \cdot X(t) &= X(0)^T \cdot [\exp(tA)]^T \cdot \exp(tA) \cdot X(0) \\ &= X(0)^T \cdot \exp(tA^T) \cdot \exp(tA) \cdot X(0) \\ &= X(0)^T \cdot \exp(0_n) \cdot X(0) \\ &= X(0)^T \cdot X(0)\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'expression  $g(t) = X(t)^T \cdot X(t)$  est bien indépendante de  $t$ .

3. La matrice  $A$  étant anti-symétrique, elle n'est pas diagonalisable dans  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  mais elle l'est dans  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  (un peu de culture mathématique ne peut pas nuire).

Comme je n'ai pas envie de calculer dans  $\mathbb{C}$ , je vais calculer le polynôme minimal de  $A$  pour en déduire l'expression générale des puissances de  $A$ .

► On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = -3A.$$

On en déduit (de proche en proche, par tâtonnements) que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{2p+1} = (-3)^p A \quad \text{et que} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p} = (-3)^{p-1} A^2.$$

✎ Le polynôme  $X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$  est un polynôme annulateur de  $A$ , c'est même son polynôme minimal et son polynôme caractéristique — mais c'est inutile de le savoir, ça ne simplifierait pas nos calculs.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) &= I_3 + \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{p-1} t^{2p}}{(2p)!} \right) \cdot A^2 + \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-3)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \cdot A \\ &= I_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3} t)^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \cdot A - \frac{1}{3} \cdot \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3} t)^{2p}}{(2p)!} \right) \cdot A^2 \\ &= \left[ I_3 - \frac{1}{3} A^2 \right] + \frac{\sin \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} \cdot A + \frac{\cos \sqrt{3} t}{3} \cdot A^2.\end{aligned}$$

En tenant compte de la condition initiale,

$$X(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left[ \cos \sqrt{3} t \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin \sqrt{3} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Comme les deux vecteurs qui apparaissent dans le crochet sont unitaires et orthogonaux, on reconnaît bien le paramétrage d'un cercle de rayon  $\sqrt{2/3}$  et de centre  $\frac{1}{3} \cdot (5, -1, -1)$ .

On vérifie sans peine que ce cercle est contenu dans le plan  $[x + y + z = 1]$ .

## Solution 104

rms132-1198

1. Le polynôme  $X^3 - 2X + 1$  admet 1 pour racine évidente. On en déduit que

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1) = (X - 1)(X - \alpha)(X - \beta)$$

où  $\{\alpha, \beta\} = \{(-1 \pm \sqrt{5})/2\}$ .

Le polynôme  $X^3 - 2X - 4$  admet 2 pour racine évidente. On en déduit que

$$X^3 - 2X - 4 = (X - 2)(X^2 + 2X + 2)$$

et  $X^2 + 2X + 2$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

2. Considérons une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  et l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  représenté par la matrice  $D$  dans cette base  $\mathcal{B}$ .

Comme  $D$  est diagonale, les vecteurs de  $\mathcal{B}$  sont des vecteurs propres de  $u$ , associés aux valeurs propres  $-1$  et  $4$ . Les sous-espaces propres de  $u$  sont donc des droites vectorielles.

• Si un endomorphisme  $v$  commute à  $u$ , alors tout sous-espace propre de  $u$  est aussi stable par  $v$ . Par conséquent, les droites  $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$  et  $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_2$  sont stables par  $v$ , ce qui signifie que les vecteurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont aussi des vecteurs propres pour  $v$ .

Ainsi, si  $v$  commute à  $u$ , alors  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$  est diagonale.

• Réciproquement, si la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$  est diagonale, alors elle commute à  $D$  (deux matrices diagonales commutent toujours) et par conséquent les endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent.

En conclusion, les matrices qui commutent à  $D$  sont exactement les matrices diagonales.

➤ *Plus généralement, si  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice diagonale admettant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes, les matrices qui commutent à  $D$  sont les matrices diagonales. (Même démonstration !)*

3. Si  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  vérifie  $M^3 - 2M = D$ , alors  $M$  et  $D$  commutent (puisque toute matrice  $M$  commute à tout polynôme en  $M$ ) et d'après la question précédente,  $M$  est une matrice diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

L'équation  $M^3 - 2M = D$  devient alors

$$\begin{pmatrix} a^3 - 2a & 0 \\ 0 & b^3 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'après la première question, il y a trois possibilités pour  $a$  :  $1$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  et une seule pour  $b$  :  $2$ . Les solutions sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice  $A$  est triangulaire, donc ses coefficients diagonaux :  $-1$  et  $4$  sont ses valeurs propres. En tant que matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ayant deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et semblable à la matrice  $D$  : il existe donc une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP = D$ .

La conjugaison étant un morphisme d'algèbres,

$$\begin{aligned} M^3 - 2M = A &\iff P^{-1}M^3P - 2P^{-1}MP = P^{-1}AP \\ &\iff (P^{-1}MP)^3 - 2(P^{-1}MP) = D. \end{aligned}$$

On est donc ramené à l'équation précédente.

• Il est clair que la matrice

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

convient (ses colonnes sont des vecteurs propres de  $A$  associés respectivement à  $-1$  et à  $4$ ). Par conséquent, les solutions de  $M^3 - 2M = A$  sont les matrices

$$P_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}, \quad P_0 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}, \quad P_0 \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}.$$

## Solution 105

rms132-1201

1. Le rang de  $(1)$  (pour  $n = 1$ ) et de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (pour  $n = 2$ ) est égal à  $1$ .

À partir de  $n = 3$ , les deux premières colonnes de  $M$  ne sont pas proportionnelles, donc son rang est au moins égal à  $2$ . Les autres colonnes de  $M$  sont égales à  $C_1$  ou à  $C_2$ , donc le rang de  $M$  est en fait égal à  $2$ .

• L'image de  $M$  est engendrée par les colonnes de  $M$ . On en déduit que

$$\text{Im } M = \text{Vect}(C_1, C_2).$$

2. L'image d'un endomorphisme  $f$  est (toujours !) un sous-espace stable par  $f$ , donc l'endomorphisme  $g$  est bien défini. D'après le cours, si  $f$  est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par restriction de  $f$  à un sous-espace stable quelconque est également diagonalisable.

➤ *Une histoire de polynôme annulateur — mais si, mais si, mais si, vous vous en souvenez...*

• Si on ne se contente pas d'une telle réponse, on peut calculer

$$MC_2 = 2 \cdot C_1 = 0 \cdot C_2 + 2 \cdot C_1 \quad \text{et} \quad MC_1 = (n-2) \cdot C_2 + 2 \cdot C_1,$$

donc la matrice de  $g$  relative à la base  $(C_2, C_1)$  est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & n-2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $B$  est égal à

$$X^2 - 2X + 2(2 - n),$$

donc  $B$  admet deux valeurs propres distinctes :

$$1 \pm \sqrt{2n-3}.$$

Pour chaque valeur propre  $\lambda$  de  $g$ , le sous-espace propre est une droite vectorielle (DEUX valeurs propres distinctes pour un endomorphisme du PLAN Im  $f$ ) et cette droite vectorielle est dirigée par le vecteur

$$(n-2) \cdot C_2 + \lambda \cdot C_1.$$

✎ Pour trouver le noyau de  $B - \lambda I_2 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ , il suffit de trouver une proportion entre les deux colonnes de cette matrice.

### Solution 106

rms132-1202

1. En écrivant

$$A + \frac{1}{a}I_3 = \begin{pmatrix} 1/a & a & a^2 \\ 1 & 1/a & 1 \\ 1/a & 1/a^2 & 1/a \end{pmatrix},$$

on constate que cette matrice n'est pas inversible puisque  $C_3 = aC_2$ . Cela prouve que  $-1/a$  est une valeur propre de  $A$  et que le vecteur  $(0, a, -1)$  est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

2. Il est clair que  $\det A = 2$  et que  $\operatorname{tr} A = 0$ . En considérant  $A$  comme une matrice à coefficients complexes, il existe deux complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\frac{-1}{a} + \alpha + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha\beta}{a} = 2.$$

Les deux nombres  $\alpha$  et  $\beta$  sont donc les racines du trinôme

$$X^2 + \frac{1}{a}X - 2a.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc

$$\frac{-1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2a}(1 \pm \sqrt{1 + 8a^3}).$$

✎ Comme  $a > 0$ , la première valeur propre est négative et la deuxième est positive. Comme les deux dernières sont distinctes, si  $A$  admet une valeur propre double, alors il faut que

$$\frac{-1}{a} = \frac{1}{2a}(1 - \sqrt{1 + 8a^3})$$

et donc que  $a = 1$ .

Pour  $a = 1$ , le sous-espace propre associé à  $-1$  est le plan d'équation

$$[x + y + z = 0]$$

et la droite propre associée à la valeur propre 2 est évidemment la droite  $\mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$  — "évidemment", car les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Dans la suite, on supposera donc  $a \neq 1$  pour que la matrice  $A$  ait trois valeurs propres distinctes.

3. Comme  $A$  admet trois valeurs propres deux à deux distinctes, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. On peut donc déduire du calcul précédent que

$$\operatorname{Ker}\left(A + \frac{1}{a}I_3\right) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$ , l'une des deux autres valeurs propres de  $A$ .

▮ Comme les deux valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$  sont en quelque sorte conjuguées l'une de l'autre, on peut effectuer les deux calculs simultanément, en se bornant à savoir que la valeur propre  $\lambda$  vérifie la propriété

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\alpha} - 2\alpha = 0$$

c'est-à-dire

$$\alpha\lambda^2 + \lambda - 2\alpha^2 = 0. \quad (*)$$

On sait, par la discussion précédente, que le rang de  $A - \lambda I_3$  est égal à 2. Si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \alpha \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

est nul, alors  $\lambda^2 = \alpha$  et on déduit de l'équation (\*) que  $\alpha = 1$ , cas que nous avons déjà traité. Par conséquent, le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2. Cette matrice est constituée des deux premières lignes de la matrice  $(A - \lambda I_3)$ , donc

$$(A - \lambda I_3)X = 0 \implies BX = 0,$$

c'est-à-dire  $\text{Ker}(A - \lambda I_3) \subset \text{Ker } B$ . Or ces deux matrices ont même rang et même nombre de colonnes, donc leurs noyaux ont même dimension (Théorème du rang), donc ces deux matrices ont même noyau.

▮ La troisième ligne de  $A - \lambda I_3$  ne fait que compliquer les calculs sans apporter d'information supplémentaire!

Or

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha - \lambda^2 & \alpha^2 + \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2)$$

donc le sous-espace propre de  $A$  associé à  $\lambda$  est la droite dirigée par la colonne

$$\begin{pmatrix} \alpha + \lambda\alpha^2 \\ \alpha^2 + \lambda \\ \lambda^2 - \alpha \end{pmatrix}.$$

▮ Il s'agit seulement de résoudre un système triangulaire!

En conclusion, pour  $\alpha > 0$  et  $\alpha \neq 1$ , la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \alpha\alpha^2 & \alpha + \beta\alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 + \alpha & \alpha^2 + \beta \\ -1 & \alpha^2 - \alpha & \beta^2 - \alpha \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où  $\alpha + \beta = 1/\alpha$  et  $\alpha\beta = -2\alpha$ .

### Solution 107

rms132-1203

1. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . Alors il existe une colonne  $X \neq 0$  telle que  $AX = \lambda X$  et donc telle que

$$j \cdot AX = j \cdot (\lambda X), \quad \text{soit} \quad (j \cdot A)X = (j\lambda) \cdot X$$

et comme  $X \neq 0$ , cela prouve que  $j\lambda \in \text{Sp}(jA)$ .

▮ Plus généralement, quel que soit le polynôme  $P$  et la valeur propre  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , le scalaire  $P(\lambda)$  est une valeur propre de la matrice  $P(A)$ .

Comme  $A$  et  $jA$  sont semblables, elles ont même spectre et par conséquent  $j\lambda \in \text{Sp}(A)$ .

2. Comme  $A$  est une matrice à coefficients complexes, son spectre n'est pas vide. Il existe donc au moins une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour  $A$ .

D'après la première question,  $j\lambda \in \text{Sp}(A)$  et, par conséquent,  $j^2\lambda \in \text{Sp}(A)$  (en vertu du vieux principe : *Tant que je gagne, je joue*).

Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda$ ,  $j\lambda$  et  $j^2\lambda$  sont trois valeurs propres deux à deux distinctes de  $A$ . Comme  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , c'est impossible.

Par conséquent,  $\lambda = 0$  et donc  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .

3. Comme  $A$  est une matrice  $(2, 2)$  à coefficients complexes, son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré 2 et, d'après la question précédente, ce polynôme admet 0 pour seule racine. Donc  $\chi_A = X^2$  et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton,  $A^2 = 0_2$ .

4. Dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ , on peut poser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad jA = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices  $A$  et  $jA$  sont diagonales et ont les mêmes coefficients diagonaux avec les mêmes multiplicités, donc elles sont semblables — et  $A \neq 0_3$ .

▮ Pour permuter circulairement les valeurs propres, il suffit de permuter les vecteurs de la base. Une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP = jA$  est donc par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Solution 108

rms132-1204

### • Cas $\lambda = 0$

Puisque  $E$  est un espace de dimension finie, le réel 0 est une valeur propre de  $u \circ v$  si, et seulement si,  $\det(u \circ v) = 0$ . Or

$$\det(v \circ u) = \det v \cdot \det u = \det(u \circ v) = 0$$

donc 0 est aussi une valeur propre de  $v \circ u$ .

### ▮ Variante sans déterminant.

Si 0 n'est pas une valeur propre de  $v \circ u$ , alors  $v \circ u$  est injectif, donc  $u$  est injectif, donc (Théorème du rang, puisque  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , espace vectoriel de dimension finie)  $u$  est inversible. De ce fait, l'endomorphisme

$$v = (v \circ u) \circ u^{-1}$$

est injectif comme composé d'endomorphismes injectifs et  $u \circ v$  est alors injectif (pour la même raison).

### • Cas $\lambda \neq 0$

Soit  $x \in E$ , un vecteur propre de  $u \circ v$  associé à  $\lambda \neq 0$  :

$$u(v(x)) = \lambda \cdot x \neq 0_E$$

(puisque  $\lambda \neq 0$  par hypothèse et  $x \neq 0_E$  en tant que vecteur propre). Par conséquent,  $v(x) \neq 0_E$  et en composant par  $v$  l'égalité précédente, on obtient

$$v[u(v(x))] = v(\lambda \cdot x)$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)(v(x)) = \lambda \cdot v(x).$$

Comme  $v(x) \neq 0_E$ , on en déduit que  $v(x)$  est un vecteur propre de  $v \circ u$  associé à  $\lambda$ .

## Solution 109

rms132-1206

1. Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , le degré du polynôme  $P_k$  est égal à  $k$ , donc la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  (échelonnée en degré).

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} P'_n &= \frac{(X-n)^{n-1}}{n!} + \frac{(n-1)X(X-n)^{n-2}}{n!} = \frac{(X-n)^{n-2}}{n!} \cdot [(X-n) + (n-1)X] \\ &= \frac{(X-1)((X-1)-(n-1))^{(n-1)-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}(X-1). \end{aligned}$$

On suppose que  $P_n^{(k)} = P_{n-k}(X-k)$  pour un entier  $1 \leq k < n$  (c'est vrai pour  $k = 1$  comme on vient de le constater). Alors

$$\begin{aligned} P_n^{(k+1)} &= (P_n^{(k)})' \stackrel{\text{HR}}{=} (P_{n-k}(X-k))' = P_{n-k}'(X-k) \\ &= P_{(n-k)-1}((X-k)-1) \\ &= P_{n-(k+1)}(X-(k+1)), \end{aligned} \quad (\text{calcul précédent})$$

ce qui prouve que notre hypothèse de récurrence est vraie pour  $1 \leq k \leq n$ .

3. a. Pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\deg Q'(X+1) = \deg Q' \leq \deg Q \leq n$$

et comme  $\Phi_n$  est évidemment linéaire, l'application  $\Phi_n$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

3. b. Il est clair que  $\Phi_n(P_0) = P_0$  et que  $\Phi_n(P_1) = X-1 = P_1 - P_0$ .

D'après la question précédente, pour  $2 \leq k \leq n$ ,

$$\Phi_n(P_k) = P_k - P_k'(X+1) = P_k - P_{k-1}.$$

3. c. La matrice de  $\Phi_n$  relative à la base  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Par conséquent,  $\Phi_n$  admet 1 comme seule valeur propre et il est clair sur la matrice que le sous-espace propre associé à 1 est la droite  $\mathbb{R} \cdot P_0$  des polynômes constants.

✎ On peut aussi constater que l'équation  $\Phi_n(P) = P$  se traduit par  $-P'(X+1) = 0$  et donc  $P' = 0$ .

4. Comme 0 n'est pas valeur propre,  $\Phi_n$  est inversible : c'est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

✎ Il est clair que  $\Phi_n^{-1}(P_0) = P_0$ . D'autre part, comme

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \Phi_n(P_k) = P_k - P_{k-1}$$

et que, pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,

$$P_k = P_0 + \sum_{i=1}^k (P_i - P_{i-1}) = \Phi_n(P_0) + \sum_{i=1}^k \Phi_n(P_i) = \Phi_n\left(\sum_{i=0}^k P_i\right),$$

alors

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \Phi_n^{-1}(P_k) = \sum_{i=0}^k P_i.$$

✎ Cette expression est correcte également pour  $k = 0$ .

## Solution 110

rms132-1208

1.

✎ Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal (resp. son polynôme caractéristique) est scindé. En particulier, si  $E$  est un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$ , tout endomorphisme de  $E$  est trigonalisable.

Puisque l'endomorphisme  $f$  est trigonalisable, il admet donc au moins une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Le sous-espace propre  $\text{Ker}(f - \lambda I)$  est stable par  $g$  (puisque  $f$  et  $g$  commutent). L'endomorphisme  $g_\lambda$ , induit par restriction de  $g$  à ce sous-espace stable, est donc bien défini.

Comme  $\dim \text{Ker}(f - \lambda I) \geq 1$ , le degré du polynôme caractéristique de  $g_\lambda$  est supérieur à 1. On sait que le polynôme caractéristique de  $g_\lambda$  est un diviseur du polynôme caractéristique de  $g$  et comme le polynôme caractéristique de  $g$  est scindé, le polynôme caractéristique de  $g_\lambda$  est scindé lui aussi.

Donc  $g_\lambda$  admet au moins une valeur propre  $\mu \in \mathbb{K}$  et il existe un vecteur *non nul*  $x_0 \in \text{Ker}(f - \lambda I)$  tel que

$$g(x_0) = g_\lambda(x_0) = \mu \cdot x_0.$$

Ce vecteur  $x_0$  est donc un vecteur propre commun à  $f$  (associé à  $\lambda$ ) et à  $g$  (associé à  $\mu$ ).

**2. a.** Par définition,  $\text{Im } p = G$ , donc

$$\forall x \in G, \quad f_1(x) = p(f(x)) \in G \quad \text{et} \quad f_2(x) = p(g(x)) \in G.$$

Le sous-espace  $G$  est donc stable par  $f_1$  et par  $g_1$ .

