

Composition de Mathématiques

Le 26 novembre 2025 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices et les objets connectés sont interdits.

On note E , l'espace vectoriel des applications continues du segment $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme définie par

$$\forall f \in E, \quad \|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

On note $L(E)$, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même. L'image de la fonction $f \in E$ par une application $T \in L(E)$ pourra être notée $T(f)$ ou plus brièvement Tf . L'espace $L(E)$ est muni de la norme définie par

$$\forall T \in L(E), \quad \|T\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Tf\|.$$

L'objet de ce problème est d'étudier une application linéaire, l'**opérateur d'Abel**, qui sera défini dans la quatrième partie. Les trois premières parties introduisent les outils nécessaires à cette étude.

Partie A. La seconde fonction d'Euler

La deuxième fonction eulérienne est la fonction $\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1)$$

On admettra que cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2)$$

On admettra également que

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (3)$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!. \quad (4)$$

1. Démontrer qu'il existe un réel $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
2. En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
3. Démontrer que

$$\forall c > 0, \quad c^x = o_{x \rightarrow +\infty}(\Gamma(x)).$$

Partie B. Étude asymptotique d'une fonction analytique**Approximation discrète d'une intégrale**

Soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, une application continue et intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
On suppose de plus qu'il existe un réel $t_0 \geq 0$ tel que l'application φ soit décroissante sur $[t_0, +\infty[$.

4. Démontrer que l'application φ est positive sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

☞ On pourra raisonner par l'absurde.

5. Soit h , un nombre réel strictement positif.

5.a. Démontrer que

$$0 \leq h\varphi(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t) dt$$

pour tout entier n suffisamment grand.

5.b. Démontrer que la série $\sum h\varphi(nh)$ converge.

6. Démontrer que

$$\lim_{\substack{h>0 \\ h \rightarrow 0}} h \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(nh) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

☞ On pourra introduire un "grand" nombre réel a et remarquer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\varphi(nh) = \sum_{n=0}^{n_a} h\varphi(nh) + \sum_{n=n_a+1}^{+\infty} h\varphi(nh)$$

où n_a est la partie entière de a/h .

Un calcul d'équivalent

Pour tout nombre réel $\alpha > 1$, on définit la fonction $g_\alpha : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\forall t \geq 0, \quad g_\alpha(t) = t^{\alpha-1} e^{-t}.$$

On pose également

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n.$$

7. Vérifier que les conditions posées sur la fonction φ au début de la **Partie B** sont satisfaites par la fonction g_α . En déduire que

$$\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \Gamma(\alpha).$$

8.a. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{\alpha-1} x^n$ est égal à 1.

8.b. Démontrer que

$$S_\alpha(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.$$

Que peut-on en déduire sur la fonction S_α ?

Partie C. La première fonction eulérienne**Définition et premières propriétés**

La première fonction eulérienne est la fonction $B :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt. \quad (5)$$

(On précise pour les non-hellénistes que B est un β majuscule.)

On notera

$$\forall \alpha, \beta > 0, \forall 0 < t < 1, \quad \psi_{\alpha, \beta}(t) = t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}.$$

9. Démontrer que la fonction $\psi_{\alpha, \beta}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$, quels que soient les nombres réels strictement positifs α et β .

10. Soient α et β , deux réels strictement positifs. Établir successivement les relations suivantes.

10. a.

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

10. b.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt$$

☞ On pourra utiliser le changement de variable $u = t/(1+t)$.

10. c.

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta)$$

Une relation entre B et Γ

On se propose d'établir la relation suivante :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (6)$$

11. À l'aide de la relation [10.c.], démontrer qu'il suffit d'établir la relation (6) lorsque les deux réels α et β sont strictement supérieurs à 2.

12. Soient α et β , deux réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1}. \quad (7)$$

12. a. Démontrer qu'il existe un réel $A_{\alpha, \beta} > 0$ tel que

$$\forall 0 \leq x, y \leq 1, \quad |\psi_{\alpha, \beta}(x) - \psi_{\alpha, \beta}(y)| \leq A_{\alpha, \beta} |x - y|.$$

12. b. Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \quad |u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n}.$$

12. c. On reprend ici les notations de [8.].

Établir que

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad S_\alpha(x) S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha, \beta) n^{\alpha+\beta-1} x^n. \quad (8)$$

En déduire que

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad |S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \frac{A_{\alpha,\beta}}{2} S_{\alpha+\beta-1}(x). \quad (9)$$

Déduire enfin du comportement des fonctions S_γ au voisinage de 1 que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta).$$

La formule des compléments

13. Démontrer que la fonction $[\alpha \mapsto B(\alpha, 1 - \alpha)]$ est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

14. Soient p et q , deux entiers tels que $0 < p < q$.

14. a. Vérifier que

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt.$$

14. b. Pour tout entier $0 \leq k < q$, on pose $z_k = \exp(i\frac{2k+1}{2q}\pi)$. Démontrer que

$$\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = \frac{-1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k} \right).$$

14. c. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On pose alors $c = a + ib$. Vérifier que

$$\frac{1}{2} \ln[(t-a)^2 + b^2] + i \operatorname{Arctan} \frac{t-a}{b}$$

est l'expression d'une primitive de

$$\frac{1}{t-c}.$$

En utilisant judicieusement la relation établie en **[14.b.]**, prouver que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}.$$

En conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = \frac{\pi}{2q} \cdot \frac{1}{\sin \frac{(2p+1)\pi}{2q}}.$$

15. Déduire de **[13.]** et **[14.]** la **formule des compléments** :

$$\forall 0 < \alpha < 1, \quad B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Partie D. L'opérateur d'Abel

|| Dans cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$.

Continuité de l'opérateur

16. Soient $f \in E$ et $x \in]0, 1]$. Démontrer que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \right]$$

est intégrable sur l'intervalle ouvert $]0, x[$.

17. Pour toute fonction $f \in E$, on définit une fonction $A_\alpha f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$A_\alpha f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall 0 < x \leq 1, \quad A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt.$$

17.a. Soit $f \in E$. Démontrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt.$$

17.b. Démontrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $A_\alpha f$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

17.c. Démontrer que l'application $A_\alpha = [f \mapsto A_\alpha f]$ est un endomorphisme continu de E et que

$$\|A_\alpha\| = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Spectre de l'opérateur

On étudie ici la suite $(A_\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la condition initiale $A_\alpha^0 = I_E$ et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n. \quad (10)$$

On rappelle que $\beta = 1 - \alpha$.

18.a. Soit $f \in E$. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad |A_\alpha^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta} [\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|.$$

18.b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, l'endomorphisme A_α^n est continu et que

$$\forall n \geq 1, \quad \|A_\alpha^n\| \leq \frac{[\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

19. Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n \frac{[\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0.$$

☞ On pourra utiliser le résultat établi en [3].

Que peut-on en déduire sur le spectre de A_α ?

20. Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, un nombre complexe non nul. On pose

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f(x).$$

20. a. Démontrer que la série de fonctions $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$. Que peut-on en déduire sur la fonction g ?

