13
Espaces probabilisés

1. Une expérience est ***aléatoire*** lorsqu'il n'est pas possible d'en prévoir le résultat ou plus largement lorsqu'il n'est pas simple d'en prévoir le résultat avec une marge d'erreur acceptable.

2. La théorie mathématique des probabilités permet de traiter les problèmes aléatoires simples en définissant les règles de calcul dans un ***espace probabilisé***

$$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}).$$

On traite les problèmes complexes au moyen de ***variables aléatoires*** définies sur cet espace probabilisé.

I
Axiomatique

3. Notations
On utilise le symbole $\sqcup$, au lieu de $\cup$, pour écrire l'union de parties qui sont deux à deux disjointes.
Lorsque de nombreux ensembles sont considérés, on peut remplacer le symbole $\cap$ par une virgule ou l'omettre, de telle sorte que l'intersection $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ peut être abrégée en

$$A_1, A_2, \dots, A_n \quad \text{ou en} \quad A_1 A_2 \cdots A_n.$$

I.1 Tribus

4. Soient E, un ensemble et $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$, un ensemble de parties de E.
4.1 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est* **stable par intersection** *lorsque*

$$\forall\, A, B \in \mathcal{E}, \qquad A \cap B \in \mathcal{E}.$$

4.2 Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par intersection, alors il est ***stable par intersection finie*** : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\forall\, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}, \qquad A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{E}.$$

4.3 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est dit* **stable par intersection dénombrable** *lorsque, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$,*

$$\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \in \mathcal{E}.$$

4.4 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est* **stable par union** *lorsque*

$$\forall\, A, B \in \mathcal{E}, \qquad A \cup B \in \mathcal{E}.$$

4.5 Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par union, alors il est ***stable par union finie*** : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\forall\, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}, \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{E}.$$

4.6 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est* **stable par union dénombrable** *lorsque, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$,*

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \in \mathcal{E}.$$

4.7 ✍ *L'ensemble $\mathcal{E}$ est dit* **stable par passage au complémentaire** *lorsque*

$$\forall\, A \in \mathcal{E}, \qquad A^c \in \mathcal{E}.$$

5.1 ✍ *Une* **algèbre (de Boole)** *sur E est une partie $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$, non vide, stable par intersection, par union et par passage au complémentaire.*
5.2 Toute algèbre de Boole sur E contient $\varnothing$ et E.
5.3 ✍ *Une* **tribu**, *ou* σ**-algèbre de Boole**, *sur E est un ensemble non vide $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$ qui est :*
1. *stable par intersection dénombrable,*
2. *stable par union dénombrable et*
3. *stable par passage au complémentaire.*

5.4 ✍ *Les éléments d'une tribu $\mathcal{E}$ sont les* **parties mesurables** *de E.*
5.5 ✍ *Pour tout ensemble E, l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ est une tribu sur E, appelée* **tribu discrète** *sur E.*
5.6 ✍ *Pour toute partie A de E, la famille*

$$\sigma(A) = \{\varnothing, A, A^c, E\}$$

est une tribu sur E, dite **tribu engendrée par** *A.*

I.2 Mesures de probabilité

6. Soit $\mathcal{E}$, une tribu sur un ensemble E.
6.1 ✍ *Une application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est* **additive** *lorsque, pour toute famille finie $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de parties mesurables deux à deux disjointes,*

$$f\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} f(A_k).$$

6.2 ✍ *Une application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est* σ**-additive** *lorsque, pour toute famille dénombrable $(A_k)_{k\in I}$ de parties mesurables deux à deux disjointes, la famille $(f(A_k))_{k\in I}$ est sommable et*

$$f\Big(\bigsqcup_{k\in I} A_k\Big) = \sum_{k\in I} f(A_k).$$

6.3 ✍ *Soit $\mathcal{E}$, une tribu sur un ensemble E. On appelle* **(mesure de) probabilité** *sur $(E, \mathcal{E})$ toute application σ-additive*

$$\mu : \mathcal{E} \to [0, 1]$$

telle que $\mu(E) = 1$.
6.4 ➙ *Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{E}$, alors $\mu(\varnothing) = 0$.*

I.3 Espaces probabilisés

7. La théorie des probabilités, en tant que discipline mathématique, peut et doit être fondée sur des axiomes exactement de la même manière que la Géométrie et l'Algèbre. [...]
[Ainsi, le concept d'espace probabilisé] est défini comme un système d'ensembles qui vérifie certaines conditions. Ce que représentent les éléments de ces ensembles n'est d'aucune importance dans le développement strictement mathématique de la théorie des probabilités (cf. l'introduction des concepts géométriques de base dans les *Fondements de la Géométrie* de Hilbert, ou les définitions des groupes, anneaux et corps en algèbre générale).

A.N. Kolmogorov
Fondements de la théorie des probabilités (ch. 1)

7.1 ✍ *Un* **espace probabilisé** $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ *est composé d'un ensemble Ω, d'une* **tribu** $\mathfrak{A}$ *sur Ω et d'une* **mesure de probabilité** P *sur $\mathfrak{A}$.*
7.2 ✍ *Le couple $(\Omega, \mathfrak{A})$ est un* **espace probabilisable**.
7.3 ✍ *Les éléments de la tribu $\mathfrak{A}$ sont appelés* **évènements (aléatoires)**.
7.4 En pratique, l'ensemble Ω reste *indéterminé* et la puissance de la théorie probabiliste réside précisément dans ce fait. L'ensemble $\mathfrak{A}$, qui est une σ-algèbre sur Ω, reste par conséquent indéterminé lui aussi.

8. Vocabulaire probabiliste
Tout évènement $A \in \mathfrak{A}$ est une partie de Ω et les opérations sur les évènements sont donc des opérations sur les ensembles.
8.1 La stabilité de $\mathfrak{A}$ par passage au complémentaire signifie que le ***contraire*** d'un évènement A, représenté par A^c, est encore un évènement.

8.2 De même, la ***conjonction*** de deux évènements A et B, ou réalisation de A *et* de B représentée par $A \cap B$, est encore un évènement.
La ***disjonction*** de deux évènements, ou réalisation de A *ou* B représentée par $A \cup B$, est encore un évènement.
8.3 L'évènement ***impossible*** est représenté par l'ensemble vide $\varnothing$ et l'évènement ***certain*** par Ω.
8.4 Deux évènements représentés par des parties disjointes sont dits ***incompatibles*** : la réalisation conjointe de ces deux évènements est impossible.
8.5 L'évènement B est une ***conséquence*** de l'évènement A si, et seulement si, $A \subset B$.
8.6 L'ensemble des évènements est l'ensemble de définition de la mesure de probabilité P : le réel $\mathsf{P}(A)$ est défini si, et seulement si, l'ensemble A est un évènement, c'est-à-dire $A \in \mathfrak{A}$.
8.7 La probabilité $\mathsf{P}(A)$ sert à situer l'évènement $A \in \mathfrak{A}$ sur une échelle qui va de l'évènement impossible à l'évènement certain Ω.