**2. b.** Considérons une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ .

▮ Une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est *adaptée à une décomposition*  $E = F \oplus G$  lorsqu'elle est obtenue en concaténant une base  $\mathcal{B}_F$  de  $F$  avec une base  $\mathcal{B}_G$  de  $G$ .

Comme le sous-espace  $F$  est stable par  $f$  et par  $g$  et que, d'autre part,  $p$  est la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_f & B_f \\ 0 & C_f \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A_g & B_g \\ 0 & C_g \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_g \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1 \circ g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_f C_g \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_1 \circ f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_g C_f \end{pmatrix}.$$

Mais on a supposé que  $f$  et  $g$  commutent, donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} A_f A_g & A_f B_g + B_f C_g \\ 0 & C_f C_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_g A_f & A_g B_f + B_g C_f \\ 0 & C_g C_f \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$$

et on en déduit que  $f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1$ .

**3.** Puisque le sous-espace  $G$  est stable par  $f_1$  et par  $g_1$ , les endomorphismes  $f_2 \in L(G)$  et  $g_2 \in L(G)$  induits par restriction sont bien définis.

▮ On rappelle que les propositions suivantes sont équivalentes.

- Un endomorphisme  $u$  est trigonalisable;
- L'endomorphisme  $u$  admet un polynôme annulateur non nul et scindé;
- Le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé;
- Le polynôme minimal de  $u$  est scindé.

Soit  $\chi_f$ , le polynôme caractéristique de  $f$ . En calculant dans la base  $\mathcal{B}$ ,

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad \chi_f(t) = \det(tI - A_f) \det(tI - C_f).$$

En calculant dans la base  $\mathcal{B}_G$ ,

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad \chi_{f_2}(t) = \det(tI - C_f)$$

donc  $\chi_{f_2}$  est un diviseur de  $\chi_f$ . Comme  $\chi_f$  est scindé et que  $\dim G \geq 1$ , on en déduit que  $\chi_{f_2}$  est un polynôme non constant et scindé.

▮ On a supposé que  $F$  était un sous-espace strict de  $E$ . Par conséquent,  $\dim F < \dim E$  et donc  $\dim G \geq 1$ .

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme  $\chi_{f_2}$  est un polynôme annulateur de  $f_2$ . On en déduit que  $f_2$  est trigonalisable.

♣ Idem pour  $g_2$ , évidemment.

**4.** Si  $n = 1$ , les matrices de  $f$  et  $g$  sont triangulaires supérieures (et même diagonales!) dans toute base de  $E$ .

**HR :** supposons que, pour un entier  $n \geq 1$ , quel que soit l'espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , quels que soient les endomorphismes  $f$  et  $g$  de  $E$ , si  $f$  et  $g$  sont trigonalisables et commutent, alors il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices de  $f$  et  $g$  sont toutes les deux triangulaires supérieures.

Considérons maintenant un espace vectoriel  $E$  de dimension  $(n+1)$  et deux endomorphismes trigonalisables  $f$  et  $g$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .

D'après la première question, il existe un vecteur  $x_0$  qui est un vecteur propre à la fois pour  $f$  et pour  $g$ . Le sous-espace  $F = \mathbb{K} \cdot x_0$  est donc stable pour  $f$  et pour  $g$ .

D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un sous-espace  $G$  tel que  $E = F \oplus G$  et, dans une base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_G$  de  $E$  adaptée à cette décomposition,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_f & L_f \\ 0 & C_f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a_g & L_g \\ 0 & C_g \end{pmatrix}.$$

On a démontré précédemment que les endomorphismes  $f_2$  et  $g_2$  induits par restriction à  $G$ , sous-espace de dimension  $n$ , étaient trigonalisables et commutaient (puisque  $f_1$  et  $g_1$  commutaient).

Par hypothèse de récurrence, il existe une base  $\mathcal{C}_G$  de  $G$  dans laquelle les matrices de  $f_2$  et  $g_2$  sont triangulaires supérieures :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_G}(f_2) = C_f, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}_G}(f_2) = T_f, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_G}(g_2) = C_g, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}_G}(g_2) = T_g.$$

On en déduit que les matrices de  $f$  et  $g$  relatives à la base  $\mathcal{C} = \mathcal{B}_F \oplus \mathcal{C}_G$  sont triangulaires supérieures :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_f & \star \\ 0 & T_f \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} a_g & \star \\ 0 & T_g \end{pmatrix}.$$

On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence était héréditaire et la démonstration par récurrence est achevée.

En notant  $P_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , la matrice de passage de  $\mathcal{B}_G$  à  $\mathcal{C}_G$ , la matrice

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  et, en remarquant que

$$P_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix},$$

quelques produits matriciels par blocs nous permettent d'explicitier les matrices de  $f$  et  $g$  relatives à la base  $\mathcal{C}$  en fonction des matrices de  $f$  et  $g$  relatives à la base  $\mathcal{B}$ .

### ▮ Variante géométrique

Un endomorphisme  $f$  de  $E$ , espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , est trigonalisable si, et seulement si, il existe une famille strictement croissante de sous-espaces vectoriels

$$\{0_E\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n = E$$

qui sont tous stables par  $f$ .

En particulier, la dimension de  $E_k$  est égale à  $k$  (quel que soit  $0 \leq k \leq \dim E$ ).

Pour établir l'hérédité de notre hypothèse de récurrence, on considère  $E_1 = \mathbb{K} \cdot x_0$  (stable par  $f$  et  $g$ ) ainsi qu'une famille strictement croissante de sous-espaces vectoriels

$$\{0_E\} \subsetneq G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots \subsetneq G_{n-1} \subsetneq G_n = G$$

qui sont tous stables par  $f_2$  et par  $g_2$ . On vérifie alors que les sous-espaces  $E_{k+1} = E_1 \oplus G_k$  sont tous stables par  $f$  et  $g$  (ce qui n'est pas totalement évident et mérite qu'on pose quelques calculs) et que

$$\{0_E\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n \subsetneq E_{n+1} = E.$$

## Solution 111

rms133-182

1. Commençons en traitant le cas où les deux matrices sont diagonales :

$$A = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad B = \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

On rappelle qu'on peut exprimer les matrices  $E_{i,j}$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  au moyen des colonnes  $E_i$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad E_{i,j} = E_i \cdot E_j^\top,$$

ce qui donne

$$A E_{i,j} = (A E_i) \cdot E_j^\top = (\alpha_i E_i) \cdot E_j^\top = \alpha_i E_{i,j}$$

et d'autre part

$$E_{i,j}B = E_i \cdot (E_j^T \cdot B) = E_i(B^T \cdot E_j)^T = E_i \cdot (\beta_j E_j)^T = \beta_j \cdot E_i \cdot E_j^T = \beta_j \cdot E_{i,j}.$$

Quels que soient  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$\Delta(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}B = \alpha_i E_{i,j} + E_{i,j}\beta_j = (\alpha_i + \beta_j)E_{i,j}.$$

Dans ces conditions, la base canonique est constituée de vecteurs propres.

• Par hypothèse, il existe deux matrices diagonales  $D_1$  et  $D_2$  et deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que

$$P^{-1}AP = D_1 \quad \text{et} \quad Q^{-1}BQ = D_2.$$

On en déduit que  $A = PD_1P^{-1}$  et  $B = QD_2Q^{-1}$ , d'où

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \Delta(M) = P(D_1(P^{-1}MQ) + (P^{-1}MQ)D_2)Q^{-1}.$$

En posant

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad M_{i,j} = PE_{i,j}Q^{-1},$$

on déduit des calculs préliminaires que

$$\Delta(M_{i,j}) = P((\alpha_i + \beta_j)E_{i,j})Q^{-1} = (\alpha_i + \beta_j)M_{i,j}.$$

La famille  $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  (image de la base canonique par l'automorphisme  $[X \mapsto PXQ^{-1}]$ ) et tous ses vecteurs sont des vecteurs propres, donc l'endomorphisme  $\Delta$  est diagonalisable et

$$\text{Sp}(\Delta) = \{\alpha_i + \beta_j, 1 \leq i, j \leq n\}.$$

✎ La démonstration n'est pas spécialement plus simple si on suppose que les matrices  $A$  et  $B$  commutent.

On sait, dans ce cas, que les deux matrices admettent une base commune de vecteurs propres et qu'il existe donc une matrice inversible  $P$  telle que les deux matrices  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  soient diagonales.

On a donc  $AP = D_1P$  et  $P^{-1}B = P^{-1}D_2$  : les colonnes  $C_1, \dots, C_n$  de  $P$  sont des vecteurs propres de  $A$  et les lignes  $L_1, \dots, L_n$  de  $P^{-1}$  sont des co-vecteurs propres de  $B$ . En posant

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad M_{i,j} = C_j L_i,$$

on a donc

$$AM_{i,j} = \alpha_j C_j L_i = \alpha_j M_{i,j} \quad \text{et} \quad M_{i,j}B = \beta_i C_j L_i = \beta_i M_{i,j}$$

d'où  $\Delta(M_{i,j}) = (\alpha_j + \beta_i)M_{i,j}$ . Il reste à vérifier que la famille  $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est libre.

2. On démontre par récurrence que, pour tout entier  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \Delta^m(M) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k M B^{m-k}.$$

L'égalité est claire pour  $m = 1$ . Si elle est vraie pour un entier  $m \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} \Delta^{m+1}(M) &= A \cdot \Delta^m(M) + \Delta^m(M) \cdot B \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^{k+1} M B^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k M B^{(m+1)-k} \\ &= A^{m+1} M + \sum_{k=1}^m \left[ \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] A^k M B^{(m+1)-k} + M B^{m+1} \\ &= A^{m+1} M + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} A^k M B^{(m+1)-k} \quad (\text{triangle de Pascal}) \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} A^k M B^{(m+1)-k}. \end{aligned}$$

✎ Par définition de l'indice de nilpotence,

$$\forall k < d_A, \quad A^k \neq 0_n \quad \text{et} \quad \forall k \geq d_A, \quad A^k = 0_n.$$

• Par hypothèse,  $A^k = 0_n$  pour tout  $k \geq d_A$  et  $B^\ell = 0_n$  pour tout  $\ell \geq d_B$ . De ce fait, si  $m \geq d_A + d_B - 1$  et si  $0 \leq k \leq m$ , alors

— ou bien  $k \geq d_A$  et dans ce cas,

$$A^k M B^{m-k} = 0_n M B^{m-k} = 0_n$$

— ou bien  $k < d_A$  et dans ce cas,  $\ell = (m - k) > (d_A + d_B - 1) - d_A = d_B - 1$ , donc  $\ell \geq d_B$  (inégalité stricte entre deux entiers!) et

$$A^k M B^{m-k} = A^k M 0_n = 0_n.$$

On en déduit que  $\Delta^m(M) = (n + 1) \cdot 0_n = 0_n$ .

On a ainsi démontré que  $\Delta$  était nilpotente et que son indice de nilpotence était inférieur à  $d_A + d_B - 1$ .

✎ Si les matrices  $A$  et  $B$  sont distinctes de la matrice nulle, alors il existe une matrice  $M$  telle que  $AMB \neq 0_n$ .

En effet, il existe deux indices  $1 \leq i, j \leq n$  tels que  $a_{i,j} \neq 0$  et deux indices  $1 \leq k, \ell \leq n$  tels que  $b_{k,\ell} \neq 0$ . Dans ces conditions, le produit  $a_{i,j}b_{k,\ell}$  est non nul (produit dans le corps  $\mathbb{K}$ ) et par conséquent

$$AE_{j,k}B = (AE_j) \cdot (E_k^\top \cdot B) = (a_{i,j}E_i) \cdot ({}^\top b_{k,\ell}E_\ell) = a_{i,j}b_{k,\ell}E_{i,\ell} \neq 0_n.$$

✎ Considérons maintenant l'exposant  $m = d_A + d_B - 2$ . Pour  $0 \leq k \leq m$ , on distingue maintenant trois cas.

— Si  $k \geq d_A$ , alors  $A^k M B^{m-k} = 0_n$ .

— Si  $k < d_A - 1$ , alors  $k \leq d_A - 2$  (inégalité entre entiers), donc  $\ell = m - k \geq (d_A + d_B - 2) - (d_A - 2) = d_B$  et  $A^k M B^{m-k} = 0_n$ .

— Si  $k = d_A - 1$ , alors  $\ell = m - k = d_B - 1$  et dans ce cas,  $A^k \neq 0_n$  et  $B^{m-k} \neq 0_n$ ; comme on l'a vu plus haut, il existe alors une matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A^k M B^{m-k} \neq 0_n$ .

Cela prouve qu'il existe une matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\Delta^m(M) \neq 0_n$  (somme de  $m$  matrices nulles et d'une matrice non nulle) et donc que  $\Delta^m$  n'est pas l'endomorphisme nul.

L'indice de nilpotence de  $\Delta$  est donc égal à  $(d_A + d_B - 1)$ .

## Solution 112

rms133-1000

1. Si  $A$  est nilpotente, alors  $A$  n'est pas inversible et 0 est donc une valeur propre de  $A$ .

D'autre part,  $A$  admet un polynôme annulateur de la forme  $X^d$  (avec  $d \in \mathbb{N}^*$ ), donc toute valeur propre de  $A$  est une racine de  $X^d$ , donc 0 est bien la seule valeur propre de  $A$ .

✎ Réciproquement, supposons que le spectre de  $A$  soit réduit à  $\{0\}$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est un polynôme à coefficients complexes dont le degré est égal à  $n \geq 1$ , donc il est scindé (Théorème de d'Alembert-Gauss) et les racines du polynôme caractéristique sont exactement les valeurs propres. Donc le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à  $X^n$  et  $A$  est nilpotente (Théorème de Cayley-Hamilton).

✎ On pouvait se passer du Théorème de Cayley-Hamilton en raisonnant sur le polynôme minimal de  $A$ .

2.a. Tout d'abord,  $\text{tr}(C) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$  (propriété fondamentale de la trace).

Plus généralement, l'hypothèse  $[A, C] = 0_n$  signifie que les matrices  $A$  et  $C$  commutent. Par conséquent,  $A$  et  $C^k$  commutent pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad C^{k+1} = C^k \cdot (AB - BA) = C^k AB - C^k BA = AC^k B - C^k BA.$$

La propriété fondamentale de la trace nous assure alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{tr}(C^{k+1}) = \text{tr}(A \cdot C^k B) - \text{tr}(C^k B \cdot A) = 0.$$

2.b. Pour toute matrice trigonalisable (et donc en particulier pour toute matrice à coefficients complexes), on peut exprimer la trace en fonction des valeurs propres et de leurs multiplicités respectives :

$$\text{tr}(C) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(C)} m_\lambda \lambda$$

et plus généralement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{tr}(C^k) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(C)} m_\lambda \lambda^k.$$

✎ Considérons un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  dont le terme constant est nul :

$$P = a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_d X^d = \sum_{k=1}^d a_k X^k.$$

Alors

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(C)} m_\lambda P(\lambda) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(C)} m_\lambda \sum_{k=1}^d a_k \lambda^k = \sum_{k=1}^d a_k \left( \sum_{\lambda \in \text{Sp}(C)} m_\lambda \lambda^k \right) = 0. \quad (*)$$

• Considérons maintenant l'ensemble  $X = \text{Sp}(C) \cup \{0\}$  et les polynômes interpolateurs  $(P_x)_{x \in X}$  associés aux abscisses de  $X$  (Théorie de l'interpolation de Lagrange).

Si  $\lambda_0 \in \text{Sp}(C)$  est une valeur propre non nulle de  $C$ , alors  $\lambda_0 \in X$  et  $\lambda_0 \neq 0$ , donc  $P_{\lambda_0}(0) = 0$  (ce qui nous autorise à appliquer la propriété  $(*)$  qui vient d'être établie) et  $P_{\lambda_0}(\lambda) = 0$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(C)$  distinct de  $\lambda_0$ . On déduit alors de  $(*)$  que

$$m_{\lambda_0} = m_{\lambda_0} P_{\lambda_0}(\lambda_0) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(C)} m_\lambda P_{\lambda_0}(\lambda) = 0.$$

C'est absurde!

• Par définition, la multiplicité d'une valeur propre est au moins égale à 1.

Par conséquent, la matrice  $C$  n'a pas d'autre valeur propre possible que 0.

• Comme  $C$  est une matrice à coefficients complexes, elle admet au moins une valeur propre.

Donc le spectre de  $C$  est bien réduit à  $\{0\}$  et la matrice  $C$  est donc nilpotente.

• Le résultat est valable aussi pour une matrice à coefficients réels, il suffit de la considérer comme une matrice à coefficients complexes et de raisonner sur le spectre complexe de cette matrice.

2. c. Pour  $p = 1$ , on a  $[B, A] = -C$  (par définition de  $C$ ).

Supposons que  $[B, A^p] = -pA^{p-1}C$  pour un entier  $p \geq 1$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} [B, A^{p+1}] &= BA^p \cdot A - A \cdot A^p B = (BA^p - A^p B) \cdot A + (A^p B \cdot A - A^p \cdot AB) = [B, A^p] \cdot A - A^p \cdot [A, B] \\ &= -pA^{p-1}C \cdot A - A^p \cdot C && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= -pA^p \cdot C - A^p \cdot C = -(p+1)A^p \cdot C && \text{(car } A \text{ et } C \text{ commutent)} \end{aligned}$$

et on a démontré par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad [B, A^p] = -pA^{p-1} \cdot C.$$

### Solution 113

rms133-1277

1. Considérons les matrices  $A$  et  $B$  dont les premières colonnes sont respectivement égales à

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et à} \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

toutes les autres colonnes de ces matrices étant nulles. Autrement dit :

$$A = U \cdot U^T \quad \text{et} \quad B = V \cdot U^T.$$

Il est donc clair que  $\text{Im } A = \mathbb{R} \cdot U$  et  $\text{Im } B = \mathbb{R} \cdot V$  et que

$$X \in \text{Ker } A = \text{Ker } B \iff U^T \cdot X = 0.$$

Par conséquent, on a bien  $AB = 0_n$  (puisque  $\text{Im } B \subset \text{Ker } A$ ) mais pas  $BA = 0_n$  (puisque  $\text{Im } A \not\subset \text{Ker } B$ ).