20. b. Démontrer que

$$(I_E - \lambda A_\alpha)(g) = f.$$

20. c. En déduire que, pour tout nombre complexe $\lambda \neq 0$, l'opérateur $I_E - \lambda A_\alpha$ est une bijection de E sur E et que

$$\forall f \in E, \quad (I_E - \lambda A_\alpha)^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f.$$

Formule d'inversion d'Abel

Pour tout réel $\theta \geq 0$, on note e_θ , la fonction monôme $[t \mapsto t^\theta] \in E$ avec la convention habituelle : $t^0 = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$.

On rappelle à nouveau que $0 < \alpha < 1$ et on pose

$$B_\alpha = A_\beta \circ A_\alpha$$

où $\beta = 1 - \alpha$.

21. a. Calculer $A_\alpha e_\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$.

21. b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A_\beta \circ A_\alpha) e_n = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \cdot \frac{e_{n+1}}{n+1}.$$

Le résultat précédent suggère d'introduire l'opérateur P défini par

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \quad Pf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

22. Démontrer que

$$(A_\beta \circ A_\alpha) \psi = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P \psi$$

pour toute fonction polynomiale $\psi \in E$.

23. a. Démontrer que P est un endomorphisme continu de E et que

$$\|P\| = 1.$$

23. b. Démontrer que

$$A_\beta \circ A_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P.$$

24. En déduire que l'opérateur A_α est injectif.

Extraits du rapport du jury

Certaines copies ont présenté des démonstrations remarquables des questions 6. et 14.

Des candidats ont essayé de glaner quelques points en abordant, au détriment des parties précédentes, quelques questions de la partie D. Malheureusement, ils n'en ont pas toujours été récompensés...

Un assez grand nombre d'étudiants ne lit pas attentivement l'énoncé; comment peut-on, par exemple, expliquer le calcul de $\Gamma(2)$ alors que la valeur figure dans l'énoncé? ou l'étude de la continuité et de la dérivabilité de la fonction Γ ?

L'étude de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle reste malgré les recommandations données les années précédentes un traquenard pour un grand nombre de candidats.

La notion de série n'est pas maîtrisée. Dans de très nombreuses copies, on confond *série*, *somme de la série* et *suite des sommes partielles*... On se gardera de démontrer que la série de terme général $h\Phi(nh)$ est convergente en commençant la preuve de cette assertion par le symbole

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\Phi(nh),$$

on n'a le droit d'écrire ce symbole qu'*après* avoir établi la convergence de la série!

Des techniques élémentaires ne sont pas acquises : par exemple très souvent la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^{2q} + 1 = 0$$

(où q est un entier naturel non nul) n'est pas effectuée.

De même, la décomposition en éléments simples de

$$\frac{X^{2p}}{X^{2q} + 1}$$

n'est pas réalisée.

Le jury conseille aux futurs candidats :

- de connaître la définition des mots usuels tels que *fonctions uniformément continues*, *fonctions lipschitziennes*, *fonctions polynomiales*...
- de maîtriser et de vérifier soigneusement les hypothèses des théorèmes utilisés comme par exemple le théorème de changement de variable dans les intégrales, le théorème d'intégration par parties, le théorème de continuité sous le signe $\int$;
- de justifier les assertions présentées : par exemple, on évitera les assertions du type "la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$ " en omettant les conditions sur α et β pour qu'il en soit ainsi.

Les candidats doivent s'attacher à présenter des copies lisibles, rédigées de façon claire et précise et éviter de donner des "démonstrations" en alignant des égalités sans la moindre explication. Ils doivent respecter l'orthographe d'usage et l'orthographe d'accord. Ils ne doivent pas oublier que si ces divers aspects ne font pas l'objet de points spécifiques dans le barème, ils peuvent entraîner des points de minoration pour les copies ne présentant pas ces qualités.

Solution * L'opérateur d'Abel

Partie A. La seconde fonction d'Euler

1. D'après l'énoncé, la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, donc continue sur le segment $[1, 2]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]1, 2[$. De plus, $\Gamma(2) = \Gamma(1)$ d'après (3). D'après le Théorème de Rolle, il existe un réel $x \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(x) = 0$.

2. La fonction $[t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1}]$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. De plus, elle ne s'annule qu'en $t = 1$, donc

$$\forall x > 0, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1} dt > 0$$

d'après (2). Par conséquent, la dérivée Γ' est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et comme elle s'annule en un point de $]1, 2[$, elle est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Donc la fonction Γ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

3. Comme x va tendre vers $+\infty$, on peut supposer que $x > 2$. Par croissance stricte de Γ , on en déduit que

$$\Gamma(x) > \Gamma(2) = 1! > 0.$$

• Par croissance de Γ [2.] et la relation (4),

$$0 < \frac{c^x}{\Gamma(x)} \leq \frac{c^x}{\Gamma(\lfloor x \rfloor)} = \frac{c^{n_x}}{n_x!} \cdot c^{1+\{x\}}$$

où $n_x = \lfloor x \rfloor - 1$ et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1]$.

• La fonction $[y \mapsto c^y = e^{y \ln c}]$ est continue sur le segment $[1, 2]$, donc elle est bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x > 2, \quad 0 < \frac{c^x}{\Gamma(x)} \leq M \cdot \frac{c^{n_x}}{n_x!}.$$

On sait que $c^n/n!$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (croissances comparées) et n_x tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (puisque $n_x \geq x - 2$), donc $c^{n_x}/n_x!$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (par composition de limites).

On a ainsi démontré par encadrement que $c^x = o[\Gamma(x)]$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B. Étude asymptotique d'une fonction analytique

Approximation discrète d'une intégrale

4. S'il existe un réel $A \geq t_0$ tel que $\varphi(A) < 0$, alors

$$\forall t \geq A, \quad \varphi(t) \leq \varphi(A) < 0$$

(par décroissance de φ) et par conséquent,

$$\forall x \geq A, \quad \int_0^x \varphi(t) dt = \int_0^A \varphi(t) dt + \int_A^x \varphi(t) dt \leq \int_0^A \varphi(t) dt + (x - A)\varphi(A).$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, le majorant tend vers $-\infty$ (puisque $\varphi(A) < 0$). On en déduit que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$$

est divergente, ce qui contredit l'hypothèse d'intégrabilité de φ sur $[0, +\infty[$.

On a démontré par l'absurde que la fonction φ était positive sur $[0, +\infty[$.

5. a. Comme $h > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(n_0 - 1)h \geq t_0$ (axiome d'Archimède).

Pour tout entier $n \geq n_0$, on a donc $[(n - 1)h, nh] \subset [t_0, +\infty[$ et φ est décroissante sur $[(n - 1)h, nh]$:

$$\forall t \in [(n - 1)h, nh], \quad \varphi(nh) \leq \varphi(t).$$

De plus, φ est positive sur ce segment [4.], donc

$$0 \leq h\varphi(nh) = \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(nh) dt \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t) dt$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

5.b. Comme φ est supposée intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégrale généralisée de φ sur cet intervalle est convergente et, d'après la relation de Chasles, la série

$$\sum \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t) dt$$

est convergente.

On déduit de l'encadrement du [5.a.] et du Théorème de comparaison pour les séries *de terme général positif* que la série $\sum h\varphi(nh)$ est convergente.

Pour appliquer le Théorème de comparaison des séries, il suffit que la comparaison (quelle que soit sa nature) soit vraie à partir d'un certain rang : la valeur de l'entier n_0 n'importe donc pas.