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \quad 0 = \mathsf{P}(\varnothing) \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(\Omega) = 1$$

I.4 Règles du calcul des probabilités

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, un espace probabilisé.
9.1 ➞ *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, la série $\sum \mathsf{P}(A_n)$ est convergente et*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

9.2 ➞

$$\mathsf{P}(\varnothing) = 0$$

9.3 Si les évènements A et B sont incompatibles, alors

$$\mathsf{P}(A \sqcup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

9.4 ➞

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \qquad \mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$$

9.5 Si A et B sont deux évènements tels que $A \subset B$, alors

$$B = A \sqcup (B \cap A^c) \quad \text{et} \quad \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \cap A^c).$$

9.6 ➞ *La mesure de probabilité P est* **croissante** *au sens où, quels que soient les évènements A et B,*

$$A \subset B \Longrightarrow \mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B).$$

9.7 Quelles que soient les évènements A et B, les parties

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \cap B^c \quad \text{et} \quad A^c \cap B$$

sont des évènements et →[87]

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \sqcup (A \cap B^c),\\ A \cup B &= A \sqcup (A^c \cap B) = (A \cap B^c) \sqcup B\\ &= (A \cap B^c) \sqcup (A^c \cap B) \sqcup (A \cap B). \end{aligned}$$

9.8 ➞

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{A}, \quad \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$$

9.9 ➞ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quels que soient $A_0, \dots, A_n$ dans $\mathfrak{A}$,*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(A_k).$$

9.10 ➞

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{A}, \quad \mathsf{P}(A \cap B^c) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B)$$

10. Exemples
Soient A et B, deux évènements.
1. On suppose que $\mathsf{P}(A) = 1/3$ et $\mathsf{P}(B) = 1/2$. Calculer la probabilité de $\mathsf{P}(B \cap A^c)$ lorsque :
1.a Les évènements A et B sont incompatibles ;
1.b L'évènement B est une conséquence de A ;
1.c La probabilité de $A \cap B$ est égale à $1/8$.
2. Avec $\mathsf{P}(A) = 1/2$, $\mathsf{P}(B) = 1/5$ et $\mathsf{P}(A \cap B) = 1/10$, calculer la probabilité pour que :
2.a Au moins l'un des deux évènements soit réalisé ;
2.b Aucun des deux évènements ne soit réalisé ;
2.c Exactement un des deux évènements soit réalisé.
3. On suppose que $\mathsf{P}(A) = 4/10$ et $\mathsf{P}(B) = 7/10$. Quelles sont les valeurs extrêmes possibles pour $\mathsf{P}(A \cap B)$?

11. Continuité monotone
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'évènements.
11.1 On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite ***croissante*** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n \subset A_{n+1}.$$

1. La suite de terme général $\mathsf{P}(A_n)$ est convergente.
2. On pose $B_0 = A_0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad B_n = A_n \cap A_{n-1}^c.$$

La famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

11.2 ➞ Continuité croissante
Pour toute suite croissante d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\mathsf{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

11.3 Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***décroissante*** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} \subset A_n,$$

alors la suite de terme général $\mathsf{P}(A_n)$ est convergente et la suite $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements.
11.4 ➞ Continuité décroissante
Pour toute suite décroissante d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\mathsf{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

12. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'évènements. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$B_n = \bigcup_{m=0}^{n} A_m.$$

12.1 La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

12.2 ➞ *Pour toute suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}(A_n).$$

13. Pour toute suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big) = \mathsf{P}\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big).$$

I.5 Évènements négligeables

14. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
14.1 ✍ *Un évènement* $A \in \mathfrak{A}$ *est* **négligeable** *lorsque* $\mathbf{P}(A) = 0$.
14.2 ✍ *Un évènement* $A \in \mathfrak{A}$ *est* **presque sûr** *lorsque* $\mathbf{P}(A) = 1$.
14.3 Si $\Omega_0 \in \mathfrak{A}$ est presque sûr, alors $\mathbf{P}(A \cap \Omega_0) = \mathbf{P}(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$.
14.4 ✍ *Deux évènements* A *et* B *sont* **presque sûrement incompatibles** *lorsque* $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$.
14.5 Quelle que soit la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ définie sur $\mathfrak{A}$, l'évènement impossible $\varnothing$ est négligeable et l'évènement certain Ω est presque sûr.

15. Les notions d'***évènement négligeable*** et d'***évènement presque sûr*** sont relatives à la mesure de probabilité considérée sur $\mathfrak{A}$.
15.1 On lance une pièce de monnaie : les résultats possibles sont Pile et Face, mais le résultat de chaque lancer est imprévisible. On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{A})$ où la tribu $\mathfrak{A}$ peut être restreinte à une famille de quatre évènements : →**[5.6]**

$$\mathfrak{A} = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}.$$

(On rappelle qu'il est superflu de préciser l'ensemble Ω.)
1. La modélisation usuelle consiste à définir une mesure de probabilité $\mathbf{P}_0$ sur $\mathfrak{A}$ telle que

$$\mathbf{P}_0(A) = \mathbf{P}_0(A^c) = 1/2,$$

ce qui revient à supposer qu'on a autant de chances d'obtenir Pile que d'obtenir Face.
2. On peut définir deux autres mesures de probabilités $\mathbf{P}_P$ et $\mathbf{P}_F$ telles que

$$\mathbf{P}_P(A) = \mathbf{P}_F(A^c) = 1,$$

ce qui revient à truquer la pièce pour obtenir presque sûrement Pile (avec la mesure $\mathbf{P}_P$) ou presque sûrement Face (avec la mesure $\mathbf{P}_F$).
15.2 Plus généralement, si un évènement $A \in \mathfrak{A}$ n'est ni impossible, ni certain, alors pour tout $p \in [0, 1]$, on peut définir une mesure de probabilité $\mathbf{P}_0$ sur $\mathfrak{A}$ telle que $\mathbf{P}_0(A) = p$.

Règles de calcul sur les évènements négligeables

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
16. Un évènement $A \in \mathfrak{A}$ est négligeable si, et seulement si, l'évènement contraire A^c est presque sûr.

17. On considère deux évènements A et B tels que $A \subset B$.
17.1 Si l'évènement B est négligeable, alors l'évènement A est négligeable.
17.2 Si l'évènement A est presque sûr, alors l'évènement B est presque sûr.
17.3 Si $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$, alors l'évènement $B \cap A^c$ est négligeable.