2. Comme  $AB = 0_n$ , on peut démontrer par récurrence que

$$\forall p \geq 1, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^k.$$

✎ Si l'expression développée est correcte pour  $(A + B)^p$ , alors

$$\begin{aligned}(A + B)^{p+1} &= \left( \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^k \right) \cdot (A + B) = \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^{k+1} + \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^k B \\&= \sum_{k=1}^{p+1} B^{(p+1)-k} A^k + \underbrace{B^{p+1}}_{(k=0)} + \sum_{k=1}^p B^{p-k} A^{k-1} \cdot \underbrace{(AB)}_{=0_n} \\&= \sum_{k=0}^{p+1} B^{(p+1)-k} A^k.\end{aligned}$$

Pour tout  $1 \leq k < p$ , on a  $k-1 \in \mathbb{N}$  et  $(p-1-k) \in \mathbb{N}$  et donc

$$\text{tr}(B^{p-k} A^k) = \text{tr}(A^k B^{p-k}) = \text{tr}(A^{k-1} \cdot AB \cdot B^{p-1-k}) = \text{tr}(0_n) = 0.$$

On déduit alors de la linéarité de la trace que

$$\forall p \geq 1, \quad \text{tr}[(A + B)^p] = \underbrace{\text{tr} A^p}_{k=p} + \underbrace{\text{tr} B^p}_{k=0}.$$

3. Comme on l'a mentionné, la propriété  $AB = 0_n$  équivaut au fait que  $\text{Im } B \subset \text{Ker } A$ . D'après le Théorème du rang,

$$\text{rg } B \leq n - \text{rg } A$$

c'est-à-dire

$$\text{rg } A + \text{rg } B \leq n.$$

#### Solution 114

rms133-1285

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ | & & | \\ 0 & \cdots & 0 \\ | & & | \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle (Théorème spectral).

✎ La seconde question est la seule intéressante! Nous allons en présenter deux solutions. Un court rappel pour comprendre la première : si un endomorphisme  $u$  est diagonalisable, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda I_E).$$

Si  $u$  n'est pas inversible, alors  $\lambda = 0 \in \text{Sp}(u)$  et si  $u$  n'est pas identiquement nul, alors il admet au moins une valeur propre non nulle.

Si  $\lambda_0$  est une valeur propre non nulle de  $u$  et  $x_0$ , un vecteur propre de  $u$  associé à  $\lambda_0$ , alors

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_0} \cdot u(x_0) = u\left(\frac{1}{\lambda_0} \cdot x_0\right) \in \text{Im } u.$$

Par conséquent,

$$E = \text{Ker } u \oplus \underbrace{\left( \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u) \setminus \{0\}} \text{Ker}(u - \lambda I_E) \right)}_{\subset \text{Im } u}.$$

Comme  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que

$$\text{Im } u = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u) \setminus \{0\}} \text{Ker}(u - \lambda I_E)$$

et donc que  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$ .

*Une dernière précision : cette dernière propriété n'est pas réservée aux endomorphismes diagonalisables ! On peut démontrer qu'elle équivaut au fait que  $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$  ou, si on préfère, au fait que le sous-espace propre associé à 0 soit égal au sous-espace caractéristique associé à 0 ou encore au fait que la multiplicité de 0 comme racine du polynôme caractéristique soit inférieure à 1.*

*Et maintenant, reprenons !*

**2. Première version :** on considère l'endomorphisme  $u \in L(\mathbb{R}^n)$  canoniquement associé à la matrice  $A$ . Il est clair que le rang de  $u$  est égal à 2 :

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \text{Vect}(e_1 + \dots + e_n, e_1)$$

et que, si  $n \geq 3$ ,

$$\text{Ker } u = \text{Ker}(u - 0 \cdot I_E) = \text{Vect}(e_3 - e_2, \dots, e_n - e_2).$$

(Pour  $n = 2$ , le noyau de  $u$  est réduit au vecteur nul. On y reviendra à la question suivante !)

Comme  $u$  est diagonalisable, alors

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$$

et comme le plan  $P = \text{Im } u$  est stable par  $u$ , on peut définir l'endomorphisme  $v \in L(P)$  induit par restriction de  $u$  au plan  $P$ . Les valeurs propres non nulles de  $u$  sont alors les valeurs propres de  $v$  et les vecteurs propres de  $u$  associés à des valeurs propres non nulles sont les vecteurs propres de  $v$ .

Le plan  $P$  admet une base naturelle :  $\mathcal{B}_P = (u(e_1), u(e_2))$  et comme

$$\begin{aligned} u(u(e_1)) &= u(e_1) + \sum_{k=2}^n u(e_k) = u(e_1) + (n-1)u(e_2) \\ u(u(e_2)) &= u(e_1), \end{aligned}$$

la matrice de  $v$  relative à cette base  $\mathcal{B}_P$  est

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les valeurs propres non nulles de  $A$  (c'est-à-dire les valeurs propres de  $A_P$ ) sont les racines du polynôme

$$X^2 - X - (n-1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Cette expression moche n'est pas un problème ! En effet, les vecteurs propres associés à ces valeurs propres (qui sont des vecteurs propres aussi bien pour  $u$  que pour  $v$ , tout est là !) sont représentés dans la base  $\mathcal{B}_P$  par les vecteurs non nuls du noyau de

$$A_P - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ n-1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit de regarder la première ligne de cette matrice (dont le rang est égal à 1 puisque  $\lambda$  est une valeur propre de  $A_P$ ...) pour en déduire que les vecteurs propres de  $A_P$  associés à la valeur propre  $\lambda$  sont proportionnels à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$\text{Ker}(u - \lambda I_E) = \mathbb{R} \cdot [u(e_1) + (\lambda - 1) \cdot u(e_2)] = \mathbb{R} \left[ \lambda \cdot e_1 + \sum_{k=2}^n e_k \right].$$

**Deuxième version :** Comme la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (alias le noyau) est égale à  $(n-2)$ , la somme des dimensions des autres sous-espaces propres est égale à 2 et il y a donc au plus deux valeurs propres non nulles (peut-être une valeur propre double ?). Comme  $A$  est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et par conséquent son degré est au plus égal à 3. (De plus, comme  $0 \in \text{Sp}(A)$ , le terme constant du polynôme minimal est nul.)

On prend le temps de poser le calcul :

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2n-1 & n & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que la famille  $(I_n, A, A^2)$  est libre et que

$$A^3 = A^2 + (n-1)A,$$

ce qui prouve que le polynôme minimal de  $A$  est égal à

$$X^3 - X^2 - (n-1)X.$$

On en déduit sans difficulté les trois valeurs propres de  $A$  et les sous-espaces propres comme plus haut.

🔗 *La dimension des sous-espaces propres nous permet d'en déduire que le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à*

$$X^{n-2}(X - X - (n-1)).$$

3. Comme le rang de  $A$  est égal à 2, il n'y a que deux cas possibles :

- si  $n \geq 3$ , alors la matrice  $A$  n'est pas inversible et  $\det A = 0$ ;
- si  $n = 2$ , alors

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

### Solution 115

rms134-1387

🔗 *Comme il est question de matrices à coefficients complexes, il faut tout de suite penser à trigonaliser la matrice  $M$ !*

✎ **Cas des matrices inversibles** — D'après (5),

$$\varphi(I_2) = 1.$$

On déduit de (4) que, pour toute matrice inversible  $P \in GL_2(\mathbb{C})$ ,

$$\varphi(P)\varphi(P^{-1}) = \varphi(I_2) = 1.$$

L'image de  $GL_2(\mathbb{C})$  est donc contenue dans  $\mathbb{C}^*$  et

$$\forall P \in GL_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(P^{-1}) = \frac{1}{\varphi(P)}.$$

✎ **Cas des matrices semblables** — Si deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables, alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

D'après (4) et ce qui précède,

$$\varphi(B) = \varphi(P^{-1})\varphi(A)\varphi(P) = \varphi(A).$$

✎ La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

prouve que les deux matrices  $A_\lambda$  et  $B_\lambda$  sont semblables et donc que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(B_\lambda) = \lambda = \det B_\lambda. \quad (33)$$

✎ **Cas des matrices diagonalisables** — Si la matrice  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  est diagonalisable, alors elle est semblable à

$$\text{Diag}(\lambda, \mu) = A_\lambda B_\mu$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux nombres complexes (non nécessairement distincts). On déduit alors de (4), (5) et (33) que

$$\varphi(M) = \varphi(A_\lambda B_\mu) = \varphi(A_\lambda)\varphi(B_\mu) = \lambda\mu = \det M. \quad (34)$$

✎ **Trigonalisation** — Toute matrice  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  est trigonalisable, c'est-à-dire qu'elle est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = A_\lambda B_\mu T \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

🔗 *Si la matrice  $A$  n'est pas alors les deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  sont égales (cours) et on peut démontrer qu'il est possible de choisir  $\alpha = 1$  (exercice classique).*

Toujours d'après (4), (5) et (33),

$$\varphi(M) = \varphi(A_\lambda)\varphi(B_\mu)\varphi(T) = \lambda\mu\varphi(T) = \det M \times \varphi(T).$$

Il reste donc à calculer  $\varphi(T)$  avec un peu d'astuce...

• On remarque que

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  ayant deux valeurs propres distinctes est diagonalisable. On déduit de (4) et (34) (avec  $a = \alpha/4$ ) que

$$\varphi(T) = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

et finalement que

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = \det M.$$

### Solution 116

rms134-1389

1. Avec les opérations  $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$  et  $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$ , on trouve que

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

et, d'après le cours, ces deux matrices ont même rang.

Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de colonnes, donc  $\text{rg } A \leq 3$ .

Il est clair que, pour la seconde matrice, les colonnes  $C_2$  et  $C_3$  ne sont pas proportionnelles. Donc  $\text{rg } A \geq 2$ .

D'autre part, la colonne  $C_1$  n'est pas une combinaison linéaire de  $C_2$  et  $C_3$ , donc  $\text{rg } A \geq 3$ .

Donc le rang de  $A$  est égal à 3 et les colonnes de  $A$  forment une famille libre.

• L'image d'une matrice est engendrée par les colonnes de la matrice. Comme les trois colonnes forment une famille libre, elles constituent en fait une base de l'image de  $A$ .

• On travaille ici dans un espace de dimension 4 et l'image de  $A$  est donc un hyperplan.

2. D'après le cours, si la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est une famille libre, alors le vecteur  $v$  appartient au sous-espace  $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  si, et seulement si, la famille  $(u_1, u_2, u_3, v)$  est liée.

Par conséquent, le vecteur

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

appartient à  $\text{Im } A$  si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 3 & 2 & 1 & t \end{pmatrix} = 0.$$

En développant par la dernière colonne, on obtient ainsi une équation cartésienne de l'image de  $A$ .

$$V \in \text{Im } A \iff 2x - 8z + 2t = 0.$$

• Comme  $2 \times 1 - 8 \times 3 + 2 \times 4 \neq 0$ , le vecteur  $B$  n'appartient pas à l'image de  $A$ .

• Si on ne dispose pas d'une équation cartésienne pour représenter l'hyperplan  $\text{Im } A$ , on peut calculer le rang de la matrice obtenue en concaténant  $A$  et  $B$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier assez rapidement que le rang de cette matrice est égal à 4, ce qui prouve que la colonne  $B$  n'est pas une combinaison linéaire des colonnes qui engendrent l'image de  $A$ .

**Solution 117****rms134-1395**

✎ On généralise ici un résultat du cours : si  $x$  est un élément nilpotent d'indice  $n$  dans un anneau  $A$ , alors  $1_A - x$  est inversible et

$$(1_A - x)^{-1} = 1_A + x + \cdots + x^{n-1}.$$

1. Comme  $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  est nilpotente, on sait que l'indice de nilpotence de  $B$  est inférieur à  $n$  :

$$B^n = 0_n.$$

Comme les matrices  $A$  et  $B$  commutent, on sait que

$$\begin{aligned} (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k} &= A^n - B^n = A^n \\ (A + B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k} &= A^n - (-B)^n = A^n \end{aligned}$$

et comme  $A^n$  est inversible (puisque  $A$  est inversible), on en déduit que les deux matrices  $A \pm B$  sont inversibles avec

$$\begin{aligned} (A - B)^{-1} &= (A^n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k}, \\ (A + B)^{-1} &= (A^n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k}. \end{aligned}$$

✎ La formule de la somme géométrique

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) * \left( \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \right)$$

est vraie dans n'importe quel anneau  $(A, +, *)$ , commutatif ou non, pourvu que les deux éléments  $x$  et  $y$  considérés ici commutent entre eux.

2. Il est clair que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. Il est tout aussi clair que la matrice

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

✎ Il suffit de trouver un contre-exemple, le plus simple est le meilleur.

On commence donc par choisir la matrice nilpotente la plus simple qui soit.

Pour que la somme  $A + B$  ne soit pas inversible, il suffit que la seconde colonne de cette matrice soit nulle, ce qui impose la seconde colonne de  $A$ .

Pour que  $A$  soit inversible, il suffit alors de choisir une première colonne non proportionnelle à la seconde colonne qu'on vient de choisir.

Et le tour est joué !

**Solution 118**

rms134-1396

Soit  $y \in \text{Im } f$ . Il existe donc  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  et donc

$$f(y) = (f \circ f)(x) = 0_E.$$

Ainsi  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$  et, d'après le Théorème du rang,

$$\dim E = 4 = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f \geq 2 \dim \text{Im } f,$$

donc  $\text{rg } f \leq 2$ .

✎ **Variante avec calculs élémentaires**

Nous allons démontrer que l'hypothèse  $f \circ f = 0$  implique que la dimension de  $\text{Ker } f$  est au moins égale à 2.

• Si  $\dim \text{Ker } f = 0$ , alors  $f$  est injective et  $f \circ f$  est injective : c'est impossible.

• Si  $\dim \text{Ker } f = 1$ , alors il existe un vecteur  $\alpha \neq 0_E$  tel que  $\text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot \alpha$ . Si  $f \circ f(x) = 0_E$ , alors

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in \text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot \alpha.$$

Si  $\alpha \notin \text{Im } f$ , alors la relation précédente devient  $f(x) = 0_E$ , donc  $\text{Ker}(f \circ f) \subset \text{Ker } f$  et, comme l'inclusion réciproque est évidente, on en déduit que  $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$ , donc  $\dim \text{Ker}(f \circ f) = 1$  : c'est impossible.

Si au contraire  $\alpha \in \text{Im } f$ , alors il existe  $\alpha_0 \in E$  tel que  $\alpha = f(\alpha_0)$  et la propriété sur  $x$  nous donne un scalaire  $\lambda$  tel que

$$f(x) = \lambda \alpha = f(\lambda \alpha_0)$$

c'est-à-dire

$$x - \lambda \alpha_0 \in \text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot \alpha$$

et donc  $x \in \text{Vect}(\alpha, \alpha_0)$ . On a cette fois démontré que

$$\text{Ker}(f \circ f) \subset \text{Vect}(\alpha, \alpha_0)$$

et donc que  $\dim \text{Ker}(f \circ f) \leq 2$  : c'est impossible.

• En définitive, la dimension de  $\text{Ker } f$  est au moins égale à 2 et donc (Théorème du rang !) le rang de  $f$  est au plus égal à 2.

**Solution 119**

rms134-1398

**Réduction du problème.**

Comme  $u^k$  est linéaire et que  $u^k(x) \neq 0_E$ , il est clair que  $x \neq 0_E$ .

L'ensemble

$$I_x = \{\ell \in \mathbb{N} : u^\ell(x) \neq 0_E\}$$

est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  (elle contient  $k = 0$  puisque  $x \neq 0_E$  !). Cette partie est majorée par l'indice de nilpotence  $d$  de  $u$  : comme  $u^d$  est l'endomorphisme nul, le vecteur  $u^d(x)$  est nul et

$$\forall \ell \geq d, \quad u^\ell(x) = u^{\ell-d}(u^d(x)) = u^{\ell-d}(0_E) = 0_E$$

donc  $\ell \notin I_x$  pour tout  $\ell \geq d$ .

✎ Ce raisonnement n'est donc possible que pour  $\ell \geq d$ .

En effet, comme l'endomorphisme  $u$  est nilpotent, il n'est pas inversible et l'endomorphisme  $u^m$  est défini si, et seulement si, l'entier  $m$  est un entier naturel.

D'après l'Axiome de bon ordre, l'ensemble  $I_x$  admet un plus grand élément  $\ell_0$  tel que

$$u^{\ell_0}(x) \neq 0_E \quad \text{et} \quad u^{\ell_0+1}(x) = 0_E.$$

• Si on démontre que la famille

$$\mathcal{F}_0 = (x, u(x), \dots, u^k(x), \dots, u^{\ell_0}(x))$$

est libre, alors la famille  $\mathcal{F}$  sera libre en tant que sous-famille de la famille libre  $\mathcal{F}_0$ .

Il suffit donc de démontrer que la famille  $\mathcal{F}_0$  est libre.

• **Démonstration dans le cas particulier  $k = \ell_0$**

Pour les raisons qu'on vient d'exposer, on suppose ici que  $u^k(x) \neq 0_E$  et que  $u^{k+1}(x) = 0_E$ .

✎ On peut raisonner "de proche en proche" (ce qui est une peu rigoureuse façon de raisonner par récurrence) ou, plus rapidement, par l'absurde en invoquant à nouveau l'Axiome de bon ordre.

Si la famille  $\mathcal{F}$  est liée, alors il existe une famille de scalaires

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

telle que

$$\sum_{\ell=0}^k \alpha_\ell \cdot u^\ell(x) = 0_E.$$

Comme

$$\{0 \leq \ell \leq k : \alpha_\ell \neq 0\}$$

est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , elle admet un plus petit élément  $k_0$  (Axiome de bon ordre). Ainsi,

$$\begin{aligned} 0_E &= \sum_{\ell=0}^k \alpha_\ell u^\ell(x) \\ &= \sum_{0 \leq \ell < k_0} \underbrace{\alpha_\ell}_{=0} u^\ell(x) + \sum_{\ell=k_0}^k \alpha_\ell u^\ell(x) \\ &= \underbrace{\alpha_{k_0}}_{\neq 0} u^{k_0}(x) + \sum_{k_0 < \ell \leq k} \alpha_\ell u^\ell(x). \end{aligned}$$

Comme  $k_0 \leq k$ , alors  $k - k_0 \in \mathbb{N}$ , donc l'endomorphisme  $u^{k-k_0}$  est bien défini et, par linéarité,

$$\begin{aligned} 0_E &= u^{k-k_0}(0_E) \\ &= \alpha_{k_0} u^{k-k_0}(u^{k_0}(x)) + \sum_{k_0 < \ell \leq k} \alpha_\ell u^{\ell+k-k_0}(x) \\ &= \alpha_{k_0} u^k(x) + \sum_{k_0 < \ell \leq k} \alpha_\ell \cdot 0_E \end{aligned}$$

car  $\ell + k - k_0 = k + (\ell - k_0) \geq k + 1$  pour tout entier  $\ell > k_0$ .

✎ C'est ici qu'il est important d'avoir supposé que

$$u^{k+1}(x) = 0_E.$$

On obtient ainsi  $\alpha_{k_0} u^k(x) = 0_E$  alors que le scalaire  $\alpha_{k_0}$  n'est pas nul (par définition de l'indice  $k_0$ ) et que le vecteur  $u^k(x)$  n'est pas nul (par hypothèse de l'énoncé) : c'est absurde!

✎ On a ainsi démontré que la famille

$$(x, u(x), \dots, u^k(x))$$

était libre, quel que soit l'entier  $k \in I_x$ .

## Solution 120

rms134-1399

✎ Il s'agit ici de généraliser un résultat du cours : si  $u$  est un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension  $n$ , alors l'indice de nilpotence de  $u$  est inférieur à  $n$  et  $u^n$  est l'endomorphisme nul.