En revanche, le Théorème de comparaison (sous toutes ses formes) énonce une condition suffisante de **convergence absolue**. Il faut donc majorer la valeur absolue du terme général ou rappeler avec insistance que ce terme général est positif (au moins à partir d'un certain rang).

6. Nous allons appliquer le Théorème de convergence dominée et plus précisément son "extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_h)_{h \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ ".

Par hypothèse, la fonction φ est décroissante et positive sur un intervalle $[t_0, +\infty[$. Nous considérons donc un réel $A > t_0$ et l'intervalle $J =]0, A - t_0[$.

Pour $h \in J$ (et donc *strictement positif*), on définit

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f_h(t) = \varphi(\lfloor t/h \rfloor h + h).$$

Comme la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue par morceaux et que φ est continue, chaque fonction f_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Il faut comprendre le sens de cette définition : si $(n-1)h \leq t < nh$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$(n-1) \leq \frac{t}{h} < n, \quad \text{donc} \quad \lfloor t/h \rfloor h + h = (n-1)h + h = nh$$

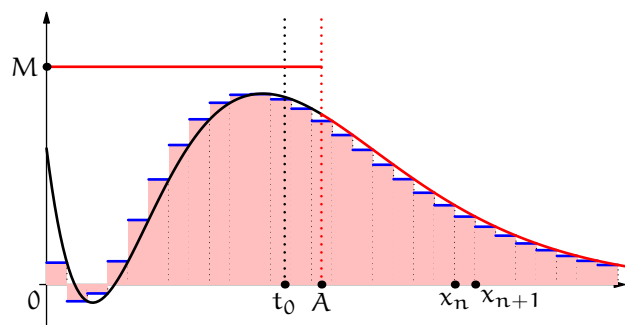
et $f_h(t) = \varphi(nh)$. On a donc subdivisé l'intervalle $[0, +\infty[$ en sous-intervalles $[nh, (n+1)h[$ et on "approche" φ sur ces sous-intervalles par la valeur de φ à l'extrémité droite de l'intervalle — c'est donc une adaptation de la méthode des "rectangles à droite" à l'intervalle non compact $[0, +\infty[$.

Par définition de la partie entière,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall h > 0, \quad t < \lfloor t/h \rfloor h + h \leq t + h.$$

Comme φ est supposée continue sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de cet encadrement que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{h \rightarrow 0} f_h(t) = \varphi(t).$$



En noir, la fonction φ , décroissante sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

En bleu, la fonction en escalier f_h .

En rouge, la fonction dominante g .

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$: il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |\varphi(t)| \leq M.$$

En particulier,

$$\forall t \in [0, A], \quad |f_h(t)| = |\varphi(\dots)| \leq M. \quad (†)$$

D'autre part, si $t \geq A$, alors $t > t_0 + h$ et donc

$$\lfloor t/h \rfloor + 1 \geq \frac{t}{h} \geq \lfloor t/h \rfloor \geq \lfloor t_0/h \rfloor + 1 > \left(\frac{t_0}{h} - 1\right) + 1 = \frac{t_0}{h}.$$

Par conséquent,

$$x_{n+1} \stackrel{\text{not.}}{=} \lfloor t/h \rfloor h + h \geq t \geq x_n \stackrel{\text{not.}}{=} \lfloor t/h \rfloor h > t_0.$$

Or la fonction φ est décroissante et positive sur $[t_0, +\infty[$, donc

$$\forall t \geq A, \quad 0 \leq f_h(t) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \varphi(\lfloor t/h \rfloor h + h) \leq \varphi(t). \quad (\ddagger)$$

• Considérons la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall 0 \leq t \leq A, \quad g(t) = M \quad \text{et} \quad \forall t > A, \quad g(t) = \varphi(t).$$

Cette fonction est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (puisque φ est continue sur $\mathbb{R}_+$) et intégrable au voisinage de $+\infty$ (comme φ), donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après les encadrements $(\ddagger)$ et $(\ddagger)$,

$$\forall h \in J, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f_h(t)| \leq g(t).$$

Cela prouve que les fonctions f_h sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $h \in J$, mais cela nous permet aussi d'appliquer le Théorème de convergence dominée :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f_h(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

• Par définition de f_h ,

$$\forall h > 0, \quad \int_0^{+\infty} f_h(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} h\varphi(nh) \right) - h\varphi(0).$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\varphi(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

Un calcul d'équivalent

7. Comme $\alpha > 1$, la fonction g_α est bien continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (fermé en 0).

De plus, $g_\alpha(t) = o(e^{-t/2})$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc g_α est bien intégrable au voisinage de $+\infty$ et, puisqu'elle est continue sur l'intervalle (fermé!) $[0, +\infty[$, elle est donc intégrable sur $[0, +\infty[$.

Enfin,

$$\forall t > \alpha - 1, \quad g'_\alpha(t) = t^{\alpha-2} e^{-t} (\alpha - 1 - t) < 0$$

donc la fonction g_α est décroissante sur $[\alpha - 1, +\infty[$.

• On peut donc appliquer les résultats démontrés ci-dessus avec $\varphi = g_\alpha$.

Lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $h = -\ln x$ tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc

$$\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \lim_{\substack{h > 0 \\ h \rightarrow 0}} \sum_{n=0}^{+\infty} h g_\alpha(nh) = \int_0^{+\infty} g_\alpha(t) dt$$

et cette intégrale est, par définition (rappelée dans le préambule), égale à $\Gamma(\alpha)$.

8. a. Notons R , le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{\alpha-1} x^n$.

Pour $|x| < 1$, la suite de terme général $n^{\alpha-1} x^n$ tend vers 0, donc elle est bornée. De ce fait, $R \geq 1$.

Pour $|x| \geq 1$, la suite de terme général $n^{\alpha-1} x^n$ tend vers l'infini, donc elle n'est pas bornée. On en déduit que $R \leq 1$.

Par double inégalité, on a démontré que $R = 1$.

8. b. D'après [5.b.], la série $\sum h\varphi(nh)$ converge pour tout $h > 0$. D'après [7.], pour $0 < x < 1$, on a $h = -\ln x > 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h g_\alpha(nh) = (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-n \ln x)^{\alpha-1} e^{-(-n \ln x)} = (-\ln x)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n.$$

On a donc démontré au [7.] que

$$(-\ln x)^\alpha S_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \Gamma(\alpha).$$

On sait bien que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

donc $(-\ln x)^\alpha \sim (1 - x)^\alpha$ lorsque x tend vers 1 (pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$) et par conséquent

$$S_\alpha(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha)}{(1 - x)^\alpha}.$$

• La fonction S_α est continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1.

Comme $\alpha > 1$ et que $\Gamma(\alpha) > 0$, l'équivalent qu'on vient de trouver prouve que S_α n'est pas prolongeable par continuité en $x = 1$ et même qu'elle n'est pas intégrable au voisinage de ce point.

Partie C. La première fonction eulérienne**Définition et premières propriétés**

9. Pour $t \in]0, 1[$, les réels t et $1 - t$ sont strictement positifs, donc $\psi_{\alpha, \beta}(t)$ est bien définie.