18.1 ➙ *Une réunion finie ou dénombrable d'évènements négligeables est un évènement négligeable.*
18.2 ➙ *Une intersection finie ou dénombrable d'évènements presque sûrs est un évènement presque sûr.*

19. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'évènements deux à deux presque sûrement incompatibles :

$$\forall\, n \neq q, \quad \mathbf{P}(A_n \cap A_q) = 0.$$

19.1 Avec les notations de **[12]** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(B_{n+1}) = \mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}).$$

19.2 La série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ est convergente et

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

Entraînement

20. Questions pour réfléchir
1. Si $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$ est stable par intersection dénombrable (resp. par union dénombrable), alors $\mathcal{E}$ est stable par intersection (resp. par union).
2. On suppose que $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(E)$ est stable par passage au complémentaire. Alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par intersection (resp. par intersection dénombrable) si, et seulement si, il est stable par union (resp. par union dénombrable).
3. Une tribu est une algèbre de Boole.
4. Si E est un ensemble fini, toute algèbre de Boole sur E est une σ-algèbre.
5. Si une algèbre de Boole ne compte qu'un nombre fini d'éléments, alors c'est aussi une σ-algèbre de Boole.
6. Pour tout ensemble E, l'ensemble $\{\varnothing, E\}$ est une tribu sur E, appelée ***tribu grossière*** sur E.
7. Si f est une application additive sur une algèbre de Boole finie $\mathcal{E}$, alors f est une application σ-additive sur la tribu $\mathcal{E}$.
8. Toute mesure de probabilité est additive.
9. Il n'existe pas de mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ telle que la valeur de $\mu(\{k\})$ soit indépendante de $k \in \mathbb{N}$.
10. Si les évènements A et B sont incompatibles, alors

$$\mathbf{P}(A) \leqslant 1 - \mathbf{P}(B).$$

11. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles, alors la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ est convergente.
12. Généraliser le théorème **[9.8]** à l'union d'une famille finie d'évènements (***formule du crible***).
13. Dans quel cas la majoration **[12.2]** est-elle utile ?
14. *Suite de* **[12.2]** – Étudier le cas d'égalité.
15. Si $\mathbf{P}(A \cup B) = 0$, alors A et B sont négligeables.

21. Trace d'une tribu
Soit $\mathcal{E}$, une tribu sur E. Pour toute partie $B \subset E$, la ***trace*** de $\mathcal{E}$ sur B, définie par

$$\mathcal{E}_B = \{A \cap B,\ A \in \mathcal{E}\},$$

est une tribu sur B. La tribu $\mathcal{E}_B$ est contenue dans $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $B \in \mathcal{E}$.

22. Quels que soient les évènements $B_1, \dots, B_n$,

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k^c).$$

23. Soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, une famille d'évènements tous de même probabilité :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(A_k) = p.$$

Si, presque sûrement, l'un de ces évènements est réalisé, alors $p \geqslant 1/n$.

24. Lemme de Borel-Cantelli
Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements, on pose →**[79.4]**

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

1. La partie B est un évènement et

$$\mathbf{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\Big).$$

2. Si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors l'évènement B est négligeable et presque sûrement, à partir d'un certain rang, aucun des évènements A_n n'est réalisé :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\Big) = 1.$$

On trouvera plus loin **[52]** un complément de ce résultat.

25. Tribus complètes
Soit $(E, \mathcal{E}_0, \mathbf{P}_0)$, un espace probabilisé.
25.1 ✍ *Une tribu $\mathcal{E}$ sur E est* **complète** *lorsque toute partie A de E contenue dans une partie négligeable $N \in \mathcal{E}$ appartient à la tribu $\mathcal{E}$.*
25.2 On suppose que $\mathcal{E}_0$ est une tribu complète sur E. Étant donnée une partie A de E, s'il existe deux éléments A^- et A^+ de $\mathcal{E}_0$ tels que

$$A^- \subset A \subset A^+ \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_0(A^-) = \mathbf{P}_0(A^+),$$

alors $A \in \mathcal{E}_0$. Que vaut $\mathbf{P}_0(A)$ dans ce cas ?
25.3 ✍ *la* **tribu complétée** *de $\mathcal{E}_0$ est la plus petite tribu complète qui contienne la tribu $\mathcal{E}$.*
25.4 On note $\mathcal{E}$, l'ensemble des parties $A \subset E$ pour lesquelles il existe deux éléments A^- et A^+ de $\mathcal{E}_0$ tels que

$$A^- \subset A \subset A^+ \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_0(A^-) = \mathbf{P}_0(A^+).$$

Alors $\mathcal{E}$ est la tribu complétée de $\mathcal{E}_0$.
25.5 Il existe une, et une seule, mesure de probabilité $\mathbf{P}$ définie sur $\mathcal{E}$, tribu complétée de $\mathcal{E}_0$, telle que

$$\forall\, A \in \mathcal{E}_0, \quad \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_0(A).$$

26. Classes monotones
Soient μ_1 et μ_2, deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.
La classe $\mathscr{C}$ définie par

$$\mathscr{C} = \big\{A \in \mathcal{E} \;:\; \mu_1(A) = \mu_2(A)\big\}$$

contient $\varnothing$, est stable par passage au complémentaire et est stable par union dénombrable croissante : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour $\subset$ de parties mesurables qui appartiennent à $\mathscr{C}$, alors

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{C}.$$

II
Conditionnement

27. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
27.1 La notion de ***conditionnement*** apparaît lorsqu'on rapporte la réalisation d'un évènement quelconque A à la réalisation d'un évènement donné B : comment la probabilité de A varie-t-elle lorsqu'on apprend que B est réalisé ?
Autrement dit : quelle information sur A la réalisation de B apporte-t-elle ?
27.2 ✍ *Si l'évènement $B \in \mathfrak{A}$ n'est pas négligeable, alors la* **probabilité conditionnelle de** *$A \in \mathfrak{A}$* **sachant** *B est définie par*

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

27.3 Les évènements A et B sont presque sûrement incompatibles si, et seulement si, $\mathbf{P}(A \mid B) = 0$.
27.4 On dit que la réalisation de l'évènement B ***favorise*** la réalisation de A lorsque $\mathbf{P}(A \mid B) \geqslant \mathbf{P}(A)$ et qu'elle ***défavorise*** la réalisation de A lorsque $\mathbf{P}(A \mid B) \leqslant \mathbf{P}(A)$. $\rightarrow$**[35]**
Si $0 < \mathbf{P}(B) < 1$, alors

$$\mathbf{P}(A \mid B) \leqslant \mathbf{P}(A) \iff \mathbf{P}(A \mid B^c) \geqslant \mathbf{P}(A)$$

pour tout $A \in \mathfrak{A}$.
27.5 Les probabilités conditionnelles servent à calculer la probabilité de l'intersection de deux évènements.

— Si A et B sont deux évènements non négligeables, alors

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A).$$

— Si l'évènement A ou l'évènement B est négligeable, alors

$$\mathbf{P}(A \cap B) = 0.$$

28. ➙ *L'application $\mathbf{P}_B$ définie sur $\mathfrak{A}$ par*

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \quad \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B)$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{A})$.