1. Comme  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension  $n$ , leur indice de nilpotence est strictement inférieur à  $n$  et

$$u^n = v^n = \omega.$$

✎ Il est clair que  $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$  et donc que

$$\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } v.$$

✎ Comme  $u$  et  $v$  commutent, le sous-espace  $F = \text{Im } v$  est stable par  $u$  et

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u \circ v).$$

Comme  $v$  n'est pas l'endomorphisme nul, alors  $\dim F = \operatorname{rg} v \geq 1$ .

✱ Considérons l'endomorphisme  $u_F$  de  $F$  induit par restriction de  $u$  au sous-espace stable  $F$ . Pour tout  $x \in F$ ,

$$u_F(x) = u(x) \in F$$

donc

$$\forall x \in F, \quad (u_F)^n(x) = u^n(x) = 0_E.$$

Ainsi,  $u_F$  est un endomorphisme nilpotent de  $F$  et en particulier

$$\operatorname{rg} u_F < \dim F = \operatorname{rg} v.$$

Par définition de l'image d'une application linéaire, un vecteur  $y$  appartient à  $\operatorname{Im} u_F$  si, et seulement si, il existe un vecteur  $x \in F$  tel que  $y = u_F(x) = u(x)$  c'est-à-dire, par définition du sous-espace  $F$ , s'il existe un vecteur  $x_0 \in E$  tel que

$$y = u(x) = u(v(x_0)) = (u \circ v)(x_0) = (v \circ u)(x_0)$$

(On rappelle que  $u$  et  $v$  commutent.) Autrement dit :

$$\operatorname{Im} u_F = \operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im}(v \circ u)$$

et en particulier

$$\operatorname{rg} u_F = \operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v \circ u).$$

On a ainsi démontré que

$$\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg} v.$$

▮ Par symétrie, on a également démontré que

$$\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v \circ u) < \operatorname{rg} u.$$

2. Considérons des endomorphismes nilpotents  $u_1, \dots, u_n$  de  $\mathbb{R}^n$  qui commutent deux à deux et la famille d'entiers naturels  $(d_k)_{1 \leq k \leq n}$  définie par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad d_k = \operatorname{rg}(u_1 \circ \dots \circ u_k).$$

✱ Pour tout entier  $1 \leq k \leq n$ , l'endomorphisme  $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_k$  est nilpotent :

$$(u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_k)^n = u_1^n \circ u_2^n \circ \dots \circ u_k^n = \omega$$

car les endomorphismes  $u_i$  commutent deux à deux et leurs indices de nilpotence respectifs sont tous majorés par  $n$  (= la dimension de l'espace vectoriel sur lequel ils agissent).

✱ Il est clair que  $d_1 = \operatorname{rg} u_1 < n$  et, d'après ce qui précède, pour tout  $1 \leq k < n$ , deux cas se présentent :

— ou bien l'endomorphisme  $v_k = u_1 \circ \dots \circ u_k$  est nul et, dans ce cas,

$$u_1 \circ \dots \circ u_n = u_1 \circ \dots \circ u_k \circ \dots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul ;

— ou bien  $v_k$  est un endomorphisme nilpotent non nul qui commute avec  $u_{k+1}$  et, dans ce cas,  $d_{k+1} < d_k$ .

Si l'endomorphisme  $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n$  n'était pas l'endomorphisme nul, alors on aurait une famille strictement décroissante de  $n$  entiers naturels strictement compris entre 0 et  $n$  :

$$0 < d_n < d_{n-1} < \dots < d_1 < n$$

ce qui est évidemment impossible.

La composée  $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n$  est donc l'endomorphisme nul.

**Solution 121****rms134-1400**

1. Considérons des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  tels que

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0_E \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i \in \text{Im } p_i.$$

Par hypothèse,  $p_i \in L(E)$  et  $p_i \circ p_i = p_i$ , donc  $p_i$  est un projecteur. Comme  $x_i \in \text{Im } p_i$ , on en déduit que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i = p_i(x_i)$$

et donc que

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \quad p_j(x_i) = (p_j \circ p_i)(x_i) = 0_E.$$

Par linéarité de  $p_j$ ,

$$0_E = p_j(0_E) = p_j\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n p_j(x_i) = x_j$$

pour tout  $1 \leq j \leq n$ .

On a ainsi démontré que les sous-espaces vectoriels  $\text{Im } p_j$  étaient en somme directe.

2. On a donc

$$\bigoplus_{j=1}^n \text{Im } p_j \subset E$$

et donc

$$\sum_{j=1}^n \text{rg } p_j \leq \dim E = n.$$

Par hypothèse, aucun des endomorphismes  $p_j$  n'est l'endomorphisme nul, donc

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \text{rg } p_j \geq 1.$$

On en déduit que

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{(\text{rg } p_j - 1)}_{\geq 0} \leq (n - n) = 0$$

et donc que

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \text{rg } p_j = 1.$$

**Solution 122****rms134-1402**

♣ Par hypothèse,  $AB \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  et  $BA \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ . De plus, il existe une matrice inversible  $P \in GL_3(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}(AB)P = \text{Diag}(0, 9, 9).$$

Autrement dit :  $(P^{-1}A)(BP) = \text{Diag}(0, 9, 9)$ . Comme

$$BA = (BP)(P^{-1}A),$$

quitte à remplacer  $A$  par  $P^{-1}A$  et  $B$  par  $BP$ , on peut donc supposer que le produit  $AB$  est égal à  $\text{Diag}(0, 9, 9)$  (et pas seulement semblable à cette matrice diagonale).

♣ Par hypothèse, il est clair que le rang de  $AB$  est égal à 2.

Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de ses lignes, ainsi qu'au nombre de ses colonnes. Par conséquent, les rangs de  $A$ ,  $B$  et  $BA$  sont tous inférieurs à 2.

♣ Comme  $\text{Im}(AB) \subset \text{Im } A$ , le rang de  $AB$  est inférieur au rang de  $A$ . On a donc :

$$2 = \text{rg}(AB) \leq \text{rg } A \leq 2$$

et donc  $\text{rg } A = 2$ . Comme  $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ , les deux colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes et le noyau de la matrice  $A$  est donc réduit au vecteur nul.

Il existe donc une matrice ligne  $L_0 \in \mathfrak{M}_{1,2}(\mathbb{R})$  et une matrice inversible  $A_0 \in GL_2(\mathbb{R})$  telles que

$$A = \begin{pmatrix} L_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de  $B$  est inférieur à 2 et le nombre de colonnes de  $B$  est égal à 3, donc la famille des colonnes de  $B$  est liée et le noyau de  $B$  n'est donc pas réduit au vecteur nul.

Si  $BX = 0$ , alors

$$0 = ABX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} X$$

et par conséquent

$$X \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le noyau de  $B$  n'est pas réduit au vecteur nul, on a donc démontré que

$$BX = 0 \iff X \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que le rang de  $B$  est égal à 2.

Il existe donc une matrice  $B_0 \in GL_2(\mathbb{R})$  telle que

$$B = \begin{pmatrix} 0_{2,1} & B_0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 0 & L_0 B_0 \\ 0_{2,1} & A_0 B_0 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = 0_{2,1} L_0 + B_0 A_0.$$

Autrement dit,

$$A_0 B_0 = 9I_2, \quad L_0 B_0 = 0_{1,2}, \quad BA = B_0 A_0.$$

Comme  $B_0$  est inversible, on en déduit que  $L_0 = 0_{1,2}$  et que  $A_0 = 9B_0^{-1}$ .

On a ainsi démontré que

$$BA = 9I_2$$

et en particulier que  $\text{rg}(BA) = 2$ .

### Solution 123

**rms134-1405**

1. Comme  $u$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous indique que

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u. \quad (35)$$

Par ailleurs, si le vecteur  $y$  appartient à  $\text{Ker } u \cap \text{Im } u$ , alors il existe un vecteur  $x$  tel que  $y = u(x)$  et  $u^2(x) = u(y) = 0_E$ . Or, par hypothèse,

$$0_E = u^3(x) + u(x) = u(u^2(x)) + u(x) = u(0_E) + y = y.$$

Donc  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont en somme directe et, d'après la relation (35) sur les dimensions,

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

Par hypothèse, le polynôme  $X^3 + X = X(X^2 + 1)$  est un polynôme annulateur de  $u$ . Comme  $X$  et  $X^2 + 1$  sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux nous donne

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + I). \quad (36)$$

On déduit de cette décomposition que

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Ker}(u^2 + I)$$

et de (35) que  $\dim \text{Ker}(u^2 + I) = \dim \text{Im } u$ .

Par ailleurs, pour tout vecteur  $y \in \text{Im } u$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$  et donc

$$(u^2 + I)(y) = u^3(x) + u(x) = 0_E$$

donc  $\text{Im } u \subset \text{Ker}(u^2 + I)$ .

Ayant démontré une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut conclure à l'égalité des sous-espaces vectoriels :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + I).$$

En appliquant le Théorème de décomposition des noyaux, on a obtenu

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + I).$$

Il faut alors résister à la tentation d'identifier  $\operatorname{Im} u$  et  $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$  : un sous-espace peut avoir une infinité de supplémentaires ! (Seul le supplémentaire orthogonal, quand il existe, est unique.)

2. Si  $u$  est injectif, alors  $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$  et par conséquent  $E = \operatorname{Ker}(u^2 + I)$ . On a donc

$$u^2 = -I$$

et en particulier

$$(\det u)^2 = -1$$

(puisque la dimension de  $E$  est *impaire*), ce qui est absurde (puisque  $\det u \in \mathbb{R}$ ).

On déduit de (35) que  $\operatorname{rg} u < 3$  et donc  $\operatorname{rg} u \leq 2$ .

Comme  $u$  n'est pas l'endomorphisme nul (par hypothèse), le sous-espace  $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$  n'est pas réduit au vecteur nul (d'après (36)) et il existe donc un vecteur  $x_0 \neq 0_E$  dans ce sous-espace.

La famille  $(x_0)$  est donc libre et, d'après le Théorème d'augmentation des familles libres, la famille  $(x_0, u(x_0))$  est liée si, et seulement si, le vecteur  $u(x_0)$  appartient au sous-espace engendré par  $x_0$  ; autrement dit, s'il existe un scalaire  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$u(x_0) = \alpha \cdot x_0.$$

En appliquant  $u$ , on en déduit que

$$u^2(x_0) = \alpha^2 \cdot x_0 \quad \text{et donc que} \quad \alpha^2 \cdot x_0 = -x_0$$

puisque  $x_0 \in \operatorname{Ker}(u^2 + I)$ . Comme  $x_0 \neq 0_E$ , on en déduit que  $\alpha^2 = -1$ , ce qui est impossible (puisque  $\alpha$  est réel).

Par conséquent, la famille  $(x_0, u(x_0))$  est libre. Comme  $x_0 \in \operatorname{Ker}(u^2 + I)$  et que  $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$  est un sous-espace stable par  $u$ , on a justifié que cet espace contenait une famille libre de deux vecteurs.

Quel que soit le polynôme  $P$ , les sous-espaces vectoriels  $\operatorname{Ker} P(u)$  et  $\operatorname{Im} P(u)$  sont stables par  $u$ .

Ainsi,

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker}(u^2 + I) \geq 2.$$

Finalement, on a démontré que

$$\operatorname{rg} u = 2 \quad \text{et que} \quad \dim \operatorname{Ker} u = 1$$

d'après (35).

On peut aboutir au résultat en étudiant le polynôme caractéristique de  $u$ .

On connaît un polynôme annulateur de  $u$  :  $X(X^2 + 1)$ . Le polynôme minimal de  $u$  est un polynôme unitaire, non constant, qui divise tous les polynômes annulateurs. Comme  $u$  n'est pas l'endomorphisme nul, on en déduit que le polynôme minimal de  $u$  est égal à  $(X^2 + 1)$  ou à  $X(X^2 + 1)$ .

Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré 3 (la dimension de  $E$ ) et possède les mêmes facteurs irréductibles que le polynôme minimal (ce dernier point est au programme lorsque le polynôme minimal est scindé mais pas dans le cas général).

Par conséquent, le polynôme caractéristique est de la forme

$$(X^2 + 1)^m \quad \text{ou} \quad X^{m_1}(X^2 + 1)^{m_2}$$

où les entiers  $m$ ,  $m_1$  et  $m_2$  sont au moins égaux à 1. Comme le degré est égal à 3, la seule possibilité est  $X(X^2 + 1)$ .

Comme 0 est une racine simple du polynôme caractéristique, la dimension du noyau est égale à 1 et le rang est donc égal à 2 (35).

3. Comme  $\dim \operatorname{Ker} u = 1$ , on peut choisir un vecteur  $e_1$  qui dirige  $\operatorname{Ker} u$ .

On choisit ensuite un vecteur  $e_2$ , non nul, dans  $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$ . On a justifié plus haut que le couple  $(e_2, e_3) = (e_2, u(e_2))$  était alors une famille libre de deux vecteurs de  $\operatorname{Ker}(u^2 + I)$ . Comme ce sous-espace est un plan, on a donc trouvé une base !

On dispose ainsi

— d'un vecteur directeur de  $\operatorname{Ker} u$

— et d'une base de  $\text{Ker}(u^2 + I)$ .

Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans  $E$ , on en déduit que la famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est bien une base de  $E$ .

Par choix de  $e_1$ , on a  $u(e_1) = 0_E$ .

Par choix de  $e_3$ , on a  $u(e_2) = e_3$  et comme  $e_2 \in \text{Ker}(u^2 + I)$ , on a

$$u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2.$$

Donc la matrice de  $u$  relative à cette base est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▮ Pour bien comprendre la question posée, il faut d'abord lire la matrice  $A$  comme il convient ! Cette matrice est diagonale par blocs :

$$A = \text{Diag}(A_0, A_1)$$

avec  $A_0 = (0) \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$  et

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}).$$

Cela doit alors faire penser à une décomposition de  $E$  en somme directe de deux sous-espaces vectoriels (une droite et un plan) stables par  $u$  et donc à une base de  $E$  adaptée à la décomposition (36).

#### Solution 124

**rms134-1409**

1. La matrice  $A$  est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Elle admet donc 0 pour seule valeur propre et, si elle était diagonalisable, alors elle serait semblable à  $\text{Diag}(0, 0, 0)$ , donc on aurait  $A = 0_3$ .

La matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable.

2. On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = 0_3.$$

Par conséquent,  $B^6 = A^3 = 0_3$  et  $B$  admet  $X^6$  pour polynôme annulateur.

Comme  $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ , son polynôme minimal est un diviseur unitaire de  $X^6$  dont le degré est compris entre 1 et 3 (au sens large). Il y a donc trois possibilités :

- si le polynôme minimal de  $B$  est  $X$ , alors  $B = 0_3$  et  $A = B^2 = 0_3$  : impossible !
- si le polynôme minimal de  $B$  est  $X^2$ , alors  $B^2 = 0_3$  et  $A^2 = B^4 = 0_3$  : impossible !
- si le polynôme minimal de  $B$  est  $X^3$ , alors  $B^3 = 0_3$  et

$$A^2 = B^4 = B^3 \cdot B = 0_3$$

ce qui est impossible aussi.

Bref, rien ne va. Par conséquent, notre hypothèse initiale est fausse et il n'existe pas de matrice  $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$ .

3. Notons  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté par la matrice  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ . On a donc

$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_2.$$

**Analyse** — S'il existe une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $C$ , alors il faut que

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = 0, \quad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1.$$

**Synthèse** — La famille  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_2, e_1, e_3)$  est une base (permutation des vecteurs de la base canonique) et la matrice de  $f$  dans cette base est bien égale à  $C$ .

Les matrices  $A$  et  $C$  sont donc semblables.

**Solution 125****rms134-1422**

La matrice  $M$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  :

$$X^n - 1 = \prod_{0 \leq k < n} (X - e^{i2k\pi/n})$$

donc elle est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et son polynôme caractéristique est un polynôme de degré 2, lui aussi scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ , dont les racines (= les valeurs propres complexes de  $M$ ) sont des racines de  $X^n - 1$ , c'est-à-dire des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

Comme la matrice  $M$  est à coefficients entiers, son polynôme caractéristique est lui aussi à coefficients entiers et donc réels. Trois cas se présentent donc :

- ou bien le polynôme caractéristique admet une racine réelle double (1 ou  $-1$ ) et, comme  $M$  est diagonalisable,  $M = \pm I_2$ , donc  $M^2 = I_2$  et a fortiori  $M^{12} = I_2$  ;
- ou bien le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes (1 et  $-1$ ) et, comme  $M$  est diagonalisable,  $M$  est semblable à la matrice de symétrie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc  $M^2 = I_2$  et, une fois encore,  $M^{12} = I_2$  ;

- ou bien le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

$$\zeta = e^{i2k\pi/n} \quad \text{et} \quad \bar{\zeta} = e^{-i2k\pi/n}$$

si bien que

$$\chi = (X - \zeta)(X - \bar{\zeta}) = X^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} X + 1$$

et la matrice  $M$  est alors semblable à la matrice diagonale  $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}$ .

▮ Pour bien comprendre la discussion suivante, il faut se rappeler que l'ensemble  $\mathbb{U}_m$  des racines  $m$ -ièmes de l'unité est contenu dans l'ensemble  $\mathbb{U}_n$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité si, et seulement si,  $m$  divise  $n$ .

Dans ce dernier cas, comme le polynôme caractéristique est à coefficients entiers, il faut que les entiers  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $0 \leq k < n$  vérifient la condition

$$2 \cos \frac{2k\pi}{n} \in \mathbb{Z}$$

c'est-à-dire

$$\cos \frac{2k\pi}{n} \in \{0, \pm 1/2, \pm 1\}.$$

Si ce cosinus est égal à 0, alors  $\frac{2k\pi}{n} = \pi/2$  et les racines du polynôme caractéristique sont  $\pm i \in \mathbb{U}_4 \subset \mathbb{U}_{12}$ .

Si ce cosinus est égal à  $\pm 1/2$ , alors  $\frac{2k\pi}{n} = \pi/3$  ou  $2\pi/3$  et les racines du polynôme caractéristiques sont  $e^{\pm i\pi/3}$  (qui appartiennent à  $\mathbb{U}_6$  et donc à  $\mathbb{U}_{12}$ ) ou  $e^{\pm i2\pi/3}$  (racines cubiques de l'unité, qui appartiennent aussi à  $\mathbb{U}_{12}$ ).

Enfin, si ce cosinus est égal à  $\pm 1$ , alors  $\frac{2k\pi}{n} = 0$  ou  $\pi$  et, dans ce cas, les racines sont réelles :  $\pm 1$  et appartiennent à  $\mathbb{U}_{12}$ .

Dans tous les cas, la matrice  $M$  est semblable à la matrice diagonale  $\text{Diag}(\zeta, \bar{\zeta})$  et la matrice  $M^{12}$  à

$$\begin{pmatrix} \zeta^{12} & 0 \\ 0 & \bar{\zeta}^{12} \end{pmatrix} = I_2$$

(puisqu'il est  $\zeta$  et  $\bar{\zeta}$  sont nécessairement des racines douzièmes de l'unité.