La fonction $\psi_{\alpha, \beta}$ est clairement continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Lorsque t tend vers 0, $\psi_{\alpha, \beta}(t) \sim t^{\alpha-1}$. Comme $\alpha > 0$, l'exposant $\alpha - 1$ est strictement supérieur à 1, donc la fonction de référence $[t \mapsto t^{\alpha-1}]$ est intégrable au voisinage (droit) de 0. Par comparaison, $\psi_{\alpha, \beta}$ est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers 1, $\psi_{\alpha, \beta}(t) \sim (1 - t)^{\beta-1}$. Comme $\beta > 0$, l'exposant $\beta - 1$ est strictement supérieur à 1, donc la fonction de référence $[t \mapsto (1 - t)^{\beta-1}]$ est intégrable au voisinage (gauche) de 1. Par comparaison, $\psi_{\alpha, \beta}$ est intégrable au voisinage de 1.

La fonction $\psi_{\alpha, \beta}$ est donc intégrable sur $]0, 1[$, quels que soient les réels α et β *strictement* positifs.

10. a. Comme $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, les deux fonctions $\psi_{\alpha, \beta}$ et $\psi_{\beta, \alpha}$ sont intégrables sur $]0, 1[$ d'après [9.].

Le changement de variable *affine* (donc légitime) $u = 1 - t$ nous donne

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = B(\beta, \alpha).$$

10. b. L'application

$$\Theta = \left[t \mapsto \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \right]$$

est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Tout aussi clairement, elle est strictement croissante sur cet intervalle, elle tend vers 0 au voisinage de 0 et vers 1 au voisinage de $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$ (Théorème de la bijection monotone).

• Pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} &= \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{(\alpha-1)+(\beta-1)}} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} = \left(\frac{t}{1+t} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+t} \right)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} \\ &= \left(\frac{t}{1+t} \right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{1+t} \right)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} \\ &= \psi_{\alpha, \beta}(\Theta(t)) \cdot \Theta'(t). \end{aligned}$$

Comme $\psi_{\alpha, \beta}$ est intégrable sur $]0, 1[$ [9.], on déduit du Théorème de changement de variable que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt$$

est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = \int_0^1 \psi_{\alpha, \beta}(u) du = B(\alpha, \beta).$$

10. c. Comme $\alpha + 1 > 1 > 0$ et $\beta > 0$, l'intégrale généralisée $B(\alpha + 1, \beta)$ est convergente et

$$B(\alpha + 1, \beta) = \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{\alpha} \cdot \beta(1-t)^{\beta-1} dt.$$

Comme α et β sont strictement positifs, les deux fonctions $[t \mapsto t^{\alpha}]$ et $[t \mapsto (1-t)^{\beta}]$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ mais pas sur le segment $[0, 1]$. Néanmoins, le produit de ces deux fonctions tend vers 0 au voisinage de $t = 0$ ainsi qu'au voisinage de $t = 1$ et on a démontré [9.] que les fonctions $\psi_{\alpha+1, \beta}$ et $\psi_{\alpha, \beta+1}$ étaient intégrables sur $]0, 1[$.

Nous pouvons donc intégrer par parties sur $]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{\alpha} \cdot \beta(1-t)^{\beta-1} dt &= \int_0^1 \beta \psi_{\alpha+1, \beta}(t) dt = [-t^{\alpha} \cdot (1-t)^{\beta}]_0^1 - \int_0^1 -\alpha t^{\alpha-1} \cdot (1-t)^{\beta} dt \\ &= \alpha \int_0^1 \psi_{\alpha, \beta+1}(t) dt. \end{aligned}$$

En remarquant enfin que

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \psi_{\alpha, \beta+1}(t) = t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} - t^{\alpha} (1-t)^{\beta-1} = \psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha+1, \beta}(t),$$

on obtient

$$B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot [B(\alpha, \beta) - B(\alpha + 1, \beta)]$$

par linéarité de l'intégrale (d'après [9.], les fonctions $\psi_{\alpha, \beta}$ et $\psi_{\alpha+1, \beta}$ sont intégrables sur $]0, 1[$).

En simplifiant, on obtient bien

$$B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta).$$

Une relation entre B et Γ

11. Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors $\alpha + 1 > 0$ et $\beta + 1 > 0$. On déduit alors de ce qui précède :

$$B(\alpha + 1, \beta + 1) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1} B(\alpha, \beta + 1) \quad (\text{d'après [10.c.]})$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1} B(\beta + 1, \alpha) \quad (\text{d'après [10.a.]})$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1} \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta} B(\beta, \alpha) \quad (\text{d'après [10.c.]})$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\beta + \alpha)(\beta + \alpha + 1)} B(\alpha, \beta) \quad (\text{d'après [10.a.]})$$

D'après (3),

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha\beta}{(\beta + \alpha)(\beta + \alpha + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

On a ainsi démontré que

$$B(\alpha + 1, \beta + 1) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \iff B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

quels que soient α et β strictement positifs.

• Par récurrence immédiate, on en déduit que

$$\forall \alpha, \beta > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B(\alpha + n, \beta + n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma((\alpha + n) + (\beta + n))} \iff B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Il suffit donc d'établir la relation (6) pour α et β strictement supérieurs à un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour que cette relation soit démontrée pour tous α et β strictement positifs.

Dans la suite, nous pourrions donc supposer que $\alpha > 2$ et $\beta > 2$ sans perdre en généralité.

12. a. Comme α et β sont strictement supérieurs à 2, alors la fonction $\psi_{\alpha, \beta}$ est maintenant de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0, 1]$. (De plus, elle est nulle ainsi que sa dérivée en $t = 0$ et en $t = 1$.)

D'après l'inégalité des accroissements finis, toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne sur ce segment. Il existe donc un réel $A_{\alpha, \beta} > 0$ tel que

$$\forall 0 \leq x, y \leq 1, \quad |\psi_{\alpha, \beta}(x) - \psi_{\alpha, \beta}(y)| \leq A_{\alpha, \beta}|x - y|.$$

12. b. D'après la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\begin{aligned} |u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \psi_{\alpha, \beta}(k/n) - \psi_{\alpha, \beta}(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} |\psi_{\alpha, \beta}(k/n) - \psi_{\alpha, \beta}(t)| dt. \end{aligned}$$

D'après la propriété de Lipschitz établie à la question précédente,

$$|u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \underbrace{A_{\alpha, \beta}}_{\geq 0} (t - k/n) dt = A_{\alpha, \beta} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1/n} u du = \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n}$$

en effectuant le changement de variable (affine!) $u = t - k/n$.

12. c. Comme α et β sont strictement supérieurs à 2, les réels $\alpha - 1$ et $\beta - 1$ sont strictement supérieurs à 1, ce qui nous permet d'appliquer les résultats établis à la question [8.].

• D'après [8.a.], comme $0 \leq x < 1$, les deux séries $\sum n^{\alpha-1} x^n$ et $\sum n^{\beta-1} x^n$ sont absolument convergentes. Par conséquent (théorème sur le produit de Cauchy),

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n k^{\alpha-1} (n-k)^{\beta-1} \stackrel{(*)}{=} n^{\alpha+\beta-2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1} = n^{\alpha+\beta-1} u_n(\alpha, \beta).$$

Le terme en $k = n$ a disparu (*) car il est nul. (On aurait pu également faire disparaître le terme en $k = 0$, qui est nul lui aussi.)