II.1 Probabilités conditionnelles

29. La probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(A \mid B)$, comparée à la probabilité $\mathbf{P}(A)$, permet d'estimer l'influence de la réalisation de B sur la réalisation de A. En quelque sorte, A est un *effet* de la *cause* B. $\rightarrow$**[27.4]**
Dans cette perspective, la probabilité de A (calculée indépendamment de la réalisation, ou non, de B) est dite ***probabilité a priori*** et la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est dite ***probabilité a posteriori***.
La première formule de Bayes [30] renverse la perspective : sachant que l'effet A est observé, dans quelle mesure prouve-t-il la réalisation préalable de la cause B ?
30. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
30.1 ➙ **Première formule de Bayes**
Soient A et B, deux évènements non négligeables. Alors

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid B)\ \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

30.2 ➙ **Formule des probabilités composées [3]**
Soient $A_1, \dots, A_n$, des évènements tels que

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\,&\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\\ &\times \mathbf{P}(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots\\ &\times \mathbf{P}(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).\end{aligned}$$

31. Exemples
31.1 Soient A et B, deux évènements tels que

$$\mathbf{P}(B) = 1/2, \quad \mathbf{P}(A \mid B) = 1/2 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \mid B^c) = 1/6.$$

Alors $\mathbf{P}(B^c) = 1/2$, $\mathbf{P}(A^c \mid B) = 1/2$ et $\mathbf{P}(B \mid A) = 3/4$.
31.2 Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et sans remise trois boules. La probabilité pour que la première et la troisième boules soient noires et que la seconde soit blanche est égale à $4/35$.
32. Systèmes complets d'évènements [30]
En général, on ne conditionne pas par un seul évènement, mais par une famille d'évènements qui modélise l'ensemble des issues possibles d'une situation aléatoire.
32.1 ✍ *Soit $(\Omega, \mathfrak{A})$, un espace probabilisable. On appelle* **système complet d'évènements** *toute famille $(A_k)_{k\in I}$, finie ou dénombrable, d'évènements deux à deux incompatibles et tels que*

$$\Omega = \bigsqcup_{k\in I} A_k.$$

32.2 Pour tout $A \in \mathfrak{A}$, la famille (A, A^c) est un système complet d'évènements.

32.3 Soit $(A_k)_{k\in I}$, un système complet d'évènements.

1.
$$\sum_{k\in I} \mathbf{P}(A_k) = 1$$

2. Pour tout évènement $B \in \mathfrak{A}$,
$$B = \bigsqcup_{k\in I} (B \cap A_k) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(B) = \sum_{k\in I} \mathbf{P}(B \cap A_k)$$

33. ➙ *Suite de* **[30]** – *Soit $(A_k)_{k\in I}$, un système complet d'évènements non négligeables.*

33.1 Formule des probabilités totales
$$\forall\, B \in \mathfrak{A}, \quad \mathbf{P}(B) = \sum_{k\in I} \mathbf{P}(B \mid A_k)\,\mathbf{P}(A_k)$$

33.2 Deuxième formule de Bayes
Si $B \in \mathfrak{A}$ n'est pas négligeable, alors
$$\forall\, k \in I, \quad \mathbf{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_k)\,\mathbf{P}(B \mid A_k)}{\sum_{\ell\in I} \mathbf{P}(A_\ell)\,\mathbf{P}(B \mid A_\ell)}.$$

34. Exemples

34.1 On dispose de deux urnes : l'urne 1 contient deux boules blanches et trois bleues ; l'urne 2 contient trois boules blanches et quatre bleues. On tire une boule dans l'urne 1 et on la place dans l'urne 2. On tire alors une boule dans l'urne 2.

1. La probabilité pour que la première boule tirée soit bleue est égale à $3/5$.
2. La probabilité pour que la deuxième boule tirée soit bleue est égale à $23/40$.

34.2 Deux usines produisent des flaveurmètres bilobés. La première produit deux fois plus de flaveurmètres bilobés que l'usine 2. On estime à 20% (resp. à 5%) la proportion de flaveurmètres bilobés défectueux produits par l'usine 1 (resp. par l'usine 2).

1. La proportion de flaveurmètres produits par l'usine 1 est égale à $2/3$.
2. La proportion de flaveurmètres non défectueux est égale à $17/20$.
3. Si un flaveurmètre tiré au hasard de la production est défectueux, la probabilité pour que ce flaveurmètre ait été produit par l'usine 1 est égale à $8/9$.

II.2 Évènements indépendants

35. Comparaison de $\mathbf{P}(A \mid B)$ et de $\mathbf{P}(A)$ [27.4]
On munit l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ de la tribu discrète $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ et de la mesure de probabilité uniforme $\mathbf{P}$:
$$\forall\, k \in \Omega, \quad \mathbf{P}(\{k\}) = 1/6.$$

35.1 Les trois ensembles
$$A_0 = \{4,5,6\}, \quad B_0 = \{1,3,5\}, \quad C_0 = \{2,4,6\}$$
sont des évènements de probabilité $1/2$.

35.2 Les probabilités conditionnelles de A_0 sachant B_0 et sachant C_0 sont respectivement égales à $1/3$ et à $2/3$ de telle sorte que
$$\mathbf{P}(A_0 \mid B_0) < \mathbf{P}(A_0) < \mathbf{P}(A_0 \mid C_0).$$

35.3 Avec $A = \{2\}$, $B = \{2,4,6\}$ et $C = \{4,6\}$, on a
$$\mathbf{P}(A \mid B) = 1/3, \quad \mathbf{P}(B \mid A) = 1, \quad \mathbf{P}(C \mid B) = 2/3$$
et $\mathbf{P}(C \mid A) = 0$.

36. Indépendance de deux évènements
Soient A et B, deux évènements. L'égalité
$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$$
entre la ***probabilité a posteriori*** de A et la ***probabilité a priori*** de A **[29]** signifie que la réalisation de B n'a pas d'influence sur la réalisation de A.

36.1 ✍ *Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. Deux évènements A et B sont* **indépendants** *lorsque*
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B).$$

36.2 ➙ *Si les évènements A et B sont indépendants, alors les évènements A et B^c sont indépendants.*

36.3 ➙ *Si les évènements A et B ne sont pas négligeables, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les évènements A et B sont indépendants.*
2. $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$
3. $\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)$

36.4 Un évènement négligeable est indépendant de tout autre évènement.

36.5 Un évènement presque sûr est indépendant de tout autre évènement.

37. Famille quelconque d'évènements indépendants
La définition de l'indépendance pour une famille d'au moins trois évènements est un peu délicate, mais finalement peu utile. En effet, la plupart du temps, l'indépendance d'une famille d'évènements est une *hypothèse* faite pour modéliser une situation aléatoire. Il n'y a donc pour ainsi dire jamais d'occasion d'avoir à *prouver* l'indépendance d'une famille d'évènements.