Seule la matrice  $I_2$  est semblable à  $I_2$ , donc  $M^{12} = I_2$ .

**Solution 126****rms134-1423**

1. La propriété à établir est évidente pour  $P = 1$  et pour  $P = X$ .  
Si elle est vraie pour  $P = X^k$ , alors

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B^k B \stackrel{\text{HR}}{=} \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La propriété est donc démontrée (par récurrence) pour  $P = X^k$ , quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

on a

$$XP' = \sum_{k=0}^d a_k k X^k$$

et le résultat est ainsi établi par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. Supposons que  $B$  soit diagonalisable. Alors le polynôme minimal  $P$  de  $B$  est scindé, à racines (réelles!) simples.

D'après la formule précédente, il faut donc que  $P$  et  $XP'$  soient des polynômes annulateurs de  $A$ . Les valeurs propres de  $A$  doivent donc être des racines de  $P$ , mais aussi des racines de  $XP'$ .

Comme  $P$  n'a que des racines simples, aucune racine de  $P$  n'est racine de  $P'$ . Par conséquent, il faut que toutes les racines de  $P$  soient aussi racines de  $X$  et  $P$  n'admet donc qu'une seule racine : 0 et il s'agit d'une racine simple.

Donc le polynôme minimal de  $B$  est égal  $X$  et  $B = 0_{2n}$ .

- Réciproquement, si  $A = 0_n$ , alors  $B = 0_{2n}$  est évidemment diagonalisable!
- En conclusion, la matrice  $B$  est diagonalisable si, et seulement si, la matrice  $A$  est nulle.

### Solution 127

rms134-1431

1. En tant que matrice à coefficients complexes, la matrice  $M$  est trigonalisable. Si elle admet deux valeurs propres distinctes, alors elle est même diagonalisable. D'après le cours, la matrice  $A = \exp(M)$  serait alors diagonalisable.

Mais la matrice  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre (elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous égaux). Par conséquent, si la matrice  $A$  était diagonalisable, elle serait en fait diagonale — et ce n'est clairement pas le cas!

La matrice  $M$  admet donc une seule valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

D'après le cours,  $e^\lambda$  est une valeur propre de  $\exp(M) = A$ , donc  $e^\lambda = -1$ . Par conséquent, il existe un entier impair  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\operatorname{Sp}(M) = \{i k \pi\}.$$

2. Comme  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  n'admet qu'une seule valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ , son polynôme caractéristique est égal à  $(X - \lambda)^2$  et, pour les raisons expliquées plus haut, son polynôme minimal est lui aussi égal à  $(X - \lambda)^2$ .

✎ Le polynôme minimal est un diviseur unitaire non constant du polynôme caractéristique. Il n'y a donc que deux possibilités :  $(X - \lambda)$  et  $(X - \lambda)^2$ . Comme  $M \neq \lambda I_2$ , le polynôme minimal est égal à  $(X - \lambda)^2$ .

En posant  $N = M - \lambda I_2$ , on a une matrice nilpotente d'indice 2 :

$$N \neq 0_2, \quad N^2 = 0_2$$

telle que  $M = \lambda I_2 + N$ . Comme  $N$  et  $I_2$  commutent, on déduit de la formule du binôme que

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \lambda^{k-\ell} N^\ell \\ &= \lambda^k I_2 + k \lambda^{k-1} N. \end{aligned} \quad (\text{car } N^2 = 0_2)$$

Par conséquent,

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} I_2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \lambda^{k-1}}{k!} N = e^\lambda I_2 + e^\lambda N.$$

Comme  $\exp(M) = A$ , on en déduit que  $e^\lambda = -1$  (ce qui confirme le résultat démontré précédemment) et que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien démontré que la matrice  $M$  était triangulaire :

$$M = \lambda I_2 + N = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. Comme on vient de le voir, la matrice  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  vérifie  $\exp(M) = A$  si, et seulement si, il existe un complexe  $\lambda$  tel que

$$e^\lambda = -1 \quad \text{et} \quad M = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre complexe  $\lambda$  vérifie  $e^\lambda = -1$  si, et seulement si, il existe un entier  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $\lambda = (2p+1)i\pi$ . Donc la matrice  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$  vérifie  $\exp(M) = A$  si, et seulement si, il existe un entier  $p \in \mathbb{Z}$  tel que

$$M = \begin{pmatrix} (2p+1)i\pi & -1 \\ 0 & (2p+1)i\pi \end{pmatrix}.$$

### Solution 128

rms134-1436-1566

✎ L'hypothèse sur les normes signifie que l'application linéaire  $f$  est continue et que  $\|f\| \leq 1$ . On en déduit par récurrence que

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f^n(u)\| \leq \|u\|$$

et donc que  $\|f^n\| \leq 1$ .

1. Comme  $x \in \text{Im}(f - I)$ , il existe bien  $y \in E$  tel que  $x = f(y) - y$ .  
Comme de plus  $x \in \text{Ker}(f - I)$ , alors  $f(x) = x$ , donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x = f^k(x) = f^k(f(y) - y) = f^{k+1}(y) - f^k(y).$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \cdot x = \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(y) - f^k(y) = f^n(y) - y$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x = \frac{1}{n} \cdot (f^n(y) - y).$$

2. On en déduit en particulier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x\| \leq \frac{\|f^n(y)\| + \|y\|}{n} \leq \frac{2\|y\|}{n}.$$

Cette propriété étant vraie pour tout entier  $n \geq 1$ , on en déduit par passage à la limite que  $x = 0_E$ .

✎ Nous venons de montrer que les deux sous-espaces vectoriels

$$\text{Ker}(f - I) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - I)$$

sont en somme directe. Comme  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie et que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , on déduit du théorème du rang que

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f - I) + \dim \text{Im}(f - I)$$

et donc que

$$E = \text{Ker}(f - I) \oplus \text{Im}(f - I).$$

3. Soit  $x \in E$ . D'après la première question, il existe deux vecteurs

$$x_1 \in \text{Ker}(f - I) \quad \text{et} \quad x_2 \in \text{Im}(f - I)$$

tels que  $x = x_1 + x_2$ . On a donc  $f(x_1) = x_1$  et il existe un vecteur  $y_2 \in E$  tel que  $x_2 = f(y_2) - y_2$ . On vérifie par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(x) = x_1 + f^k(x_2) = x_1 + f^{k+1}(y_2) - f^k(y_2).$$

Par conséquent,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad v_p(x) = x_1 + \frac{1}{p+1} \cdot (f^{p+1}(y_2) - y_2).$$

On en déduit que, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \|v_p(x) - x_1\| &= \frac{1}{p+1} \|f^{p+1}(y_2) - y_2\| \\ &\leq \frac{1}{p+1} (\|f^{p+1}(y_2)\| + \|y_2\|) \\ &\leq \frac{2}{p+1} \|y\|_2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p(x) = x_1$$

où  $x_1$  est le projeté de  $x$  sur  $\text{Ker}(f - I)$  parallèlement à  $\text{Im}(f - I)$ .

☞ *Ce qui précède est vraie pour n'importe quel espace vectoriel normé de dimension finie, que la norme soit associée à un produit scalaire ou pas...*

### Complément

☛ On a utilisé (deux fois!) plus haut que, pour tout vecteur  $x_2 \in \text{Im}(f - I)$ , il existait un vecteur  $y_2 \in E$  tel que  $x_2 = f(y_2) - y_2$ . Bien entendu, un tel vecteur  $y_2$  n'est pas unique!

$$f(y_2) - y_2 = f(y'_2) - y'_2 \iff y'_2 - y_2 \in \text{Ker}(f - I)$$

Comme  $E$  est un espace euclidien,

$$E = \text{Ker}(f - I) \oplus [\text{Ker}(f - I)]^\perp$$

et la projection orthogonale  $\pi_2$  sur  $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$  est bien définie.

Si  $y_2 \in E$  vérifie  $f(y_2) - y_2 = x_2$ , alors on pose  $y'_2 = \pi_2(y_2)$  et on a donc

$$y_2 = y'_2 + \underbrace{[y_2 - y'_2]}_{\in \text{Ker}(f - I)}$$

ce qui prouve que  $f(y'_2) - y'_2 = x_2$ . Il existe donc un vecteur  $y'_2 \in [\text{Ker}(f - I)]^\perp$  tel que  $x_2 = f(y'_2) - y'_2$ .

☞ *Après avoir analysé la situation, nous passons à la synthèse.*

☛ Considérons l'application linéaire

$$\varphi : [\text{Ker}(f - I)]^\perp \rightarrow \text{Im}(f - I)$$

définie par

$$\forall y \in [\text{Ker}(f - I)]^\perp, \quad \varphi(y) = f(y) - y.$$

D'après l'analyse qui précède, cette application linéaire est surjective. De plus, cette application est injective :

$$y \in \text{Ker } \varphi \iff y \in [\text{Ker}(f - I)]^\perp \cap \text{Ker}(f - I) = \{0_E\}.$$

L'application  $\varphi$  est donc un isomorphisme de  $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$  sur  $\text{Im}(f - I)$ .

☛ Comme  $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$  est un espace vectoriel de dimension finie, sa sphère unité  $S$  est compacte (elle est fermée et bornée) et l'application linéaire  $\varphi$  est continue. L'application numérique  $\|\varphi\|$  est donc bornée et atteint ses bornes sur  $S$ .

Comme l'application linéaire  $\varphi$  est injective et que le vecteur nul n'appartient pas à  $S$ , l'application  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $S$  et l'application  $\|\varphi\|$  ne prend que des valeurs strictement positives sur  $S$ .

Il existe donc deux réels strictement positifs  $\alpha$  et  $\beta$  et deux vecteurs unitaires  $y_m$  et  $y_M$  de  $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$  tels que

$$\forall y \in S, \quad 0 < \alpha = \|\varphi(y_m)\| \leq \|\varphi(y)\| \leq \|\varphi(y_M)\| = \beta.$$

☞ *Les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement le minimum et le maximum atteint par l'application*

$$\|\varphi\| : [\text{Ker}(f - I)]^\perp \rightarrow \mathbb{R}$$

*sur la sphère unité de  $[\text{Ker}(f - I)]^\perp$ .*

On en déduit (par linéarité de  $\varphi$  et homogénéité de la norme) que

$$\forall y \in [\text{Ker}(f - I)]^\perp, \quad \alpha\|y\| \leq \|\varphi(y)\| \leq \beta\|y\|$$

et donc (puisque  $\varphi$  est un isomorphisme) que

$$\forall x \in \text{Im}(f - I), \quad \frac{1}{\beta}\|x\| \leq \|\varphi^{-1}(x)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|.$$

☛ Notons  $\pi$ , la projection sur  $\text{Ker}(f - I)$  parallèlement à  $\text{Im}(f - I)$ . On sait que  $I - \pi$  est la projection sur  $\text{Im}(f - I)$  parallèlement à  $\text{Ker}(f - I)$  et, comme  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, on sait que ces deux endomorphismes de  $E$  sont des applications linéaires continues.

On a démontré dans l'exercice que la suite d'applications linéaires  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeait simplement sur E vers la projection  $\pi$ .

On a démontré plus haut que

$$v_p(x) = \pi(x) + \frac{1}{p+1} \cdot (f^{p+1} - I)(\varphi^{-1} \circ (I - \pi)(x))$$

pour tout  $x \in E$ . On a donc

$$v_p = \pi + \frac{1}{p+1} \cdot (f^{p+1} - I) \circ \varphi^{-1} \circ (I - \pi)$$

et par conséquent, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|v_p - \pi\| &\leq \frac{1}{p+1} \cdot \|f^{p+1} - I\| \|\varphi^{-1}\| \|I - \pi\| \\ &\leq \frac{1}{p+1} \cdot (\|f^{p+1}\| + \|I\|) \|\varphi^{-1}\| \|I - \pi\| \\ &\leq \frac{2}{p+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \|I - \pi\|. \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v_p - \pi\| = 0$$

ou, autrement dit, que la suite d'applications linéaires  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur la sphère unité de E vers la projection  $\pi$ .

### Solution 129

rms134-1553

1. Le polynôme

$$P_0 = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

est un polynôme annulateur de  $u$  et 0 n'est pas une racine de  $P_0$ . Donc 0 n'est pas une valeur propre de  $u$  et comme  $E$  est un espace de dimension finie,  $u$  est un automorphisme de  $E$ .

*Variante : puisque  $P_0$  est un polynôme annulateur de  $u$ ,*

$$u \circ (3u^2 - u - I) = (3u^2 - u - I) \circ u = I$$

*donc l'endomorphisme  $u$  est inversible, d'inverse*

$$3u^2 - u - I.$$

*NB : Cette variante ne suppose pas que  $E$  soit un espace vectoriel de dimension finie !*

2. Le degré du polynôme minimal de  $u$  est inférieur à  $\deg P_0 = 3$ , donc

$$\mathbb{K}[u] = \text{Vect}(I, u, u^2)$$

et en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^n \in \text{Vect}(I, u, u^2).$$

*Il y a unicité de la décomposition de  $u^n$  si, et seulement si, la famille  $(I, u, u^2)$  est libre, c'est-à-dire si le polynôme minimal de  $u$  est le polynôme unitaire associé à  $P_0$ .*

3. Il est clair que 1 est une racine de  $P_0$ . On trouve alors

$$P_0 = (X - 1)(3X^2 + 2X + 1).$$

Le discriminant réduit de  $3X^2 + 2X + 1$  est égal à  $-2$ , donc ce polynôme est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $P_0$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}[X]$ , mais n'est pas scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ .

On distingue donc trois cas :

- si  $u = I$ , alors  $u$  est diagonalisable ;
- si  $u \neq I$  et si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors le polynôme minimal  $\mu$  de  $u$  est un diviseur de  $P_0$  (à coefficients réels) et n'est pas égal à  $(X - 1)$ , donc

$$\mu = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} = (X - 1)\left(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right)$$

et  $u$  n'est pas diagonalisable (car  $\mu$  n'est pas scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ ) ;

- si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors le polynôme annulateur  $P_0$  est scindé à racines simples (une racine réelle et deux racines complexes conjuguées) et  $u$  est donc diagonalisable.

**Solution 130****rms135-1403**

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  commutent avec toutes les matrices de rang 1, alors  $M$  commute en particulier avec les matrices  $E_{i,j}$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

• On doit se rappeler que

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n [M]_{k,\ell} \cdot E_{k,\ell} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n [M]_{k,\ell} \cdot E_k \cdot E_\ell^\top.$$

On en déduit que

$$ME_{i,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n [M]_{k,\ell} \cdot E_k \cdot E_\ell^\top \cdot E_i \cdot E_j^\top = \sum_{k=1}^n [M]_{k,i} \cdot E_{k,j}.$$

Le produit  $ME_{i,j}$  est donc la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la  $j$ -ème colonne qui est égale à la  $i$ -ème colonne de  $M$ .

De même,

$$E_{i,j}M = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n [M]_{k,\ell} \cdot E_i \cdot E_j^\top \cdot E_k \cdot E_\ell^\top = \sum_{\ell=1}^n [M]_{j,\ell} \cdot E_{i,\ell}.$$

Le produit  $E_{i,j}M$  est donc la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la  $i$ -ème ligne qui est égale à la  $j$ -ème ligne de  $M$ .

• Puisque  $ME_{i,j} = E_{i,j}M$ , alors les coefficients situés à l'intersection de la  $j$ -ème colonne et de la  $i$ -ème ligne sont égaux :

$$[M]_{i,i} = [M]_{j,j}.$$

Les autres coefficients de la  $j$ -ème colonne de  $ME_{i,j}$  sont nuls (puisque ceux de  $E_{i,j}M$  sont nuls) :

$$\forall k \neq i, \quad [M]_{k,i} = 0$$

et, de même, les autres coefficients de la  $i$ -ème ligne de  $E_{i,j}M$  sont nuls (puisque ceux de  $ME_{i,j}$  sont nuls) :

$$\forall \ell \neq j, \quad [M]_{j,\ell} = 0.$$

• Il existe donc un scalaire  $\lambda$  tel que  $[M]_{i,i} = \lambda$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et on a démontré que, nécessairement, la matrice  $M$  est égale à  $\lambda I_n$ .

Réciproquement, quel que soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , la matrice  $\lambda I_n$  commute à toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (et pas seulement aux matrices de rang 1).

• **Variante géométrique.**

Considérons un endomorphisme  $f$  de  $E$  qui commute à tous les endomorphismes de rang 1.

Pour tout vecteur  $x \neq 0_E$ , on note  $\pi_x$ , une projection sur la droite  $\mathbb{K} \cdot x$ .

• Il y a autant de projections sur la droite  $\mathbb{K} \cdot x$  qu'il y a de sous-espaces vectoriels  $G$  de  $E$  tels que  $E = \mathbb{K} \cdot x \oplus G$ . Comme  $E$  est un espace de dimension finie, le Théorème de la base incomplète nous assure qu'il existe au moins une projection sur  $\mathbb{K} \cdot x$ .

Le rang d'une projection est la dimension du sous-espace fixe, donc  $\text{rg } \pi_x = 1$ . Par hypothèse sur  $f$ ,

$$(f \circ \pi_x)(x) = (\pi_x \circ f)(x).$$

Or  $\pi_x(x) = x$  (puisque  $x$  appartient à l'image du projecteur  $\pi_x$ ) et  $(\pi_x \circ f)(x) \in \text{Im } \pi_x$  (par définition de l'image). Par conséquent,

$$f(x) \in \mathbb{K} \cdot x$$

et, comme le vecteur  $x$  n'est pas nul, on en déduit que  $x$  est un vecteur propre de  $f$ .

On a donc démontré que **tout vecteur non nul de  $E$  est un vecteur propre de  $f$ .**

• La suite est un exercice archi-classique.

• Si  $x$  et  $y$  sont des vecteurs propres de  $f$  associés à des valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$ , alors le couple  $(x, y)$  est une famille libre et

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda \cdot x + \mu \cdot y.$$

Comme  $(x, y)$  est libre, la somme  $x + y$  n'est pas nulle, donc c'est aussi un vecteur propre de  $f$  : il existe un scalaire  $\alpha$  tel que

$$f(x + y) = \alpha \cdot (x + y).$$

On en déduit que

$$(\lambda - \alpha) \cdot x + (\mu - \alpha) \cdot y = 0_E$$

et donc que  $\lambda = \alpha = \mu$  (famille libre!), ce qui est contradictoire.

On a ainsi démontré que tous les vecteurs non nuls de  $E$  sont des vecteurs propres de  $f$  associés à une même valeur propre. Autrement dit,  $f$  est une homothétie.

**Solution 131****rms135-1404**

Considérons les colonnes  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  définies par

$$X^T = (\cos 1 \quad \cos 2 \quad \cdots \quad \cos n) \quad \text{et} \quad Y^T = (\sin 1 \quad \sin 2 \quad \cdots \quad \sin n).$$

Comme  $a_{i,j} = \sin i \cos j + \cos i \sin j$ , la  $j$ -colonne de  $A$  est égale à  $\sin j \cdot X + \cos j \cdot Y$  et toutes les colonnes de  $A$  sont donc des combinaisons linéaires de  $X$  et  $Y$ . Par conséquent, le rang de  $A$  est inférieur à 2.