• On peut simplifier la différence des sommes de deux séries absolument convergentes (puisque $0 \leq x < 1$) et appliquer l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} |S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha, \beta) n^{\alpha+\beta-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) x^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1} |u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| |x|^n. \end{aligned}$$

On déduit alors de [12.b.] que

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad |S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2} x^n = \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} \cdot S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

• D'après l'encadrement précédent,

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad |S_\alpha(x)S_\beta(x) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta} - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta}| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} \cdot S_{\alpha+\beta-1}(x) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta}$$

puisque le facteur $(1-x)^{\alpha+\beta}$ est positif.

Comme $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ et $\alpha + \beta - 1$ sont tous strictement supérieurs à 1, on peut déduire de [8.b.] que

$$\lim_{x \rightarrow 1} S_\alpha(x)S_\beta(x) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta} = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta} = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta)$$

mais aussi que

$$S_{\alpha+\beta-1}(x) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \Gamma(\alpha + \beta - 1) \cdot (1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$

Par encadrement, on a donc

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta)$$

pour $\alpha > 2$ et $\beta > 2$ et donc en fait [11.] pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

La formule des compléments

13. D'après [12.c.],

$$\forall 0 < \alpha < 1, \quad B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha + 1 - \alpha)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha).$$

Or la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$ (rappelé dans le préambule), donc la fonction $[\alpha \mapsto B(\alpha, 1 - \alpha)]$ est continue sur $]0, 1[$.

On peut aussi appliquer le Théorème de continuité des intégrales en fonction d'un paramètre :

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 \Psi(\alpha, t) dt \quad \text{avec} \quad \Psi(\alpha, t) = \psi_{\alpha, 1-\alpha}(t) = \exp[\alpha \ln t + (1 - \alpha) \ln(1 - t)].$$

Ce n'est pas particulièrement compliqué (même s'il faut faire attention pour la domination : $\ln t$ et $\ln(1 - t)$ sont strictement négatifs), mais c'est une perte de temps.

14. a. Posons $\alpha = \frac{2p+1}{2q}$.

Avec $0 < p < q$, on a $p+1 \leq q$ (inégalité entre entiers) et il est clair que $0 < \alpha < \frac{2q}{2q} = 1$. On déduit de [10.b.] que

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} \cdot \frac{dt}{t}.$$

L'application $[u \mapsto u^{2q}]$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même et en posant $t = u^{2q}$, on obtient $\ln t = 2q \ln u$ et donc

$$\frac{dt}{t} = 2q \frac{du}{u}.$$

|| La dérivée logarithmique mérite vraiment d'être plus connue!

D'après le Théorème de changement de variable,

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{(2p+1)/(2q)}}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2p+1}}{1+u^{2q}} \cdot 2q \cdot \frac{du}{u} = 2q \int_0^{+\infty} \frac{u^{2p}}{1+u^{2q}} du.$$

14. b. Posons $P = X^{2p}$ et $Q = 1 + X^{2q}$. Pour calculer la décomposition en éléments simples de la fraction P/Q , il faut d'abord factoriser le dénominateur Q .

• Pour résoudre $z^{2q} = -1 = e^{i\pi}$ dans $\mathbb{C}$, il suffit de connaître les racines $2q$ -ièmes de l'unité : le polynôme Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et ces racines sont

$$\forall 0 \leq \ell < 2q, \quad \omega_\ell = e^{i\pi/(2q)} \cdot e^{i2k\pi/(2q)} = e^{i(2\ell+1)\pi/(2q)}.$$

Pour $0 \leq \ell < q$, l'argument $\frac{(2\ell+1)\pi}{2q}$ appartient à l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ (la partie imaginaire de ω_ℓ est donc strictement positive) et $\omega_{q+\ell} = -\omega_\ell$.

|| On connaît les racines, leurs multiplicités respectives et le coefficient dominant du polynôme, on peut donc le factoriser.

Par conséquent,

$$Q = X^{2q} + 1 = \prod_{\ell=1}^q (X - \omega_\ell)(X + \omega_\ell).$$

Comme $p < q$, alors $\deg P < \deg Q$, donc la partie entière de la fraction est nulle et comme le dénominateur Q est scindé à racines simples, la décomposition en éléments simples cherchée est de la forme

$$\frac{P}{Q} = \sum_{\ell=0}^{q-1} \left(\frac{c_\ell}{X - \omega_\ell} + \frac{c_{q+\ell}}{X + \omega_\ell} \right)$$

avec

$$\forall 0 \leq k < 2q, \quad c_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{\omega_k^{2p}}{2q\omega_k^{2q-1}} = \frac{-\omega_k^{2p+1}}{2q}$$

puisque, par définition, $\omega_k^{2q} = -1$.

Il faut connaître cette méthode pour décomposer en éléments simples une fraction dont tous les pôles sont simples !
La forme a priori de la décomposition en éléments simples nous dit que

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^r \frac{c_k}{z - \omega_k} \underset{z \rightarrow \omega_k}{\sim} \frac{c_k}{z - \omega_k}.$$

Mais comme ω_k est un pôle simple de la fraction, on a $P(\omega_k) \neq 0$, $Q(\omega_k) = 0$ et $Q'(\omega_k) \neq 0$. Par conséquent,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \underset{z \rightarrow \omega_k}{\sim} \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k) \cdot (z - \omega_k)}$$

et on conclut par unicité de l'équivalent. (L'équivalent du dénominateur découle de la formule de Taylor pour les polynômes.)

Comme $\omega_{q+k} = -\omega_k$, on remarque que $c_{q+k} = -c_k$ pour $0 \leq k < q$.

|| Cette relation pouvait aussi se déduire de la parité de la fraction rationnelle.

Pour conclure, il reste à remarquer que $\omega_k = z_k$ pour tout entier $0 \leq k < q$!

14. c. Pour primitiver $\frac{1}{t-c}$, on fait apparaître la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\frac{1}{t-c} = \frac{1}{(t-a)-ib} = \frac{(t-a)+ib}{(t-a)^2+b^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(t-a)}{(t-a)^2+b^2} + ib \cdot \frac{1}{(t-a)^2+b^2}.$$

Les deux termes ont des primitives apparentes !

• Aucune des fractions qui apparaissent dans la décomposition en éléments simples n'est intégrable au voisinage de $+\infty$! Il faut donc revenir à un segment avant de passer à la limite.

Pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = \frac{-1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \int_0^x \left(\frac{1}{t-z_k} - \frac{1}{t+z_k} \right) dt.$$

Les primitives trouvées précédemment nous donnent :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{t-c} - \frac{1}{t+c} dt &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x-a)^2 + b^2}{a^2 + b^2} + i \operatorname{Arctan} \frac{x-a}{b} + i \operatorname{Arctan} \frac{a}{b} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \frac{(x+a)^2 + b^2}{a^2 + b^2} - i \operatorname{Arctan} \frac{x+a}{-b} + i \operatorname{Arctan} \frac{a}{-b} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x-a)^2 + b^2}{(x+a)^2 + b^2} + i \operatorname{Arctan} \frac{x-a}{b} + i \operatorname{Arctan} \frac{x+a}{b}. \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, cette intégrale tend vers $i\pi$, quels que soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. On a remarqué plus haut que $b_k = \operatorname{Im} z_k > 0$ pour tout $0 \leq k < q$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = \frac{-1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \cdot i\pi = \frac{-i\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}.$$

Il reste à remarquer que la somme des z_k^{2p+1} est en fait une somme géométrique.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} &= \sum_{k=0}^{q-1} e^{i(2k+1)(2p+1)\pi/(2q)} = e^{i(2p+1)\pi/(2q)} \sum_{k=0}^{q-1} [e^{i(2p+1)\pi/q}]^k \\ &= e^{i(2p+1)\pi/(2q)} \cdot \frac{1 - e^{i(2p+1)\pi}}{1 - e^{i(2p+1)\pi/q}} = \frac{i}{\sin \frac{(2p+1)\pi}{2q}} \end{aligned}$$

après factorisation par l'angle moitié. On a ainsi obtenue la relation attendue.

15. On déduit de [12.] que $B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ (puisque $\Gamma(\alpha+\beta) = \Gamma(1) = 1$).

On déduit de [14.] que $B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ pour tout rationnel $\alpha \in]0, 1[$ de la forme $r_{p,q} = (2p+1)/(2q)$.

Pour tout entier $q \geq 2$, la distance entre deux rationnels de la forme $r_{p,q}$ consécutifs est égale à $1/q$. Par conséquent, la distance d'un réel $\alpha \in]0, 1[$ à l'ensemble $\{r_{p,q}, 0 < p < q\}$ est inférieure à $1/q$, ce qui prouve que l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{2p+1}{2q}, 0 < p < q \right\}$$

est dense dans $]0, 1[$.

D'après [13.], la fonction $[\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)]$ est continue sur $]0, 1[$.

Il est clair que la fonction $[\alpha \mapsto \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}]$ est également continue sur $]0, 1[$.

Ces deux fonctions continues coïncident sur $\mathcal{Q}$, qui est une partie dense dans $]0, 1[$, donc ces deux fonctions sont égales sur $]0, 1[$ tout entier.

Partie D. L'opérateur d'Abel

Continuité de l'opérateur

16. La fonction f est, par hypothèse, continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle est bornée.

Comme $\alpha < 1$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{1}{(x-t)^\alpha} \right]$$

est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[0, x[$ et intégrable au voisinage de x (fonction de référence).

Par conséquent, en tant que produit d'une fonction continue et bornée par une fonction intégrable, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \right]$$

est intégrable sur l'intervalle ouvert $]0, x[$.

17. a. Pour $x = 0$, le membre de gauche est nul (par construction) et le membre de droite est égal à

$$0^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(0)}{(1-t)^\alpha} dt = 0$$

puisque $1-\alpha > 0$ et que l'intégrale est convergente (car $\alpha < 1$).

Pour $x \neq 0$, le changement de variable affine $t = xu$ est légitime et donne (avec $dt = x du$)

$$A_\alpha f(x) = \int_0^{x \cdot 1} \frac{f(x \cdot t/x)}{(x - x \cdot t/x)^\alpha} \cdot x \cdot \frac{dt}{x} = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(x \cdot u)}{(1-u)^\alpha} du.$$

17. b. On considère la fonction h définie par

$$\forall x \in [0, 1], \forall t \in [0, 1[, \quad h(x, t) = \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}.$$

Il est clair que $[x \mapsto f(xt)]$ est continue sur $[0, 1]$ pour tout $t \in [0, 1[$ (par continuité de f sur $[0, 1]$).

La fonction f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée. Et comme $\alpha < 1$, la fonction (de référence)

$$\left[t \mapsto \frac{1}{(1-t)^\alpha} \right]$$

est intégrable sur $[0, 1[$. L'encadrement

$$\forall x \in [0, 1], \forall t \in [0, 1[, \quad \left| \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \right| \leq \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$$

prouve que $[t \mapsto h(x, t)]$ est intégrable sur $[0, 1[$ pour tout $x \in [0, 1]$ (puisque le majorant est intégrable), mais il établit aussi la domination (ce majorant est indépendant de $x \in [0, 1]$).

D'après le Théorème de continuité, la fonction

$$\left[x \mapsto \int_0^1 h(x, t) dt \right]$$

est continue sur $[0, 1]$. Et comme $1 - \alpha > 0$, le facteur $[x \mapsto x^{1-\alpha}]$ est continu aussi sur $[0, 1]$. Par produit, la fonction $A_\alpha f$ est donc continue sur $[0, 1]$.

17. c. On vient de démontrer [17.b.] que $A_\alpha f \in E$ pour tout $f \in E$.

Par linéarité de l'intégrale, il est clair que A_α est linéaire. C'est donc un endomorphisme de E .

• Par ailleurs, la domination établie en [17.b.] nous donne, d'après l'inégalité triangulaire intégrale,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |A_\alpha f(x)| = x^{1-\alpha} \left| \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt \right| \leq x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} \|f\| = x^{1-\alpha} \frac{\|f\|}{1-\alpha} \leq \frac{\|f\|}{1-\alpha}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [0, 1]$: on peut donc passer à la borne supérieure pour obtenir

$$\forall f \in E, \quad \|A_\alpha f\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|f\|.$$

Cet encadrement prouve d'une part que l'endomorphisme A_α est continu et d'autre part que $\|A_\alpha\| \leq \frac{1}{1-\alpha}$.

• Les calculs qui précèdent montrent que, si la fonction f est constante sur $[0, 1]$, alors

$$\forall x \in [0, 1], \quad A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \frac{f(0)}{1-\alpha} \quad \text{et donc} \quad \|A_\alpha f\| = |A_\alpha f(1)| = \frac{\|f\|}{1-\alpha}.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall 0 < \alpha < 1, \quad \|A_\alpha\| = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Spectre de l'opérateur

18. a. Commençons avec $n = 1$. D'après [17.c.],

$$\forall x \in [0, 1], \quad |A_\alpha f(x)| \leq x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha} dt = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|f\| = \frac{x^\beta}{\beta} \|f\|$$

et d'après (3),

$$\frac{x^{n\beta} [\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{x^\beta \Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\beta)} = \frac{x^\beta}{\beta}.$$

• **HR** : On suppose qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |A_\alpha f(x)| \leq \frac{x^{n\beta} [\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|.$$

On a démontré au [17.a.] que

$$\forall x \in [0, 1], \quad A_\alpha^{n+1} f(x) = x^\beta \int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt.$$

On déduit de l'hypothèse de récurrence et de l'inégalité triangulaire intégrale que

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad |A_{\alpha}^{n+1}f(x)| &\leq x^{\beta} \int_0^1 \frac{x^{n\beta} t^{n\beta} [\Gamma(\beta)]^n \|f\|}{\Gamma(1+n\beta)} \cdot \frac{dt}{(1-t)^{\alpha}} \\ &\leq \frac{x^{(n+1)\beta} [\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| \int_0^1 t^{n\beta} (1-t)^{-\alpha} dt. \end{aligned}$$

Or $n\beta > 0$ et $1 - \alpha > 0$, donc

$$\int_0^1 t^{n\beta} (1-t)^{-\alpha} dt = B(n\beta + 1, 1 - \alpha) = B(n\beta + 1, \beta) = \frac{\Gamma(1+n\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+(n+1)\beta)}$$

d'après [12.c.]. On en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |A_{\alpha}^{n+1}f(x)| \leq \frac{x^{(n+1)\beta} [\Gamma(\beta)]^{n+1}}{\Gamma(1+(n+1)\beta)} \|f\|$$

et la propriété est ainsi démontrée par récurrence pour tout entier $n \geq 1$.