37.1 ✍ *Une famille d'évènements $(A_k)_{k\in I}$ est une famille d'évènements* **(mutuellement) indépendants**, *ou* **globalement indépendants**, *lorsque*
$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k\in J} A_k\Big) = \prod_{k\in J} \mathbf{P}(A_k)$$
pour toute famille finie d'indices $J \subset I$.

37.2 ➙ *Si $(A_k)_{k\in I}$ est une famille d'évènements indépendants, alors toute sous-famille $(A_k)_{k\in J}$ est encore une famille d'évènements indépendants.*

37.3 Si les évènements $(A_k)_{k\in I}$ sont indépendants, alors
$$\forall\, i \neq j \in I, \quad \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(A_j)$$

37.4 Si les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants, alors
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(A_0 A_1 \cdots A_n) = \mathbf{P}(A_0)\,\mathbf{P}(A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n).$$

37.5 Lemme des coalitions
Soit $(A_k)_{k\in I}$, une famille d'évènements indépendants. Si
$$J_1 = \{i_1, \dots, i_m\} \quad \text{et} \quad J_2 = \{j_1, \dots, j_n\}$$
sont deux parties finies *disjointes* de I, alors les évènements
$$(A_{i_1} \dots A_{i_m}) \quad \text{et} \quad (A_{j_1} \dots A_{j_n})$$
sont indépendants :
$$\mathbf{P}\big[(A_{i_1} \dots A_{i_m}) \cap (A_{j_1} \dots A_{j_n})\big] = \mathbf{P}(A_{i_1} \dots A_{i_m})\,\mathbf{P}(A_{j_1} \dots A_{j_n}).$$

37.6 Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements indépendants, alors
$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathbf{P}(A_k).$$

38. Tribus indépendantes
Seule la notion de ***tribus indépendantes*** permet de comprendre ce que signifie l'***indépendance mutuelle*** des évènements.
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

38.1 ✍ *Les sous-tribus $\mathfrak{A}_1$, ..., $\mathfrak{A}_n$ de $\mathfrak{A}$ sont* **indépendantes*** *si, et seulement si,*

$$\mathbf{P}(B_1 B_2 \cdots B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)$$

quels que soient les évènements $B_1 \in \mathfrak{A}_1, \dots, B_n \in \mathfrak{A}_n$.

38.2 Une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements étant donnée, on considère les paires

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{F}_n = \{A_n, \Omega\}.$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'évènements indépendants si, et seulement si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, (B_1, \dots, B_n) \in \mathscr{F}_1 \times \cdots \times \mathscr{F}_n, \quad \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k).$$

38.3 Les évènements A_1, ..., $A_n \in \mathfrak{A}$ sont mutuellement indépendants si, et seulement si, les sous-tribus $\sigma(A_1)$, ..., $\sigma(A_n)$ qu'ils engendrent sont indépendantes.

38.4 En particulier, si les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors leurs complémentaires $A_1^c, \dots, A_n^c$ sont indépendants.

Entraînement

39. Questions pour réfléchir

1.a Si $0 < \mathbf{P}(B) < 1$, alors $\mathbf{P}(A)$ est compris entre $\mathbf{P}(A \mid B)$ et $\mathbf{P}(A \mid B^c)$.

1.b Quels sont les cas d'égalité ?

2. Que vaut $\mathbf{P}(A \mid \Omega)$?

3. Que dire d'un évènement $A \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$?

4. *Suite de* [**28**] – On suppose que l'évènement B n'est pas négligeable.

4.a Que vaut $\mathbf{P}_B(B)$?

4.b Que dire des évènements $A \in \mathfrak{A}$ tels que $\mathbf{P}_B(A) = 1$?

4.c Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(B)$.

4.d Si A et B sont incompatibles, alors A est négligeable pour $\mathbf{P}_B$ au sens où $\mathbf{P}(A \mid B) = 0$.

5. Si $\mathbf{P}(A \cap B) > 0$, alors :

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(B \mid A) \iff \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B).$$

6. Si $\mathbf{P}(A \mid B) \geqslant \mathbf{P}(A)$, alors $\mathbf{P}(B \mid A) \geqslant \mathbf{P}(B)$. →[**27.4**]

7. Soient A, B et C trois évènements. Si $0 < \mathbf{P}(C) < 1$,

$$\mathbf{P}(A \mid C) \geqslant \mathbf{P}(B \mid C) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \mid C^c) \geqslant \mathbf{P}(B \mid C^c),$$

alors $\mathbf{P}(A) \geqslant \mathbf{P}(B)$.

8. Si $\mathbf{P}(A) = 1/3$, $\mathbf{P}(B) = 1/5$ et $\mathbf{P}(A \mid B) + \mathbf{P}(B \mid A) = 2/3$, alors $\mathbf{P}(A^c \cup B^c) = 11/12$.

9. Soient B et C, deux évènements tels que $\mathbf{P}(B \cap C) > 0$. Alors

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \quad \mathbf{P}_C(A \mid B) = \mathbf{P}(A \mid B \cap C)$$

ou encore : $(\mathbf{P}_C)_B = \mathbf{P}_{BC}$.

10. Condition pour que

$$\mathbf{P}(A \mid C) = \sum_{k\in I} \mathbf{P}(A \mid B_k \cap C)\, \mathbf{P}(B_k \mid C).$$

11. Soient A_1, ..., A_n et B, des évènements tels que

$$\mathbf{P}(A_1 \cdots A_{n-1} B) > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cdots A_n \mid B) = \mathbf{P}(A_1 \mid B)\, &\mathbf{P}(A_2 \mid A_1 B) \\ &\times \mathbf{P}(A_3 \mid A_1 A_2 B) \cdots \\ &\times \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1} B).\end{aligned}$$

12. Soient $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, un système complet d'évènements et A, un évènement non négligeable. Si $\mathbf{P}(B_1 \mid A) < \mathbf{P}(B_1)$, alors il existe au moins un entier $2 \leqslant k \leqslant n$ tel que $\mathbf{P}(B_k \mid A) > \mathbf{P}(B_k)$.

13. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux systèmes complets d'évènements. Alors la famille $(A_n \cap B_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est un système complet d'évènements.

14. Si A et B sont deux évènements indépendants, alors A^c et B^c sont des évènements indépendants.

15. Soient A et B, deux évènements indépendants. Si B est une conséquence de A [**8.5**], alors A est négligeable ou B est presque sûr.

16. Si deux évènements sont presque sûrement incompatibles et indépendants, alors l'un des deux (au moins) est négligeables.

17. Si $\mathbf{P}(A \mid B) = 1/2$ et $\mathbf{P}(A \mid B^c) = 1/3$, alors les évènements A et B ne sont pas indépendants.