✚ Le déterminant de la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

est égal à  $\sin 2 \sin 4 - \sin 3 \sin 3 = \frac{(\cos 2 - \cos 6) - (1 - \cos 6)}{2} = \frac{\cos 2 - 1}{2} \neq 0$ , donc le rang de  $A_2$  est égal à 2 et le rang de  $A$  est supérieur à 2.

✚ *Le rang d'une matrice est supérieur ou égal à  $r$  si, et seulement si, il existe au moins un mineur d'ordre  $r$  non nul. Le déterminant de la matrice  $A_2$  est un mineur principal d'ordre 2, non nul, de  $A$ .*

✚ On a ainsi démontré que  $\text{rg } A = 2$  pour tout entier  $n \geq 2$ ; que  $\det A = \frac{\cos 2 - 1}{2}$  pour  $n = 2$  et  $\det A = 0$  pour tout  $n \geq 3$ .

**Solution 132****rms135-1405**

Pour y voir plus clair :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^3 \\ & g & f \end{array}$$

✚ D'une part,  $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im } f$ , donc  $2 \leq \text{rg } f$  et d'autre part,  $\text{rg } f \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ , donc  $\text{rg } f = 2$ .

✚ *Le rang d'une application linéaire de  $E$  dans  $F$  est majoré à la fois par la dimension de  $E$  et par la dimension de  $F$ . De même, le rang d'une matrice est majoré à la fois par le nombre de ligne et par le nombre de colonnes de la matrice.*

✚ D'une part,  $\text{Im } g \subset \mathbb{R}^2$ , donc  $\text{rg } g \leq 2$  et d'autre part,  $2 = \text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg } g$ , donc  $\text{rg } g = 2$ .

✚ *Considérons plus généralement deux applications linéaires  $\varphi : E \rightarrow F$  et  $\psi : F \rightarrow G$ .*

*Si le rang de  $\psi \circ \varphi$  est égal à  $r$ , alors il existe une famille  $(e_k)_{1 \leq k \leq r}$  de vecteurs de  $E$  telle que  $((\psi \circ \varphi)(e_1), \dots, (\psi \circ \varphi)(e_r))$  soit une base de  $\text{Im}(\psi \circ \varphi)$ . Comme cette famille est libre, on en déduit que les deux familles  $(e_k)_{1 \leq k \leq r}$  et  $(\varphi(e_k))_{1 \leq k \leq r}$  sont libres elle aussi. Par conséquent, l'image de  $\varphi$  contient une famille libre de cardinal  $r$  et le rang de  $\varphi$  est au moins égal à  $r$ .*

*Plus précisément, le rang de  $\varphi$  est égal à  $r$  si, et seulement si, la restriction de  $\psi$  à  $\text{Im } \varphi$  est injective.*

**Solution 133****rms135-1407**

1. Cf. Cours.

Deux possibilités :

— Considérer le polynôme minimal, en déduire le polynôme caractéristique et conclure avec le Théorème de Cayley-Hamilton.

— Considérer les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } u^k$  et vérifier que  $\dim \text{Ker } u^k < \dim \text{Ker } u^{k+1}$  tant que  $\text{Ker } u^k \neq E$ .

2. Cf. Cours.

Il existe un vecteur  $x_0$  tel que  $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ . La famille

$$\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

est alors une base de  $E$  et la matrice de  $u$  relative à  $\mathcal{B}$  est la matrice  $A$ .

3. Si  $X^2 = A$ , alors  $X^{2n} = A^n = 0_n$ , donc  $X^n = 0_n$  (d'après la première question).

✚ Discutons sur la parité de l'entier  $n$ .

— Si  $n = 2p$ , alors  $p < n$  et

$$A^p = X^{2p} = X^n = 0_n.$$

L'indice de nilpotence de  $A$  serait donc inférieur à  $p$ , ce qui contredit le fait que cet indice de nilpotence soit égal à  $n$ .

— Si  $n = 2p + 1$  avec  $n \geq 3$ , alors  $p \geq 1$  et donc  $p + 1 < n$ . On en déduit que

$$A^{p+1} = X^{2p+2} = X^{n+1} = X^n \cdot X = 0_n.$$

Ainsi l'indice de nilpotence de  $A$  serait inférieur à  $p + 1$  et donc strictement inférieur à  $n$  : nouvelle contradiction.

✚ Quel que soit  $n \geq 2$ , l'équation  $X^2 = A$  n'a donc aucune solution.

**Solution 134****rms135-1409**

1. On reconnaît une matrice bien connue et on en déduit que les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifient  $P^{-1}AP = D$ .

2. a. Sans surprise,

$$\Delta^2 + \Delta = P^{-1}(X^2 + X)P = P^{-1}AP = D.$$

2. b. D'après la question précédente,  $D$  est un polynôme en  $\Delta$ , donc  $D$  et  $\Delta$  commutent.

♣ Restons élémentaires et posons

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{ce qui donne} \quad D\Delta = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta D = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $D$  et  $\Delta$  commutent si, et seulement si,  $b = c = 0$  (les réels  $a$  et  $d$  étant quelconques), c'est-à-dire si, et seulement si,  $\Delta$  est diagonale.

✎ On a travaillé matriciellement pour que le raisonnement soit aussi bref que possible. Mais il faut être conscient qu'il s'agit ici d'un cas particulier simple d'un résultat plus général : si  $M$  est une matrice diagonale avec  $n$  coefficients diagonaux deux à deux distincts, alors les matrices qui commutent à  $M$  sont les matrices diagonales.

Cette propriété peut se démontrer par un calcul matriciel direct (assez fastidieux) ou vectoriellement en introduisant un endomorphisme diagonalisable dont les sous-espaces propres sont des droites vectorielles (plus élégant).

3. Sachant que  $\Delta = \text{Diag}(a, d)$ , l'équation  $\Delta^2 + \Delta = D$  se traduit par  $a^2 + a = 2$ , c'est-à-dire  $a = 1$  ou  $a = -2$ , et par  $d^2 + d = 0$ , c'est-à-dire  $d = 0$  ou  $d = -1$ . Il y a donc quatre solutions pour  $\Delta$  :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui donnent quatre solutions pour  $X = P\Delta P^{-1}$ . Sachant que

$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

on en déduit que les quatre solutions pour  $X$  sont :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2}A, \quad P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A - I_2, \quad P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = -A, \quad P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = -\frac{1}{2}A - I_2. \quad (*)$$

✎ L'énoncé nous poussait à diagonaliser la matrice  $A$ , mais on peut s'en passer, il suffit de connaître un polynôme annulateur de  $A$  pour expliciter les solutions de l'équation.

♣ **Variante avec le polynôme minimal**

Comme  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  n'est pas une homothétie, son polynôme minimal est de degré 2, donc la dimension de la sous-algèbre  $\mathbb{R}[A]$  des polynômes en  $A$  est égale à 2 et par conséquent  $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_1[A]$ . Comme  $A^2 = 2A$ , le polynôme minimal de  $A$  est donc égal à  $X^2 - 2X = X(X - 2)$ .

De même, quelle que soit la matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , la sous-algèbre  $\mathbb{R}[M]$  est égale à  $\mathbb{R}_1[M]$  (puisque le degré du polynôme minimal de  $M$  est inférieur à 2) et si  $M^2 + M = A$ , alors  $A \in \mathbb{R}_1[M]$ . Comme  $\mathbb{R}_1[M]$  est une sous-algèbre, elle contient donc la sous-algèbre  $\mathbb{R}_1[A]$  engendrée par  $A$  et, par égalité des dimensions, on a donc :  $\mathbb{R}_1[M] = \mathbb{R}_1[A]$ . En particulier,  $M \in \mathbb{R}_1[A]$  et il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $M = \alpha I + \beta A$ .

On en déduit que

$$M^2 = \alpha^2 A^2 + 2\alpha\beta A + \beta^2 I = 2\alpha(\alpha + \beta)A + \beta^2 I$$

puisque  $A^2 = 2A$ . L'équation  $X^2 + X = A$  devient alors

$$\alpha(2\alpha + 2\beta + 1)A + \beta(\beta + 1)I = A = 1 \cdot A + 0 \cdot I.$$

Comme  $A$  n'est pas une homothétie, le couple  $(A, I)$  est une famille libre et l'équation  $X^2 + X = A$  est alors équivalente au système

$$\begin{cases} \alpha(2\alpha + 2\beta + 1) = 1 \\ \beta(\beta + 1) = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne  $\beta = 0$  et  $\alpha(2\alpha + 1) = 1$  d'une part et  $\beta = -1$  et  $\alpha(2\alpha - 1) = 1$  d'autre part. On a ainsi retrouvé les quatre solutions présentées plus haut (\*).

**Solution 135****rms135-1411**

Si  $p$  est un projecteur, alors on sait que

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p \quad \text{avec} \quad \text{Im } p = \text{Ker}(I - p) = \text{Ker}(p - I).$$

▮ Quels que soient l'application linéaire  $f$  et le scalaire non nul  $\lambda$ , le noyau de  $\lambda \cdot f$  est égal au noyau de  $f$  et l'image de  $\lambda \cdot f$  est égale à l'image de  $f$ . (On doit savoir poser sans hésitation les calculs qui justifient ces deux égalités.)

En particulier,

$$\dim E = \dim \text{Ker } p + \dim \text{Ker}(p - I) = [\dim E - \text{rg } p] + [\dim E - \text{rg}(p - \text{id})]$$

d'après le Théorème du rang et donc :  $\dim E = \text{rg } f + \text{rg}(f - I)$ .

♣ Réciproquement, les sous-espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker}(f - I)$  sont en somme directe, donc

$$\text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - I) \subset E.$$

▮ Les différents sous-espaces propres d'un endomorphisme sont toujours en somme directe (même s'ils ne sont pas tout à fait propres : cela vaut aussi, de façon évidente, pour  $\text{Ker}(f - \lambda I) = \{0_E\}$ ).

Plus généralement, si deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux, alors l'intersection des sous-espaces  $\text{Ker } P(f)$  et  $\text{Ker } Q(f)$  est réduite au vecteur nul. (Penser au Théorème de Bézout, évidemment !)

En raisonnant comme plus haut (avec le Théorème du rang), l'hypothèse  $\text{rg } f + \text{rg}(f - I) = \dim E$  se traduit par

$$\dim(\text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - I)) = \dim E \quad \text{et donc par} \quad \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - I) = E.$$

On distingue donc deux cas :

- si  $x \in \text{Ker } f$ , alors  $f(x) = 0_E$  et donc  $(f \circ f)(x) = 0_E = f(x)$  par linéarité de  $f$ ;
- si  $x \in \text{Ker}(f - I)$ , alors  $f(x) = x$  et donc  $(f \circ f)(x) = x = f(x)$ .

Dans les deux cas, on a obtenu  $(f \circ f)(x) = f(x)$ . Comme les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans  $E$ , on peut en déduire que  $(f \circ f)(x) = f(x)$  pour tout  $x \in E$ .

▮ **Attention, danger!** L'espace  $E$  n'est pas l'union des deux noyaux et pourtant il suffit de vérifier la propriété sur ces deux noyaux pour pouvoir affirmer que la propriété est vraie sur  $E$ .

♣ On sait bien qu'une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base : quelle que soit la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  de  $E$ , quels que soient les vecteurs  $u_1, \dots, u_p$  de  $F$ , il existe une, et une seule, application linéaire  $f$  telle que  $f(e_k) = u_k$  pour tout  $1 \leq k \leq p$ .

♣ On doit savoir de même qu'une application linéaire est caractérisée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$  ou, plus généralement, par ses restrictions aux sous-espaces vectoriels d'une décomposition de  $E$  en somme directe : quelle que soit la décomposition en somme directe

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r,$$

quelles que soient les applications linéaires  $f_k : E_k \rightarrow F$ , il existe une, et une seule, application linéaire  $f \in L(E, F)$  telle que

$$\forall 1 \leq k \leq r, \forall x \in E_k, \quad f(x) = f_k(x).$$

C'est la propriété d'unicité énoncée par ce théorème qui nous permet ici de conclure (et on a pris soin de rappeler que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker}(f - I)$  étaient supplémentaires dans  $E$  avant de conclure, ce qui est une manière de citer ce théorème de caractérisation).

**Solution 136****rms135-1412**

1. Comme  $x \in \text{Im } u$ , il existe un vecteur  $x_0 \in E$  tel que  $x = u(x_0)$  et d'après la relation de liaison

$$u^2(x) = u^3(x_0) = -u(x_0) = -x.$$

2. a. Le sous-espace  $\text{Im } u$  est stable par  $u$ , donc il existe bien un endomorphisme de  $\text{Im } u$  induit par restriction de  $u$ .

▮ Il faut bien comprendre qu'il n'y a pas d'autre raison à avancer que la stabilité du sous-espace.

2. b. Par définition,  $v : \text{Im } u \rightarrow \text{Im } u$  et  $v(x) = u(x)$  pour tout  $x \in \text{Im } u$ . D'après la première question,  $(v \circ v)(x) = u^2(x) = -x$  pour tout  $x \in \text{Im } u$ . Autrement dit,  $v \circ v = -I_{\text{Im } u}$ , ce qui prouve que  $v$  est un automorphisme de  $\text{Im } u$  et que  $v^{-1} = -v$ .

3. Par définition, si l'entier  $\text{rg } u$  est impair, alors la dimension du sous-espace  $\text{Im } u$  est impaire et le polynôme caractéristique de  $v \in L(\text{Im } u)$  est un polynôme à coefficients réels dont le degré est impair.

Un tel polynôme admet nécessairement une racine, donc  $v$  possède au moins une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

🔗 *L'existence d'une racine provient du Théorème des valeurs intermédiaires.*

On a remarqué que  $X^2 + 1$  était un polynôme annulateur de  $v$  et on sait que toute valeur propre de  $v$  est nécessairement une racine de tout polynôme annulateur de  $v$ .

Or  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X^2 + 1$  n'a pas de racine réelle, c'est donc absurde.

Le rang de  $v$  est donc pair.

♣ **Variante avec des matrices complexes**

Par hypothèse,  $X(X^2 + 1) = X(X + i)(X - i)$  est un polynôme annulateur scindé à racines simples (dans  $\mathbb{C}[X]$ !) pour la matrice  $A$  canoniquement associée à l'endomorphisme  $u$ . Il existe donc une matrice de passage  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  (à coefficients **complexes**) et une matrice diagonale à coefficients complexes

$$D = \text{Diag}(0, \dots, 0, i, \dots, i, -i, \dots, -i) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

telles que  $P^{-1}AP = D$ .

En particulier,  $A$  et  $D$  ont même polynôme caractéristique (ce sont deux matrices *semblables*) et comme  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , les coefficients de son polynôme caractéristique sont des nombres **réels**.

On en déduit que les multiplicités de  $\pm i$ , racines complexes conjuguées du polynôme  $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ , sont égales et cela prouve qu'il y a autant de coefficients diagonaux de  $D$  égaux à  $+i$  que de coefficients diagonaux de  $D$  égaux à  $-i$ .

Le nombre de coefficients diagonaux non nuls est donc pair et il s'agit du rang de  $D$ , c'est-à-dire du rang de  $A$  (deux matrices semblables ont même rang).

**Solution 137**

**rms135-1413**

1. a. Comme les endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent, le sous-espace  $\text{Im } u$  est stable par  $v$ . Par conséquent, il existe bien un endomorphisme  $w$  de  $\text{Im } u$  tel que

$$\forall x \in \text{Im } u, \quad w(x) = v(x).$$

1. b. Comme  $v$  est nilpotent, le polynôme  $X^n$  est un polynôme annulateur de  $v$  et donc aussi un polynôme annulateur de  $w$ .

🔗 *Si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$  est un polynôme annulateur de  $v$ , alors*

$$\forall x \in E, \quad P(v)(x) = \sum_{k=0}^d a_k v^k(x) = 0_E$$

*et en particulier*

$$\forall x \in \text{Im } u, \quad P(w)(x) = \sum_{k=0}^d a_k w^k(x) = \sum_{k=0}^d a_k v^k(x) = 0_E,$$

*donc  $P$  est aussi un polynôme annulateur de  $w$ .*

*Entre  $v$  et  $w$ , seul le quantificateur change!*

En particulier,  $w$  n'est pas injectif.

🔗 *Une composée d'applications injectives est injective. Par contraposition, si une puissance de  $w$  est identiquement nulle,  $w$  ne peut être injective.*

D'après le Théorème du rang (appliqué à  $w \in L(\text{Im } u)$ ), l'endomorphisme  $w$  n'est pas surjectif et donc  $\text{rg } w < \dim(\text{Im } u) = \text{rg } u$ .

Or, par définition de  $w$ ,

$$\begin{aligned} \forall y \in E, \quad y \in \text{Im } w &\iff \exists x \in \text{Im } u, \quad y = v(x) \\ &\iff \exists x_0 \in E, \quad y = v(u(x_0)) \\ &\iff y \in \text{Im}(v \circ u) \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\text{Im } w = \text{Im}(v \circ u)$ . Finalement,

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{rg } w < \text{rg } u.$$

2. Notons  $u_k$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $A_k$  et posons

$$v_1 = u_1 \quad \text{ainsi que} \quad \forall 1 \leq k < n, \quad v_{k+1} = v_k \circ u_{k+1}.$$

Comme les  $u_k$  sont nilpotents et commutent deux à deux, les endomorphismes  $v_k$  commutent deux à deux (par récurrence finie) et sont donc nilpotents :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad v_{k+1}^n = v_k^n \circ u_{k+1}^n = \omega_E \circ \omega_E = \omega_E.$$

D'après la question précédente,

$$\forall 1 \leq k < n, \quad \text{rg } v_{k+1} < \text{rg } v_k \quad \text{soit} \quad \text{rg } v_{k+1} \leq (\text{rg } v_k) - 1$$

(puisque'il s'agit d'**inégalité entre nombres entiers**).

Une nouvelle récurrence finie permet d'en déduire que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \text{rg } v_k \leq n - k$$

et en particulier que  $\text{rg } v_n \leq 0$ , c'est-à-dire

$$v_n = u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = \omega_E.$$

### Solution 138

rms135-1414

1. La matrice  $A$  est triangulaire, donc elle est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0.

La matrice  $A$  est donc inversible si, et seulement si,  $a \neq 0$ .

✎ Si la matrice  $A$  représente l'endomorphisme  $f$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , alors  $e_1$  (resp.  $e_2$ ) est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre 1 (resp. 2). Par conséquent, si  $A$  est inversible, alors  $f^{-1}(e_1) = e_1$  et  $f^{-1}(e_2) = \frac{1}{2} \cdot e_2$ .

✎ Si  $a \neq 0$ , l'inverse de  $A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1/2 & \beta \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

et le produit

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1/2 & \beta \\ 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nous donne  $\alpha = -1$  et  $\beta = 0$ .

2. Comme  $A$  est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc  $\text{Sp}(A) = \{1, 2, a\}$ .

On a remarqué plus que les colonnes  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$  sont des vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres 1 et 2.