18. b. Par [17.c.], l'endomorphisme A_{α} est continu. Comme une composée d'applications continues est continue, l'endomorphisme A_{α}^n est continu pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Plus précisément, l'encadrement du [18.a.] nous donne

$$\forall x \in [0, 1], \quad |A_{\alpha}^n f(x)| \leq \frac{[\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|.$$

Le majorant est indépendant de x , on peut donc passer à la borne supérieure :

$$\forall f \in E, \quad \|A_{\alpha}^n f\| \leq \frac{[\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$$

ce qui prouve que l'application linéaire A_{α}^n est continue (déjà fait!) et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|A_{\alpha}^n\| \leq \frac{[\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

19. D'après (3) et [3.],

$$\frac{[\gamma\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{1}{n\beta\Gamma(n\beta)} \left([\gamma\Gamma(\beta)]^{1/\beta} \right)^{n\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n\beta} \right)$$

donc

$$\forall \gamma > 0, \quad \frac{[\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\gamma^n} \right).$$

Si on considère que la fonction Γ est une extension naturelle de la fonction factorielle, on ne doit pas être surpris que $\Gamma(1+n\beta)$ soit infiniment grand par rapport à toute suite géométrique.

• Soit $\lambda \neq 0$, une valeur propre de A_{α} . Alors λ^n est une valeur propre de A_{α}^n et $\|A_{\alpha}^n\| \geq |\lambda|^n$. Par conséquent,

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq \left(\frac{1}{|\lambda|} \right)^n \cdot \frac{[\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)}$$

mais cette inégalité est impossible d'après [18.b.].

La seule valeur propre possible de A_{α} est donc 0.

20. a. D'après [18.a.],

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad |\lambda^n A_{\alpha}^n f(x)| \leq \frac{[\lambda|\Gamma(\beta)]^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [0, 1]$ et d'après [19.], c'est le terme général d'une série absolument convergente.

L'estimation du [19.] montre que ce majorant est négligeable devant θ^n , quel que soit le réel $\theta > 0$, et on sait que la série géométrique $\sum \theta^n$ est absolument convergente pour tout $0 < \theta < 1$.

On a ainsi démontré que la série de fonctions $\sum \lambda^n A_{\alpha}^n f$ convergeait normalement sur $[0, 1]$ et donc uniformément sur $[0, 1]$.

• La convergence normale sur $[0, 1]$ d'une série de fonctions implique la convergence absolue en chaque point de $[0, 1]$. Pour une série à valeurs réelles, la convergence absolue implique la convergence, donc la fonction g est bien définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

• Par hypothèse, l'application f est continue ($f \in E$) et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les applications $\lambda^n A_\alpha^n f$ sont continues (puisque A_α est un endomorphisme de E [17.c.]).

La convergence uniforme conserve la continuité, donc g est continue sur $[0, 1]$.

Donc la fonction g appartient bien à l'espace vectoriel E .

20. b. Comme g est un vecteur de E , l'expression $(I_E - \lambda A_\alpha)(g) = g - \lambda A_\alpha g$ est bien définie.

La convergence normale sur $[0, 1]$ entraînant la convergence uniforme, on a donc démontré au [20.a.] que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k f \right\| = 0.$$

D'après [17.c.], l'application linéaire A_α est continue sur E . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lambda A_\alpha g &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda A_\alpha \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k f \right) && \text{(continuité de } A_\alpha) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \lambda^{k+1} A_\alpha^{k+1} f && \text{(linéarité de } A_\alpha) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda^k A_\alpha^k f && \text{(changement d'indice)} \\ &= g - \lambda^0 A_\alpha^0 f = g - f. \end{aligned}$$

|| Dans ces calculs, les limites sont prises dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ (il s'agit donc de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ pour des suites de fonctions continues).

On a ainsi démontré que $(I_E - \lambda A_\alpha)(g) = g - (g - f) = f$.

20. c. D'après [20.b.], chaque $f \in E$ admet au moins un antécédent $g \in E$ par $(I_E - \lambda A_\alpha)$.

• Cet antécédent est unique car l'application linéaire $(I_E - \lambda A_\alpha)$ est injective : en effet, s'il existait $g \in E$ tel que $g = \lambda A_\alpha g$, alors g serait un vecteur propre de A_α associé à la valeur propre $1/\lambda$ et on a démontré [19.] que A_α n'avait aucune valeur propre non nulle.

• L'application $(I_E - \lambda A_\alpha) : E \rightarrow E$ est donc bijective et la bijection réciproque est l'application qui à $f \in E$ associe la fonction g définie en [20.].

* * *

Il est intéressant de faire un point sur les questions topologiques rencontrées ici puisqu'on travaille alternativement sur trois espaces topologiques :

- l'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ pour la convergence simple ;
- l'espace $(E, \|\cdot\|)$ pour la convergence uniforme sur $[0, 1]$;
- l'espace $(L(E), \|\cdot\|)$ des endomorphismes continus de E .

Ainsi, il faut clairement distinguer

1. l'égalité dans $\mathbb{R}$

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f(x)$$

où le second membre est la somme d'une série numérique convergente qui définit la fonction g "point par point", égalité qui traduit en fait

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| g(x) - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k f(x) \right| = 0 \quad (11)$$

2. l'égalité dans E

$$(I_E - \lambda A_\alpha)^{-1}(f) = g = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$$

où le second membre est la somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément sur $[0, 1]$, égalité qui traduit en fait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| g - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k f \right\| = 0 \quad (12)$$

3. et l'égalité dans $L(E)$

$$(I_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha$$

où le second membre est la somme d'une série convergente de vecteurs dans $L(E)$. Il faut comprendre que cette égalité traduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| (I_E - \lambda A_\alpha)^{-1} - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k \right\| = 0. \quad (13)$$

Seules les deux premières relations ont été démontrées ([20.a.] et [20.b.]), la troisième relation (13) n'a pour sa part même pas été étudiée!

• La relation (11) est une conséquence de la relation (12), puisque la convergence uniforme sur $[0, 1]$ implique la convergence simple sur $[0, 1]$.

De même, la relation (12) est une conséquence de la relation (13) : sachant que

$$\forall T \in L(E), \forall f \in E, \quad \|Tf\| \leq \|T\| \|f\|,$$

si $\|T_n - T\|$ tend vers 0, alors $\|T_n f - T f\|$ tend vers 0 pour tout $f \in E$.

Ces deux implications sont analogues mais pas équivalentes. En effet, la convergence d'une suite d'endomorphismes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L(E)$ pour la norme $\|\cdot\|$ est, par définition de la norme $\|\cdot\|$, la convergence uniforme sur la sphère unité de E (ou sur la boule unité de E , comme on veut) :

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|f\|=1} \|(T_n - T)(f)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|(T_n - T)(f)\|$$

et, dans ce cas particulier, la convergence uniforme sur la sphère unité de E implique en fait la convergence simple sur E tout entier — et pas seulement sur la sphère unité de E .