18. Si l'évènement A est indépendant de tous les évènements $B \in \mathfrak{A}$, alors $\mathbf{P}(A) = 0$ ou $\mathbf{P}(A) = 1$.

19. Si A et B sont deux évènements indépendants tels que $\mathbf{P}(A \cup B) = 1$, alors l'un des deux évènements au moins est presque sûr.

20. Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\mathbf{P}(A^c \mid B^c) = \mathbf{P}(A^c)$.

21. Soient A et B, deux évènements indépendants de probabilités respectives $1/3$ et $1/4$. Alors $\mathbf{P}(A \cup B^c \mid B) = 1/3$.

22. Soient A, B et C, trois évènements. On suppose que A et B sont indépendants et que

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 4\%, \quad \mathbf{P}(C \mid A \cap B) = 1/4, \quad \mathbf{P}(B) = 4\,\mathbf{P}(A).$$

Alors $\mathbf{P}(A \cup B) = 84\%$.

23. *Suite de* [**35**] – Citer une expérience aléatoire décrite par le modèle. Que signifient les évènements A, B et C ?

40. Soient A, B et C, trois évènements indépendants avec $\mathbf{P}(A) = 1/4$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$ et $\mathbf{P}(C) = 1/2$.

1. La probabilité pour qu'aucun de ces évènements ne soit réalisé est égale à $1/4$.

2. La probabilité pour qu'un seul de ces évènements soit réalisé est égale à $11/24$.

41. Soit $B \in \mathfrak{A}$, un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$. Deux évènements A et C sont indépendants pour la mesure de probabilité $\mathbf{P}_B$ si, et seulement si,

$$\mathbf{P}(C \mid A \cap B) = \mathbf{P}(C \mid B).$$

Dans un cadre markovien, les évènements A, B et C sont respectivement passé, présent et à venir. →[**53**]

42. Soient A et B, deux évènements. Si

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \mid B^c),$$

alors ces deux probabilités conditionnelles sont égales à $\mathbf{P}(A)$: les évènements A et B sont indépendants. →[**27.4**]

43. Soient $A \in \mathfrak{A}$ et $B \in \mathfrak{A}$ tels que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 3/4$. Alors

$$2/3 \leqslant \mathbf{P}(A \mid B) \leqslant 1.$$

44. Quand un tricheur tire une carte dans un jeu de 52 cartes, il est sûr de retourner un as.

1. La probabilité pour qu'un individu retourne un as en tirant une carte dans un jeu de 52 cartes est égale à $(1 + 12p)/13$, où p est la proportion de tricheurs dans la population.

2. Sachant qu'un individu a retourné un as, la probabilité pour qu'il soit un tricheur est égale à $13p/(12p + 1)$.

45. Une boîte contient neuf pièces : deux pièces normales, trois pièces truquées avec deux côtés Face et quatre pièces truquées avec deux côtés Pile.
Si on tire une pièce au hasard et qu'on la lance (sans l'examiner), on obtient Face avec probabilité $4/9$.

46. Un électeur indécis vote tantôt à gauche, tantôt à droite. Pour chaque scrutin, la probabilité pour qu'il vote comme au scrutin précédent est égale à $2/3$.

1. Au premier scrutin, il effectue son choix en tirant à Pile ou Face. Quelle est la probabilité pour qu'il vote à gauche lors des deux premiers scrutins et à droite lors des deux scrutins suivants ?

2. Au premier scrutin, il effectue son choix en tirant dans une urne qui contient une boule rouge (pour voter à gauche) et trois boules bleues (pour voter à droite). Quelle est la probabilité pour qu'il vote à droite au deuxième scrutin ?

47. Dans une usine, les machines M_1, M_2 et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production de ziglotrons à coulisse. Les taux de ziglotrons non conformes produits par ces machines sont respectivement 1%, 2% et 3%.

1. Un ziglotron prélevé dans l'ensemble de la production se révèle défectueux.

1.a Il y a environ 1 chance sur 4 pour qu'il ait été produit par la machine M_2.

1.b Pour quelles valeurs de $1 \leqslant k \leqslant 3$ la probabilité *a posteriori* $\mathsf{P}(M_k \mid D)$ pour que le ziglotron ait été produit par la machine M_k est-elle plus grande que la probabilité *a priori* $\mathsf{P}(M_k)$ pour que le ziglotron ait été produit par la machine M_k ?

2. Un ziglotron prélevé dans l'ensemble de la production se révèle conforme. Il y a environ 3 chances sur 10 pour qu'il ait été construit par la machine M_2. Expliquer.

48. Une particule émise par un matériau radioactif atteint une cible donnée avec une probabilité $p = 1\%$. On modélise ce phénomène aléatoire par une famille $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'évènements indépendants tels que $\mathsf{P}(A_n) = p$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. On attend que 10 particules soient émises. Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'une d'elles atteignent la cible ?

2. Pour quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$ la probabilité qu'au moins l'une des N premières particules émises atteigne la cible est-elle supérieure à 80% ?

49.1 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$, une suite d'évènements indépendants, de même probabilité p.

1. Pour tout entier $k \geqslant 1$, la probabilité de

$$B_k = A_1^c \cdots A_{2k-1}^c A_{2k}$$

est égale à $(1-p)^{2k-1}p$.

2. La probabilité de

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k$$

est égale à $(1-p)/(2-p)$.

49.2 Deux joueurs lancent deux dés à tour de rôle jusqu'à ce que le total des points soit égal à 7.

3. On peut utiliser le modèle précédent avec $p = 1/6$ pour décrire ce jeu.

4. L'évènement B correspond au fait que le second joueur gagne.

5. Donner un argument combinatoire prouvant que

$$\mathsf{P}(B) = (1-p)p + (1-p)^2\,\mathsf{P}(B)$$

et retrouver cette relation par le calcul.

50. Des personnes se transmettent une information : ou bien l'information est transmise fidèlement (avec probabilité p), ou bien elle est transformée en son contraire (avec probabilité $(1-p)$). On note p_n, la probabilité pour que la n-ième personne reçoive l'information correcte.

1.
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)$$

2.
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad p_n = \frac{1+(2p-1)^n}{2}$$

3. La limite de p_n est indépendante de $0 < p < 1$.

51. *Suite de* **[27.4]** – Soient A, B et C, trois évènements de probabilité strictement positive.

51.1 Si B favorise A, alors A favorise B et B^c défavorise A.

51.2 Si A favorise B et si B favorise C, alors A ne favorise pas nécessairement C. →**[35.3]**

52. Lemme de Borel-Cantelli (suite)
Soient $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'évènements indépendants. Le lemme de Borel-Cantelli énonce une ***loi de tout ou rien*** sur l'évènement : →**[79.4]**

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m \in \mathfrak{A}.$$

52.1

1.
$$\forall\, 0 \leqslant u \leqslant 1,\quad 0 \leqslant 1-u \leqslant \exp(-u)$$

2. Si $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la série $\sum u_n$ diverge, alors →**[6.188]**

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} (1-u_n) = 0.$$

52.2 Si la série $\sum \mathsf{P}(A_n)$ est convergente, alors l'évènement B est négligeable **[24]**.

52.3 Si la série $\sum \mathsf{P}(A_n)$ diverge, alors la famille $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements indépendants **[38.4]** et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \mathsf{P}\Big(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\Big) = 0,$$

donc l'évènement B est presque sûr.