✎ Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, pour chaque valeur propre  $\lambda$ , la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre (en tant que racine du polynôme caractéristique).

Par ailleurs, on sait que, pour toute valeur propre simple, la dimension du sous-espace propre est nécessairement égale à 1. Il suffit donc de poser les calculs pour les éventuelles valeurs propres de multiplicité supérieure à 2.

— Si  $a \notin \{1, 2\}$ , alors  $A$  est diagonalisable (comme toutes les matrices de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$  qui ont trois valeurs propres distinctes) et comme

$$A - aI_3 = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{la colonne} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix} \neq 0$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre  $a$ .

— Si  $a = 1$ , alors 1 est une valeur propre double et le rang de la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est strictement inférieure à la multiplicité de cette valeur propre et  $A$  n'est pas diagonalisable.

— Si  $a = 2$ , alors 2 est une valeur propre et le rang de la matrice

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 1, donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est égale à la multiplicité de cette valeur propre. L'autre valeur propre, égale à 1, est une valeur propre simple. Donc la matrice  $A$  est diagonalisable.

En conclusion, la matrice  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $a \neq 1$ . Plus précisément, on a démontré que, pour tout  $a \neq 1$ , la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}) \quad \text{donne} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Solution 139

rms135-1415

1. La matrice  $A$  est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.
2. Si  $x = 0$ , alors la première et la troisième colonnes de  $A$  sont proportionnelles, donc  $A$  n'est pas inversible.  
Si  $x \neq 0$ , alors les colonnes  $C_1$  et  $C_3$  ne sont pas proportionnelles, donc le couple  $(C_1, C_3)$  est une famille libre. De plus, la colonne  $C_2$  n'est pas engendrée par  $(C_1, C_3)$  (considérer la dernière ligne), donc la famille  $(C_1, C_3, C_2)$  est libre.

✎ À propos de l'augmentation d'une famille libre :

si  $(e_1, \dots, e_r)$  est une famille libre, alors la famille augmentée  $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1})$  est libre si, et seulement si,

$$e_{r+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

Attention ! Si la famille  $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1})$  est liée, l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres mais, en général, rien ne prouve que le dernier vecteur de la liste soit une combinaison linéaire des  $r$  premiers vecteurs !

✎ De manière analogue (diminution d'une famille génératrice) :

si  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r, e_{r+1})$ , alors la sous-famille  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$  si, et seulement si,

$$e_{r+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

Même remarque ! Si la famille  $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1})$  est liée, en retirant un vecteur convenable de cette famille, on obtient une famille diminuée qui engendre le même sous-espace vectoriel mais, en général, rien ne prouve qu'on puisse se passer du dernier vecteur de la famille. Ici aussi, il faut connaître une relation de liaison entre les  $e_k$  pour savoir de quel vecteur on peut se passer.

En conclusion, la matrice  $A$  est inversible si, et seulement si,  $x \neq 0$ .

✎ On peut aussi calculer  $\det A = -x$  pour conclure.

✎ La forme de la matrice  $A$  incite, pour une fois, à calculer la comatrice pour obtenir l'inverse de  $A$  :

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x \\ -1 & x & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad A^{-1} = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x \\ 1 & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

### Solution 140

rms135-1416

1. Par hypothèse,  $X^2$  est un polynôme annulateur unitaire de  $f$ . De plus,  $f \neq \omega_E$ , donc  $X$  n'est pas un polynôme annulateur de  $f$ .

Le polynôme minimal de  $f$  est un polynôme unitaire annulateur de  $f$  qui divise tous les polynômes annulateurs de  $f$ . Donc c'est un diviseur de  $X^2$  et ce n'est pas  $X$ . Le polynôme minimal de  $f$  est donc  $X^2$ .

✎ D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est divisible par le polynôme minimal et comme  $\dim E = 3$ , le degré du polynôme caractéristique est égal à 3. Le polynôme caractéristique de  $f$  est donc de la forme  $X^2(X - \lambda)$ .

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de  $f$  et toute valeur propre de  $f$  est aussi racine du polynôme minimal, donc  $\lambda = 0$ . Ainsi, le polynôme caractéristique de  $f$  est égal à  $X^3$ .

✎ Comme  $f \circ f = \omega_E$ , on sait que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$  et donc  $\text{rg } f \leq \dim \text{Ker } f$ . Par ailleurs,  $\text{rg } f \geq 1$  (puisque  $f \neq \omega_E$ ) et  $\text{rg } f + \dim \text{Ker } f = \dim E = 3$  (Théorème du rang), donc  $\text{rg } f = 1$ .

2. On sait que

$$\{0_E\} \subsetneq \text{Ker } f \subsetneq \text{Ker } f^2 = \mathbb{R}^3 \quad \text{avec} \quad \dim \text{Ker } f = 2.$$

Ainsi,  $\text{Ker } f$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ , espace de dimension finie, et il existe au moins un vecteur  $e_3$  tel que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \mathbb{R} \cdot e_3. \quad (\star)$$

Comme on sait, en fait, n'importe quel vecteur  $e_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } f$  dirige une droite supplémentaire de l'hyperplan  $\text{Ker } f$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Comme  $e_3 \notin \text{Ker } f$ , alors le vecteur  $e_1 = f(e_3)$  n'est pas nul. Mais  $f(e_1) = f^2(e_3) = 0_E$ , donc  $e_1$  est un vecteur non nul du plan  $\text{Ker } f$ . Il existe donc un vecteur  $e_2$  tel que

$$\text{Ker } f = \text{Vect}(e_1, e_2).$$

D'après  $(\star)$ , la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et comme

$$f(e_1) = f(e_2) = 0_E \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1, \quad \text{on a} \quad \mathfrak{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(f) = N \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. D'après ce qui précède, les deux matrices  $M_1$  et  $M_2$  sont semblables à la matrice  $N$ , donc elles sont semblables entre elles (relation d'équivalence).

4. Considérons deux matrices semblables  $A$  et  $B$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si  $B = P^{-1}AP$ , alors  $BX = P^{-1}APX$  pour toute matrice colonne  $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . L'application

$$[Y \mapsto P^{-1}Y]$$

est un automorphisme de  $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  (dont la réciproque est  $[Y \mapsto PY]$ ) et

$$\forall Y \in \text{Im } A, \exists X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad P^{-1}Y = P^{-1}(AX) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X) = B(\dots) \in \text{Im } B$$

$$\forall Y \in \text{Im } B, \exists X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad PY = P(BX) = (PBP^{-1})(PX) = A(\dots) \in \text{Im } A.$$

Ces calculs montrent que l'application  $[Y \mapsto P^{-1}Y]$  induit (par restriction) un isomorphisme de  $\text{Im } A$  sur  $\text{Im } B$ . En particulier,  $\text{rg } A = \text{rg } B$ .

5. Les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont deux matrices non nulles telles que  $M^2 = 0_4$ , mais elles n'ont pas même rang ( $\text{rg } M_1 = 2$ ,  $\text{rg } M_2 = 1$ ), donc elles ne sont pas semblables.

### Solution 141

rms135-1417

1. On constate que  $AU = 2U$ , donc  $U$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 2.

2. Le calcul précédent doit inciter à effectuer l'opération  $C_3 \leftarrow C_2 - C_3$  afin d'obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On finit par trouver :

$$\chi_A = (X - 2)((X - 1)^2 + 2a).$$

3. Si  $a > 0$ , le polynôme caractéristique de  $A$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable (ni même trigonalisable).

• Si  $a \leq 0$ , le polynôme caractéristique de  $A$  admet trois racines réelles :

$$2, \quad 1 \pm \sqrt{-2a}.$$

Si ces trois racines sont deux à deux distinctes, alors la matrice  $A$  est diagonalisable mais si l'une des racines est double, le cas est douteux.

Comme  $1 - \sqrt{-2a} \leq 1$ , il n'y a que deux cas douteux :  $1 + \sqrt{-2a} = 1 - \sqrt{-2a}$  et  $1 + \sqrt{-2a} = 2$ .

• Si  $a = 0$ , le polynôme caractéristique de  $A$  admet une racine double :  $\chi_A = (X - 2)(X - 1)^2$  et, dans ce cas, le rang de la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc le sous-espace propre associé à 1 est une droite vectorielle (Théorème du rang). La matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable dans ce cas.

• Si  $a = -1/2$ , le polynôme caractéristique de  $A$  admet une racine double :  $\chi_A = X(X-2)^2$  et, dans ce cas, le rang de la matrice

$$A - 2I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 et la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable (pour les mêmes raisons que dans le cas  $a = 0$ ).

• En conclusion, la matrice  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $a \in ]-\infty, -1/2[ \cup ]-1/2, 0[$ .

### Solution 142

rms135-1418

On va simplifier les calculs en remarquant que

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^\top & A^\top \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse  $\det A = a^2 + b^2 \neq 0$  signifie que le bloc  $A$  est inversible. Les quatre matrices  $A$ ,  $B$ ,  $A^\top$  et  $B^\top$  commutent deux à deux car elles appartiennent toutes à la sous-algèbre  $\mathbb{K}[U]$  engendrée par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$A = aI_2 + bU, \quad A^\top = aI_2 - bU, \quad B = cI_2 + dU, \quad B^\top = cI_2 - dU.$$

En remarquant que  $U^2 = -I_2$ , on peut considérer que  $A^\top$  et  $B^\top$  sont en quelque sorte les conjuguées de  $A$  et  $B$ . On ne sera donc pas surpris de constater que

$$A^\top \cdot A = A \cdot A^\top = (a^2 + b^2)I_2 \quad \text{et que} \quad B^\top \cdot B = B \cdot B^\top = (c^2 + d^2)I_2.$$

On en déduit immédiatement que

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot A^\top \quad \text{et que} \quad (A^\top)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot A.$$

1. D'après les règles du produit par blocs,

$$M \cdot M^\top = \begin{pmatrix} A \cdot A^\top + B \cdot B^\top & -AB + BA \\ -B^\top \cdot A^\top + A^\top \cdot B^\top & A^\top \cdot A + B^\top \cdot B \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4.$$

• On en déduit que

$$(\det M)^2 = \det M \cdot \det M^\top = \det(M \cdot M^\top) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

et donc que  $\det M = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

Il est clair que  $\det M$  est une fonction polynomiale de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ , donc le signe en facteur est indépendant de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . Il est tout aussi clair que, si  $b = c = d = 0$ , alors  $\det M = +a^4$  pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , donc

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, \quad \det M = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

2. a. D'après la question précédente, si  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ , alors  $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$  est inversible et donc  $\text{rg } M = 4$ .

• Comme  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont complexes, la condition  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$  ne signifie pas que les quatre scalaires sont nuls !

2. b. Cette fois,  $\det M = 0$  et nous allons caractériser les vecteurs du noyau de  $M$  pour calculer le rang de la matrice.

La colonne  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{C})$  appartient au noyau de  $M$  si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = MX = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_2 \\ -B^\top X_1 + A^\top X_2 \end{pmatrix}.$$

Comme le bloc  $A$  est inversible, le bloc  $A^\top$  est aussi inversible et

$$\begin{aligned} \begin{cases} AX_1 + BX_2 = 0 \\ -B^\top X_1 + A^\top X_2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} X_1 = -A^{-1}BX_2 \\ X_2 = (A^\top)^{-1}B^\top X_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_1 = -A^{-1}B(A^\top)^{-1}B^\top X_1 \\ X_2 = (A^\top)^{-1}B^\top X_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

D'après les calculs menés en préambule,

$$A^{-1}B(A^T)^{-1}B^T = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} A^T \cdot A \cdot B \cdot B^T = \frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2} I_2 = -I_2$$

puisque  $c^2 + d^2 = -(a^2 + b^2)$  ! La colonne  $X$  appartient donc au noyau de  $M$  si, et seulement si,  $X_2 = (A^T)^{-1}B^T X_1$ , la colonne  $X_1 \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$  étant quelconque.

Par conséquent,  $\dim \text{Ker } M = \dim \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C}) = 2$  et, d'après le Théorème du rang,  $\text{rg } M = 4 - \dim \text{Ker } M = 2$ .

3. D'après la première question, quel que soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\det(M - \lambda I_4) = ((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

➤ On passe en effet de  $M$  à  $(M - \lambda I_4)$  en remplaçant  $a$  par  $(a - \lambda)$  !

♣ Si  $b^2 + c^2 + d^2 = 0$ , alors le polynôme caractéristique de  $M$  admet  $a$  comme seule racine (de multiplicité 4). Dans ces conditions,

- ou bien  $b = c = d = 0$  et  $M = aI_4$  est diagonale ;
- ou bien  $(b, c, d) \neq (0, 0, 0)$  et  $M \neq aI_4$ , donc  $M$  n'est pas diagonalisable.

➤ On doit savoir que la seule matrice semblable à  $aI_4$  est la matrice  $aI_4$  elle-même !

Et on doit se souvenir que les coefficients  $b, c$  et  $d$  sont complexes : de ce fait, la condition  $b^2 + c^2 + d^2 = 0$  n'implique aucunement que  $b = c = d = 0$ .

♣ Si  $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ , alors l'équation  $z^2 = b^2 + c^2 + d^2$  admet deux solutions complexes distinctes  $\pm \omega$  et  $\text{Sp}(M) = \{a \pm \omega\}$ .

Comme on l'a démontré plus haut, pour chacune des deux valeurs propres, la dimension du sous-espace propre  $\text{Ker}(M - \lambda I_4)$  est égale à 2.

➤ À nouveau, on doit prendre conscience que la matrice  $(M - \lambda I_4)$  se déduit de la matrice  $M$  en remplaçant  $a$  par  $(a - \lambda)$ .

Lorsque  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$ , alors  $(M - \lambda I_4)$  n'est pas inversible et on est ainsi ramené au 2.b.

La somme des dimensions des sous-espaces propres ( $2 + 2$ ) est égale à la dimension de l'espace vectoriel sur lequel la matrice  $M$  opère ( $\dim \mathbb{C}^4 = 4$ ), donc la matrice  $M$  est diagonalisable.

## Solution 143

rms135-1443

1. Pour tout entier  $1 \leq j \leq n$ ,

$$f\left(\frac{e_j}{t^j}\right) = \frac{1}{t^j} \cdot f(e_j) = \frac{1}{t^j} \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_{i,j} t^i}{t^j} \cdot \frac{e_i}{t^i} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} t^{i-j} \cdot \frac{e_i}{t^i}$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_t}(f) = (a_{i,j} t^{i-j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

➤ On est simplement revenu à la définition même de la matrice d'une application linéaire : on calcule les images des vecteurs de la base de départ et on décompose ces images dans la base d'arrivée.

2. Supposons que la matrice  $A$  ne soit pas nilpotente et considérons une suite  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de matrices semblables à  $A$  qui converge vers la matrice nulle.

Comme  $A$  n'est pas nilpotente, son polynôme minimal n'est pas de la forme  $X^d$ , donc il existe un polynôme irréductible  $Q$  qui divise  $\mu_A$  et qui est premier à  $X$  :

$$Q = \sum_{k=0}^q \beta_k X^k$$

avec  $\beta_0 \neq 0$ .

➤ Deux polynômes irréductibles sont ou bien associés, ou bien premiers entre eux !

Un polynôme est premier à  $X$  si, et seulement si, son terme constant n'est pas nul.

Comme  $Q$  est un diviseur non constant du polynôme minimal de  $A$ , la matrice  $Q(A)$  n'est pas inversible et  $\det Q(A) = 0$ . Comme toutes les matrices  $A_p$  sont semblables à  $A$ , alors  $\det Q(A_p) = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et, par continuité,  $\det Q(0_n) = 0$ .

▮ Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une algèbre associative unitaire de dimension finie, toute application polynomiale  $Q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est continue et l'application  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue (c'est une fonction polynomiale des coefficients).

D'après l'expression développée de  $Q$ , on a  $Q(0_n) = \beta_0 I_n$  et comme  $\beta_0 \neq 0$ , alors  $Q(0_n)$  est inversible, ce qui contredit la propriété précédente.

▮ Réciproquement, supposons que  $A$  soit nilpotente. Alors  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & b_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et donc à la matrice} \quad \begin{pmatrix} 0 & b_{1,2}t^{-1} & \dots & b_{1,n}t^{1-n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & b_{n-1,n}t^{-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

pour tout réel  $t > 0$  (d'après la première question).

Toutes les puissances de  $t$  sont strictement négatives, donc cette matrice tend vers la matrice nulle lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . On a ainsi démontré qu'il existait une suite de matrices semblables à  $A$  qui convergeait vers la matrice nulle.

### Solution 144

rms135-1577

1. On vérifie facilement que le polynôme caractéristique de  $A$  est  $(X+1)(X-2)(X-3)$ .

▮ Il faut manifestement développer par la troisième colonne !

Une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  admettant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A + I_3) \oplus \text{Ker}(A - 2I_3) \oplus \text{Ker}(A - 3I_3)$$

et les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Par conséquent, il suffit de trouver un vecteur non nul dans chacun de ces trois droites pour en déduire une base de  $\mathbb{R}^3$  constituée de vecteurs propres.

▮ Si on connaît une décomposition en somme directe  $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ , alors il suffit de connaître une base de chaque sous-espace  $V_k$  pour en déduire par concaténation une base de  $E$ .

On écrit les trois matrices

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on en déduit facilement que

$$\text{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (4, -2, -1), \quad \text{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, -2, -1), \quad \text{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 0, 1).$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible et  $P^{-1}AP = \text{Diag}(-1, 2, 3)$ .

2. Comme la matrice  $P$  est inversible et constante (indépendante de  $t$ ), le produit  $U = P^{-1}X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si, et seulement si, la fonction  $X = PU$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'(t) = P^{-1}X'(t).$$

▮ Comme la matrice  $P^{-1}$  est constante, les composantes de la colonne  $U(t)$  sont en fait des combinaisons linéaires des composantes de la colonne  $X(t)$  (et réciproquement). On applique donc la règle pour calculer la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions dérivables.

De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) && \text{(multiplication à gauche par } P^{-1}) \\ &\iff U'(t) = P^{-1}AP \cdot P^{-1}X(t) && \text{(astuce taupinale)} \\ &\iff U'(t) = D \cdot U(t). \end{aligned}$$

• Comme la matrice  $D$  est diagonale, le système  $(\Delta_1)$  revient à résoudre trois équations différentielles indépendantes :

$$u'(t) = -u(t), \quad v'(t) = 2v(t), \quad w'(t) = 3w(t).$$

Donc  $U$  est solution de  $(\Delta_1)$  si, et seulement si, il existe trois constantes  $K_1, K_2$  et  $K_3$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = (K_1 e^{-t}, K_2 e^{2t}, K_3 e^{3t})$$

et finalement une fonction  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  est solution de  $(S_1)$  si, et seulement si, il existe  $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

✎ Je ne suis pas convaincu de la nécessité d'effectuer ce produit matriciel, car je ne vois pas en quoi l'expression développée

$$F(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_2 e^{2t} \\ -2K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{2t} \\ -K_1 e^{-t} - K_2 e^{2t} + K_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

est plus claire ou plus utile que l'expression factorisée ci-dessus.