• On a rappelé le fait bien connu que, dans l'espace $(E, |\cdot|)$, la convergence absolue d'une série impliquait sa convergence.

On a démontré [20.a.] que la série de fonctions $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ convergerait uniformément sur $[0, 1]$ en démontrant qu'elle convergerait normalement sur $[0, 1]$. Autrement dit, on a prouvé que la série $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ convergerait absolument dans $(E, \|\cdot\|)$ et on en a déduit que cette série convergerait, sa somme étant la fonction $g \in E$.

Ici, l'espace E n'est pas un espace de dimension finie et pourtant la convergence absolue d'une série de vecteurs de E implique la convergence de cette série : on dit que l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet** (ou est un **espace de Banach**).

• L'encadrement établi en [18.b.] prouve que la série d'endomorphismes continus $\sum \lambda^n A_\alpha^n$ converge absolument dans $(L(E), \|\cdot\|)$. Comme $L(E)$ n'est pas non plus un espace de dimension finie, on n'est pas sûr que cette série converge dans $(L(E), \|\cdot\|)$... C'est pourtant bien le cas!

Dans un premier temps, il faut vérifier que l'endomorphisme $(I_E - \lambda A_\alpha)^{-1}$ défini en [20.c.] appartient bien à $L(E)$. C'est un endomorphisme de E et il est continu sur E puisque

$$\forall f \in E, \quad \|(I_E - \lambda A_\alpha)^{-1} f\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|\lambda^n A_\alpha^n f\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|\lambda^n A_\alpha^n\| \|f\|$$

où on a invoqué l'inégalité triangulaire sur les séries absolument convergentes dans $(E, \|\cdot\|)$. On en déduit que $(I_E - \lambda A_\alpha)^{-1}$ est continu sur E et que

$$\|(I_E - \lambda A_\alpha)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|\lambda^n A_\alpha^n\|,$$

cette série étant convergente d'après [19.].

Dans un second temps, il faut vérifier que la suite des sommes partielles converge bien (pour la norme $\|\cdot\|$) vers ce vecteur de $L(E)$. Il s'agit alors de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| (I_E - \lambda A_\alpha)^{-1} - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k \right\| = 0,$$

c'est-à-dire (en revenant à la définition de $\|\cdot\|$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|f\|=1} \left\| (I_E - \lambda A_\alpha)^{-1}(f) - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k f \right\| = 0.$$

Mais, dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$,

$$\forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (I_E - \lambda A_\alpha)^{-1}(f) - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k f = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k A_\alpha^k f$$

et par inégalité triangulaire (la série étant absolument convergente),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in E, \quad \left\| (I_E - \lambda A_\alpha)^{-1}(f) - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k f \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\lambda^k A_\alpha^k\| \|f\|.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\| (I_E - \lambda A_\alpha)^{-1} - \sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\lambda^k A_\alpha^k\|$$

où le majorant est le reste d'une série convergente ([18.b.] et [19.]), ce qui permet de conclure.

♣ À lire et à relire... Il faut d'une part comprendre qu'on raisonne toujours de la même façon mais que ces trois situations sont analogues et non identiques.

Formule d'inversion d'Abel

21. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+$. D'après [17.a.],

$$\forall x \in [0, 1], \quad A_\alpha e_\theta(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{x^\theta t^\theta}{(1-t)^\alpha} dt = x^{\theta+1-\alpha} \int_0^1 t^\theta (1-t)^{-\alpha} dt = x^{\theta+1-\alpha} B(\theta+1, 1-\alpha).$$

Autrement dit,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+, \quad A_\alpha e_\theta = B(\theta+1, 1-\alpha) \cdot e_{\theta+(1-\alpha)}.$$

21. b. D'après la question précédente, sachant que $\beta = 1 - \alpha$,

$$\begin{aligned} (A_\beta \circ A_\alpha) e_n &= B(n+1, 1-\alpha) \cdot A_\beta e_{n+(1-\alpha)} = B(n+1, \beta) \cdot A_\beta e_{n+\beta} \\ &= B(n+1, \beta) \cdot B(n+\beta+1, 1-\beta) \cdot e_{n+\beta+(1-\beta)} = B(n+1, \beta) \cdot B(n+1+\beta, \alpha) \cdot e_{n+1} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+2)} \cdot e_{n+1} && \text{(par [12.c.])} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{n+1} \cdot e_{n+1} && \text{(par (4))} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \cdot \frac{e_{n+1}}{n+1}. && \text{(par [15.])} \end{aligned}$$

22. On vient de démontrer [21.b.] que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A_\beta \circ A_\alpha)(e_n) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \cdot P e_n.$$

Il s'agit d'une relation de proportionnalité entre deux applications *linéaires* et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *base* du sous-espace des applications polynomiales, donc cette relation de proportionnalité est encore vraie sur l'espace des applications polynomiales.

|| Pas de calculs ici ! Il s'agit d'un exemple typique de raisonnement linéaire, qui montre l'intérêt pratique des bases pour étudier des endomorphismes.

23. a. Si $f \in E$, alors Pf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ (Théorème fondamental), donc $Pf \in E$ et P est clairement linéaire, donc P est un endomorphisme de E .

♣ De plus, d'après l'inégalité triangulaire intégrale, pour tout $f \in E$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |Pf(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \|f\| x \leq \|f\|.$$

Le majorant est indépendant de x , on peut donc passer à la borne supérieure et en déduire que

$$\forall f \in E, \quad \|Pf\| \leq \|f\|,$$

ce qui prouve d'une part que l'application linéaire P est continue et d'autre part que $\|P\| \leq 1$.

♣ Si f est la fonction constante égale à 1, alors $f \in E$ et $\|f\| = 1$. De plus,

$$\forall x \in [0, 1], \quad Pf(x) = x$$

donc $\|Pf\| = 1 = \|f\|$. De ce fait, $\|P\| = 1$.

23. b. On pose $\gamma = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$.

D'après [17.c.], l'application $A_\beta \circ A_\alpha$ est continue sur E et d'après [23.a.], l'application $\gamma \cdot P$ est continue sur E .

De plus, d'après [22.], $\gamma \cdot P$ et $A_\beta \circ A_\alpha$ coïncident sur le sous-espace vectoriel F des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$. Or, d'après le Théorème de Weierstrass, ce sous-espace F est dense dans E (puisque la norme choisie sur E est la norme de la convergence uniforme sur le segment $[0, 1]$).

Par conséquent, $\gamma \cdot P$ et $A_\beta \circ A_\alpha$ coïncident sur l'espace E tout entier :

$$\forall f \in E, \quad (A_\beta \circ A_\alpha)f = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \cdot Pf.$$

24. D'après le Théorème fondamental, Pf est une primitive de f . Par conséquent, si $Pf = 0_E$, alors $f = (Pf)' = 0_E$.

• Comme l'opérateur P est injectif, la composée $A_\beta \circ A_\alpha$ est injective et en particulier A_α est injectif.

|| *Le spectre de A_α est donc vide : il ne contient ni 0, ni aucun scalaire non nul.*