53. Indépendance conditionnelle
L'indépendance de deux évènements est relative à la mesure de probabilité considérée sur $\mathfrak{A}$. Cette remarque évidente n'est pas anodine : conditionner par un évènement $B \in \mathfrak{A}$, c'est substituer la mesure P_B à la mesure P.

53.1 On dispose de deux urnes : la première urne ne contient que des boules noires, la seconde ne contient que des boules blanches. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

1. Les évènements A : *la boule tirée est noire* et B : *la boule tirée est blanche* ne sont pas indépendants.

2. Cependant, si on sait que l'urne choisie est la première, alors les évènements A et B sont indépendants !

53.2 *Suite de* **[35.3]** – Les évènements A et C ne sont pas indépendants pour la mesure P_B :

$$\mathsf{P}_B(A\cap C) \neq \mathsf{P}_B(A)\,\mathsf{P}_B(C)$$

alors qu'ils sont indépendants pour la mesure P_{B^c} :

$$\mathsf{P}_{B^c}(A\cap C) = \mathsf{P}_{B^c}(A)\,\mathsf{P}_{B^c}(C).$$

53.3 ✍ *Soient* $(\Omega, , \mathsf{P})$*, un espace probabilisé et* $B \in \mathfrak{A}$*, un évènement non négligeable.*
Deux évènements A_1 *et* A_2 *sont* **conditionnellement indépendants sachant** B *lorsqu'ils sont indépendants pour la mesure* P_B *:*

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \mid B) = \mathsf{P}(A_1 \mid B)\ \mathsf{P}(A_2 \mid B).$$

53.4 Soient A, B et C, trois évènements. On suppose que

$$0 < p = \mathsf{P}(C) < 1$$

et que les évènements A et B sont conditionnellement indépendants sachant C et conditionnellement indépendants sachant C^c.

1. Si on suppose que

$$\mathsf{P}(A \mid C) = \mathsf{P}(B \mid C^c) = 2/3$$
$$\mathsf{P}(A \mid C^c) = \mathsf{P}(B \mid C) = 1/3,$$

alors A et B ne sont pas indépendants.

2. Si $\mathsf{P}(A \mid C) = \mathsf{P}(A \mid C^c) = \mathsf{P}(B \mid C) = \mathsf{P}(B \mid C^c) = 1/2$, alors A et B sont indépendants quel que soit p.

III

Espaces mesurables discrets

54. Nous allons maintenant approfondir la notion d'espace probabilisable : ici, à l'ensemble *indéterminé* Ω de la théorie probabiliste, on pourra substituer un ensemble *connu* E.

54.1 Cet ensemble E peut être fini comme $\{0,1\}$ ou dénombrable comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou ***continu*** comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

54.2 ✍ *Un* **espace mesurable** *est un couple $(E,\mathcal{E})$ formé d'un ensemble E et d'une tribu $\mathcal{E}$ sur E.*
Les éléments de la tribu $\mathcal{E}$ sont alors les **parties mesurables** *de E.*

54.3 Techniquement, les notions d'***évènements*** et de ***parties mesurables*** sont définies de la même manière : ce sont les éléments d'une σ-algèbre.
Cependant, on réserve le terme d'***évènement*** au cas où cette σ-algèbre est une tribu sur un ensemble *indéterminé* Ω et le terme de ***partie mesurable*** au cas où la σ-algèbre est constituée de parties d'un ensemble *connu* E. →[**7**]

55. ✍ *Un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ est* **discret** *lorsque la tribu $\mathcal{E}$ est l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E.* →[**58**]

56. ✍ *Une* **(mesure de) probabilité discrète** *est une mesure de probabilité μ définie sur un espace mesurable discret $(E,\mathcal{E})$.*
On dit alors que $(E,\mathcal{E},\mu)$ est un **espace probabilisé discret**.

57.1 ✍ *Le* **support** *d'une mesure de probabilité discrète μ sur E est défini par*

$$S_\mu = \{x \in E \,:\, \mu(\{x\}) > 0\}.$$

57.2 ➙ *Le support d'une mesure de probabilité discrète sur E est une partie finie ou dénombrable de E.*

57.3 Soit μ, une mesure de probabilité discrète sur $(E,\mathcal{E})$. Pour tout ensemble E_0 contenant le support S_μ de la mesure μ, il existe une, et une seule, mesure de probabilité discrète μ_0 sur E_0 telle que

$$\forall\, x \in S_\mu, \quad \mu_0(\{x\}) = \mu(\{x\}).$$

58. Cas d'un espace fini ou dénombrable
Soit $(E,\mathcal{E})$, un espace mesurable où l'ensemble E est fini ou dénombrable.

58.1 La tribu $\mathcal{E}$ contient les singletons :

$$\forall\, x \in E, \qquad \{x\} \in \mathcal{E}$$

si, et seulement si, $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$.

58.2 Convention
Sauf indication contraire, un ensemble fini ou dénombrable E est toujours muni de la tribu discrète $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$.

III.1 Mesures de probabilité discrètes

59. ✍ *Soit E, un ensemble fini ou dénombrable. On appelle* **loi (de probabilité) discrète**, *ou* **distribution de probabilité discrète**, *sur E toute famille sommable $(p_x)_{x\in E}$ de réels positifs telle que*

$$\sum_{x\in E} p_x = 1.$$

60. Exemples de lois discrètes
Les lois discrètes élémentaires servent à dénombrer des quantités aléatoires et dans ce cas, l'ensemble E est égal à $\mathbb{N}$ ou à une partie de $\mathbb{N}$.

60.1

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^*, \quad p_x = \frac{1}{x(x+1)}$$

60.2

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^*, \quad p_x = \frac{6}{\pi^2 x^2}$$

60.3

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^*, \quad p_x = \frac{2^{-x}}{x\,\ell\mathrm{n}\,2}$$

61. Caractérisation des mesures de probabilité discrètes
Soit E, un ensemble fini ou dénombrable muni de la tribu discrète $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$ et d'une mesure de probabilité μ.