J'irais même jusqu'à préférer une expression complètement factorisée (en notant  $\Lambda = (K_1, K_2, K_3)$ ) :

$$F(t) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = P \cdot \exp(tD) \cdot \Lambda$$

afin de faire apparaître  $\exp(tA)$  :

$$F(t) = P \cdot \exp[t(P^{-1}AP)] \cdot \Lambda = P \cdot [P^{-1} \cdot \exp(tA) \cdot P] \cdot \Lambda = \exp(tA) \cdot P\Lambda.$$

On comprend ici que  $P\Lambda = F(0)$ .

✎ Si on choisit une autre base de vecteurs propres (et pourquoi pas ?), on obtiendra une expression analogue de  $X(t)$ , mais les constantes d'intégration  $K_i$  seront différentes :

$$F(t) = \exp(tA) \cdot P_1 \Lambda_1 = \exp(tA) \cdot P_2 \Lambda_2.$$

Cela dit, si on impose une condition initiale  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , on doit trouver la même solution, quelle que soit la base de vecteurs propres choisie ! En effet, la condition initiale  $F(t_0) = X_0$  se traduit par

$$P_1 \cdot \Lambda_1 = P_2 \cdot \Lambda_2 = \exp(-t_0 A) X_0.$$

Ce n'est donc pas  $P$ , ni  $\Lambda$  qui compte, mais uniquement le produit  $P\Lambda$ .

**3. a.** Comme plus haut, on résout  $(S_2)$  en se ramenant au système découplé

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U''(t) = DU(t) \quad (\Delta_2)$$

qui revient à résoudre trois équations différentielles indépendantes :

$$u''(t) + u(t) = 0, \quad v''(t) - 2v(t) = 0, \quad w''(t) - 3w(t) = 0.$$

Par conséquent, une fonction  $U \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$  est solution de  $(\Delta_2)$  si, et seulement si, il existe six constantes d'intégration  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$  et  $B_3$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ A_2 \exp(\sqrt{2}t) + B_2 \exp(-\sqrt{2}t) \\ A_3 \exp(\sqrt{3}t) + B_3 \exp(-\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

et, comme précédemment, une fonction  $F \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$  est solution de  $(S_2)$  si, et seulement si, il existe six constantes d'intégration  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$  et  $B_3$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ A_2 \exp(\sqrt{2}t) + B_2 \exp(-\sqrt{2}t) \\ A_3 \exp(\sqrt{3}t) + B_3 \exp(-\sqrt{3}t) \end{pmatrix}.$$

**3. b.** Considérons une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^3$  et la norme subordonnée  $|\cdot|$  sur l'espace  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ .

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc la norme choisie importe peu.  
En particulier, la norme choisie est équivalente à la norme produit pour laquelle une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  est bornée si, et seulement si, ses trois composantes sont bornées.

Le système différentiel  $(S_2)$  est un système différentiel linéaire et homogène du second ordre, donc l'ensemble  $\mathcal{S}_2$  de ses solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ .

L'ensemble  $E$  est l'intersection du sous-espace  $\mathcal{S}_2$  avec l'ensemble  $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  des applications bornées de classe  $\mathcal{C}^2$ , qui est un sous-espace "bien connu" de l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ .

Donc  $E$  est un espace vectoriel en tant qu'intersection de deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ .

Par définition,  $U(t) = P^{-1}X(t)$  et donc  $X(t) = PU(t)$ . Comme la norme subordonnée est sous-multiplicative,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|U(t)\| \leq |P^{-1}| \|X(t)\| \quad \text{et} \quad \|X(t)\| \leq |P| \|U(t)\|.$$

Comme  $|P^{-1}|$  et  $|P|$  sont des facteurs indépendants de  $t$ , on en déduit que la fonction  $X$  est bornée si, et seulement si, la fonction  $U$  est bornée.

Comme  $e^{\alpha t}$  tend vers  $+\infty$  au voisinage de  $+\infty$  lorsque  $\alpha > 0$  (resp. au voisinage de  $-\infty$  lorsque  $\alpha < 0$ ), la fonction  $U$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, les constantes  $A_2, A_3, B_2$  et  $B_3$  sont nulles.

Ainsi, une fonction  $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  est une solution de  $(S_2)$  qui reste bornée sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $A_1$  et  $B_1$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = P \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la dimension du sous-espace  $E$  des solutions bornées sur  $\mathbb{R}$  est égale à 2.

## Solution 145

rms135-506

1.

Rappelons pour commencer que si

$$B = (b_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} \quad \text{et} \quad M = (m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n},$$

alors

$$\text{tr}(B^T \cdot M) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n b_{k,\ell} \cdot m_{k,\ell}.$$

Notons  $(E_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ , la base canonique de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  et  $(E_{k,\ell}^*)_{1 \leq k, \ell \leq n}$ , sa base duale. Pour toute matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n E_{k,\ell}^*(M) E_{k,\ell}$$

et pour toute forme linéaire  $\varphi$  sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\varphi(M) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \varphi(E_{k,\ell}) E_{k,\ell}^*(M).$$

En posant

$$A = (\varphi(E_{k,\ell}))_{1 \leq k, \ell \leq n}^T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),$$

on en déduit que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \text{tr}(A \cdot M).$$

Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on peut invoquer le Théorème de Riesz (représentation d'une forme linéaire sur un espace euclidien au moyen du produit scalaire).

2. Soit  $H$ , un hyperplan de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . Il existe donc une forme linéaire non identiquement nulle  $\varphi$  telle que  $H = \text{Ker } \varphi$  et, d'après la question précédente, il existe une matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  non nulle telle que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad M \in H \iff \text{tr}(AM) = 0.$$

Remarquons que, pour tout  $1 \leq r \leq n$ , il existe une matrice  $J_r$  de rang  $r$  et de trace nulle :

$$\forall 1 \leq r < n, \quad J_r = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \diagdown & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et pour } r = n, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \diagdown & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On raisonne par l'absurde en supposant que l'hyperplan  $H$  ne contient aucune matrice inversible :

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(AM) \neq 0.$$

Comme la matrice  $A$  n'est pas la matrice nulle, son rang  $r$  vérifie  $1 \leq r \leq n$  et la matrice  $A$  est équivalente à une matrice  $J_r$  de rang  $r$  et de trace nulle. Il existe donc deux matrices inversibles  $Q$  et  $P$  telles que

$$Q^{-1}AP = J_r.$$

On en déduit que

$$0 = \text{tr}(J_r) = \text{tr}(Q^{-1}AP) = \text{tr}((AP)Q^{-1}) = \text{tr}(A \cdot (PQ^{-1})) \neq 0$$

et la contradiction est manifeste.

#### Solution 146

rms135-507

Comme  $p_i$  n'est pas l'endomorphisme identiquement nul, son rang est au moins égal à 1, donc la dimension du sous-espace  $\text{Im } p_i$  est au moins égale à 1.

Pour démontrer que ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on considère une famille de vecteurs  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0_E \quad \text{et que} \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad x_i \in \text{Im } p_i.$$

On en déduit que

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad 0_E = p_j(0_E) = p_j\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n p_j(x_i)$$

Par hypothèse, les endomorphismes  $p_i$  sont des projecteurs :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad p_i \circ p_i = \delta_{i,i} \cdot p_i = p_i.$$

Par conséquent, comme  $x_i \in \text{Im } p_i$  par définition,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i = p_i(x_i)$$

et donc

$$0_E = \sum_{i=1}^n p_j(p_i(x_i)) = \sum_{i=1}^n \delta_{j,i} \cdot p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j.$$

Comme tous les vecteurs  $x_j$  sont nuls, les sous-espaces vectoriels  $\text{Im } p_j$  sont bien en somme directe.

En particulier,

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } p_i\right) = \sum_{i=1}^n \dim \text{Im } p_i \geq n$$

puisque la dimension de chaque sous-espace  $\text{Im } p_i$  est au moins égale à 1.

Par ailleurs, la dimension d'un sous-espace de  $E$  est toujours inférieure à celle de  $E$ , donc

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^n \text{Im } p_i\right) \leq \dim E = n.$$

Ainsi,

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Im} p_i\right) = n = \dim E.$$

✎ Si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , espace vectoriel de dimension finie, et que  $\dim F = \dim E$ , alors  $F = E$ .

On en déduit d'une part l'égalité des deux espaces vectoriels (inclusion et égalité des dimensions) :

$$E = \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Im} p_i$$

et d'autre part que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \dim \operatorname{Im} p_i = 1.$$

✎ Si la somme de  $n$  entiers supérieurs à 1 est égale à  $n$ , alors chaque terme est égal à 1 :

$$0 = n - \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(1 - d_i)}_{\leq 0}.$$

### Solution 147

rms135-964

1. Quels que soient le réel  $a$  et le vecteur  $x \in \mathbb{R}^3$ , il est clair que la fonction  $f = [t \mapsto e^{at}x]$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = ae^{at}x.$$

✎ Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , une valeur propre de la matrice  $A$ . Il existe donc un vecteur propre  $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$  de  $A$  associé à  $\lambda$  et, par définition, ce vecteur n'est pas nul.

La fonction  $f_\lambda = [t \mapsto e^{\lambda t}x_\lambda]$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t}x_\lambda = e^{\lambda t} \cdot Ax_\lambda = A \cdot f_\lambda(t).$$

✎ Réciproquement, si  $f_\lambda$  est une solution de (H), alors en particulier

$$\lambda \cdot x_\lambda = \lambda e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda = f'_\lambda(0) = Af_\lambda(0) = A \cdot (e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda) = Ax_\lambda$$

et comme le vecteur  $x_\lambda$  est supposé non nul, on en déduit qu'il s'agit d'un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

2. a. Comme

$$f_{a,b,c}(t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il est clair que  $F$  est le sous-espace de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les trois fonctions  $f_{1,0,0}$ ,  $f_{0,1,0}$  et  $f_{0,0,1}$ . C'est donc un espace vectoriel et sa dimension est inférieure à 3.

On peut rapidement vérifier que le rang de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 3, donc cette matrice est inversible, ce qui prouve que les trois vecteurs  $f_{1,0,0}(0)$ ,  $f_{0,1,0}(0)$  et  $f_{0,0,1}(0)$  sont linéairement indépendants et donc que la famille  $(f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1})$  est une base de  $F$  et  $\dim F = 3$ .

✎ Si trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^3$  forment une famille liée, alors il existe un triplet de scalaires  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad af(t) + bg(t) + ch(t) = 0$$

et en particulier  $af(0) + bg(0) + ch(0) = 0$ , ce qui prouve que les trois vecteurs  $f(0)$ ,  $g(0)$  et  $h(0)$  forment une famille liée (puisque les trois scalaires  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ne sont pas tous nuls).

2. b. Quels que soient  $a, b, c$  et  $t$ ,

$$f'_{a,b,c}(t) = be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La relation  $f'(t) = Mf(t)$  est vérifiée pour toute fonction  $f \in F$  si, et seulement si, elle est vérifiée pour les trois fonctions  $f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1}$  (qui constituent une sorte de base canonique de  $F$ ). On cherche donc une matrice  $M$  telle que

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\dagger)$$

On obtient rapidement

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la seule matrice qui convienne.

• En remarquant que l'équation  $(\dagger)$  peut aussi s'écrire

$$MP = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$M = P \text{Diag}(0, 1, -1) P^{-1}.$$

Par conséquent, la matrice  $M$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(M) = \{0, -1, 1\}$ .

Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants montre que les solutions de l'équation  $x'(t) = Mx(t)$  sont les fonctions  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$  de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(tM).f(0).$$

Ici,

$$f_{a,b,c}(0) = \begin{pmatrix} b+c \\ 2a-b \\ a+c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_{a,b,c}(t) = P \begin{pmatrix} a \\ be^t \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$f_{a,b,c}(t) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} f_{a,b,c}(0)$$

et comme cette propriété est vraie pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tM) &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} = P \exp[\text{Diag}(0, t, -t)] P^{-1} \\ &= \exp[tP \text{Diag}(0, 1, -1) P^{-1}] \end{aligned}$$

(puisque  $\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}\exp(A)Q$ , quelles que soient la matrice  $A$  et la matrice inversible  $Q$ ).

**NB :** L'application  $\exp$  n'est pas injective sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Solution 148****rms135-1151**

Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants nous montre que les solutions du système homogène  $x'(t) = Ax(t)$  sont les applications  $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \exp(tA)(x(0)).$$

• Comme la matrice  $A$  est diagonalisable, l'espace  $\mathbb{R}^n$  est la somme (directe, forcément directe) des sous-espaces propres de  $A$  :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\alpha \in \text{Sp}(A)} \text{Ker}(A - \alpha I_n).$$

En notant  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq r}$ , les valeurs propres (deux à deux distinctes) de  $A$ , il existe une, et une seule, famille de vecteurs  $(u_k)_{1 \leq k \leq r}$  telle que

$$x(0) = \sum_{k=1}^r u_k \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k \leq r, \quad u_k \in \text{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=1}^r \exp(tA)(u_k) = \sum_{k=1}^r e^{t\alpha_k} \cdot u_k. \quad (\ddagger)$$

• Il faut bien distinguer l'application  $\exp = [M \mapsto \exp(M)]$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , qui est développable en série entière, et l'application  $\exp(M) = [x \mapsto \exp(M)x]$ , qui est linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  puisque  $\exp(M) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

• Avec  $Mu = \alpha \cdot u$ , on a  $M^k u = \alpha^k \cdot u$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left( \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right) (u) = \left( \sum_{k=0}^N \frac{\alpha^k}{k!} \right) \cdot u$$

Par définition de  $\exp(M)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \exp(M) - \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right\| = 0$$

et par définition de  $|\cdot|$ ,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\| \exp(M)(u) - \left( \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right) (u) \right\| \leq \left\| \exp(M) - \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right\| \|u\|.$$

On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \exp(M)(u) - \left( \sum_{k=0}^N \frac{\alpha^k}{k!} \right) \cdot u \right\| = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \exp(M)(u) = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \right) \cdot u = e^\alpha \cdot u.$$

• Supposons que les valeurs propres de  $A$  soient indexées de manière décroissante :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r.$$

De plus, la trace de  $A$  est égale à la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité). Comme cette trace est strictement positive, la matrice  $A$  admet au moins une valeur propre *strictement positive*, donc  $\alpha_1 > 0$ .

On déduit de la décomposition  $(\ddagger)$  que

$$u_1 = e^{-t\alpha_1} x(t) - \sum_{k=2}^r e^{t(\alpha_k - \alpha_1)} \cdot u_k$$

et donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \|u_1\| \leq e^{-t\alpha_1} \|x(t)\| + \sum_{k=2}^r e^{t(\alpha_k - \alpha_1)} \|u_k\|.$$

Comme  $x(t)$  tend vers le vecteur nul et que  $(\alpha_k - \alpha_1) < 0$  pour tout  $k \geq 2$ , on en déduit que le second membre tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent,  $\|u_1\| = 0$  et  $u_1$  est le vecteur nul.

✎ On pourrait continuer sur cette lancée et en déduire (par récurrence finie) que  $u_k = 0$  pour tout entier  $1 \leq k \leq r$  tel que  $\alpha_k \geq 0$ .

♣ On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \text{Vect}(u_2, \dots, u_r) \subset \bigoplus_{k=2}^r \text{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

Par définition, la dimension d'un sous-espace propre est toujours au moins égale à 1, donc

$$\dim \bigoplus_{k=2}^r \text{Ker}(A - \alpha_k I_n) = \sum_{k=2}^r \dim \text{Ker}(A - \alpha_k I_n) < \dim E.$$

D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un hyperplan  $H$  de  $E$  tel que

$$\bigoplus_{k=2}^r \text{Ker}(A - \alpha_k I_n) \subset H$$

et donc tel que  $x(t) \in H$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc il existe une forme linéaire  $\ell$ , non identiquement nulle, telle que  $H = \text{Ker } \ell$  et donc telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ell(x(t)) = 0.$$

### Solution 149

rms136-669

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , la dimension de  $F$ .

Soit  $f \in F$ . La famille  $(f, f^2, \dots, f^n, f^{n+1})$  est une famille de  $F$  (stable par produit) et c'est une famille liée (puisque son cardinal est strictement supérieur à  $\dim F$ ). Par conséquent, il existe des scalaires  $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$  non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k f^k = 0_E,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k [f(x)]^k = 0.$$

Cela signifie que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la valeur de  $f(x)$  est une racine du polynôme

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k X^k.$$

Les coefficients  $a_k$  ne sont pas tous nuls, donc ce polynôme n'a qu'un nombre fini de racines. Et comme les coefficients  $a_k$  ne dépendent pas de  $x$ , la fonction  $f$  ne peut prendre qu'un nombre **fini** de valeurs.

Mais la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  et, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble des valeurs prises par  $f$  est un intervalle.

Un intervalle de  $\mathbb{R}$  qui ne contient qu'un nombre fini de réels est réduit à un singleton, donc la fonction  $f$  est constante.

✎ En particulier,  $\dim F = 1$ .

### Solution 150

rms136-671

Si les matrices  $A$  et  $B$  commutent, alors  $tA$  et  $tB$  commutent quel que soit le réel  $t$  et par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \cdot \exp(tB) = \exp[t(A+B)] = \exp(tB) \cdot \exp(tA).$$

✎ C'est un résultat du cours.

♣ Quelle que soit la matrice  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\exp(tM) \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n + tM + \frac{t^2}{2} \cdot M^2 + o(t^2).$$

▮ D'après le cours, l'application  $\varepsilon_M = [t \mapsto \exp(tM)]$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon'_M(t) = M\varepsilon_M(t), \quad \varepsilon''_M(t) = M^2\varepsilon_M(t)$$

et on déduit le développement limité précédent de la formule de Taylor-Young :

$$\varepsilon_M(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \varepsilon_M(0) + t \cdot \varepsilon'_M(0) + \frac{t^2}{2} \cdot \varepsilon''_M(0) + o(t^2).$$

**Variante** — On peut se contenter de revenir à la définition de l'exponentielle de matrice en considérant une norme sous-multiplicative sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\| \exp(tM) - I_n - tM - \frac{t^2}{2} \cdot M^2 \right\| = \left\| \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot M^k \right\| \leq \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{|t|^k \|M\|^k}{k!}$$

et en particulier pour  $|t| \leq 1$ ,

$$\left\| \exp(tM) - I_n - tM - \frac{t^2}{2} \cdot M^2 \right\| \leq |t|^3 \|M\|^3 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{|t|^\ell \|M\|^\ell}{(\ell+3)!} \leq \|M\|^3 \exp(\|M\|) |t|^3$$

ce qu'on simplifie en

$$\exp(tM) = I_n + tM + \frac{t^2}{2} \cdot M^2 \underset{t \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(t^3).$$

On en déduit d'une part que

$$\exp[t(A+B)] \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2} \cdot (A+B)^2 + o(t^2)$$

et d'autre part que

$$\exp(tA) \cdot \exp(tB) \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2} \cdot (A^2 + B^2 + AB + BA) + o(t^2)$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$AB = BA.$$