61.1 La famille $\big(\mu(\{x\})\big)_{x\in E}$ est une famille sommable de réels positifs telle que

$$\sum_{x\in E} \mu(\{x\}) = 1.$$

61.2 Pour toute partie $A \subset E$,

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}).$$

61.3 ➙ *Soit E, un ensemble fini ou dénombrable.*
1. *Il existe une bijection entre les mesures de probabilité sur l'espace mesurable discret $(E,\mathcal{E})$ et les distribution de probabilité discrètes sur E.*
2. *Pour toute loi de probabilité discrète $(p_x)_{x\in E}$ sur E, il existe une, et une seule, mesure de probabilité discrète μ sur $(E,\mathcal{E})$ telle que*

$$\forall\, x \in E, \qquad \mu(\{x\}) = p_x.$$

III.2 Lois discrètes usuelles

62. Chaque distribution de probabilité discrète est essentiellement déterminée par son support [**57.3**].

63. ✍ *Pour tout x_0, la* **distribution de Dirac en** x_0 *est la mesure de probabilité, notée δ_{x_0}, dont le support est le singleton $\{x_0\}$. Elle est définie par*

$$\delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1.$$

64. ✍ *Pour tout $0 < p < 1$, la* **loi de Bernoulli de paramètre** p *a pour support $\{0,1\}$ et est définie par*

$$\mu(\{0\}) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mu(\{1\}) = p.$$

65. ✍ *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$, la* **loi binomiale de paramètres** (n,p) *a pour support $[\![0,n]\!]$ et est définie par*

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mu(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

66. ✍ *Pour tout $0 < p < 1$, la* **loi géométrique de paramètre** p *a pour support $\mathbb{N}^*$ et est définie par*

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mu(\{k\}) = (1-p)^{k-1} p.$$

67. Pour les lois de Bernoulli, les lois binomiales et les lois géométriques, le paramètre p peut être interprété comme une probabilité. On note en général $q = 1 - p$.

68. ✍ *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la* **loi de Poisson de paramètre** λ *a pour support $\mathbb{N}$ et est définie par*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mu(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

69. ✍ *Pour toute partie finie A, la* **loi uniforme sur** A *est définie par*

$$\forall\, k \in A, \quad \mu(\{k\}) = \frac{1}{\#(A)}.$$

Entraînement

70. Questions pour réfléchir
1. *Suite de* [**69**] – Peut-on définir une loi uniforme sur un ensemble dénombrable ?
2. Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$, un espace probabilisé discret. L'ensemble des $x \in E$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$ est au plus dénombrable.

71. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une loi de probabilité discrète sur $\mathbb{N}$. On appelle ***mode*** de cette loi tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p_n = \max_{q\in\mathbb{N}} p_q.$$

1. La loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins un mode.
2. Quels sont les modes des lois discrètes usuelles ?
3. Exemples de loi admettant plusieurs modes ?

72. Convolée de deux lois discrètes
Soient μ et ν, deux mesures de probabilités discrètes sur $E = \mathbb{Z}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$p_n = \mu(\{n\}) \quad \text{et} \quad q_n = \nu(\{n\}).$$

72.1 La famille $(r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad r_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k q_{n-k}$$

est une loi de probabilité discrète sur $\mathbb{Z}$.
72.2 On note $\mu \otimes \nu$, l'unique **[61.3]** mesure de probabilité discrète sur $\mathbb{Z}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad (\mu\otimes\nu)(\{n\}) = r_n.$$

Le support de $\mu \otimes \nu$ est contenu dans

$$S_\mu + S_\nu = \{x+y\,,\ x \in S_\mu,\ y \in S_\nu\}.$$

73. Convergence en loi et tension
L'espace $E = \ell^1(\mathbb{N})$ des suites sommables est muni de sa norme naturelle :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \quad \|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

et on note $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des distributions de probabilité discrètes sur $\mathbb{N}$, considéré comme une partie de E. On identifiera une distribution de probabilité discrète $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la mesure de probabilité discrète sur $\mathbb{N}$ qui lui est associée **[61.3]**.
1. L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est une partie convexe de E. Les points extrémaux de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont les lois de Dirac δ_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est une partie fermée et bornée de E, mais elle n'est pas compacte.
73.1 ✍ *Une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de mesures de probabilité discrètes sur $\mathbb{N}$* **converge en loi*** *vers $\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ si, et seulement si,*

$$\lim_{k\to+\infty} \|\mu_k - \mu\| = 0.$$

73.2 ✍ *Une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de mesures de probabilité discrète sur $\mathbb{N}$ est* **tendue*** *si, et seulement si,*

$$\forall\, 0 < \varepsilon < 1,\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N_0} \mu_k(n) \geqslant 1-\varepsilon.$$

3. Si la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une mesure de probabilité discrète μ, alors la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est tendue.
4. La suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la mesure de probabilité discrète μ si, et seulement si,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to+\infty} \mu_k(n) = \mu(n).$$

5. Si la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est tendue, alors il existe une suite extraite $(\mu_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge en loi vers une mesure de probabilité discrète $\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

74. Méthodes
1. Soit $(\Omega, \mathfrak{A})$, un espace probabilisable.
1.a Comment démontrer qu'une partie $A \subset \Omega$ est un évènement ($A \in \mathfrak{A}$) ?
1.b Comment définir une mesure de probabilité sur $\mathfrak{A}$?
2. Comment calculer la probabilité de l'intersection :
2.a de deux évènements ?
2.b d'un nombre fini d'évènements ?
2.c d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements ?
3. Comment calculer la probabilité de l'union :
3.a de deux évènements ?
3.b d'un nombre fini d'évènements ?
3.c d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements ?

75. Questions pour réfléchir
1. Y a-t-il un intérêt à définir $\mathbf{P}(A \mid B)$ lorsque l'évènement B est négligeable ? Si oui, comment définir ce nombre ?
2. Comparer les notions de ***partition*** et de ***système complet d'évènements***.
3. Chaque variable aléatoire discrète définit un système complet d'évènements.
4. Deux évènements indépendants peuvent-ils être incompatibles ?
5. *Suite de* **[37.6]** – Étendre au cas d'une famille dénombrable $(A_k)_{k\in I}$. →**[78]**
6. Relier la notion de loi de probabilité discrète à celle de combinaison convexe.

Approfondissement

76. On étudie la présence de deux gènes A et B dans une population donnée. On sait que la moitié des porteurs du gène A portent aussi le gène B tandis que les deux tiers des personnes qui ne portent pas le gène A portent le gène B.
1. Quelle est la proportion de personnes qui ne portent pas le gène B parmi les porteurs du gène A ? parmi les personnes qui ne portent pas le gène A ?
2. Quelle est la proportion de personnes qui portent les deux gènes ?
3. Quelle est la proportion de personnes qui portent au moins l'un des deux gènes ?
4. Quelle est la proportion de personnes qui portent un seul des deux gènes ?
5. Sachant qu'une personne porte le gène B, quelle est la probabilité pour que cette personne porte aussi le gène A ?

77. Dépistage d'une maladie
Une campagne nationale propose un dépistage gratuit d'une maladie qui touche environ une personne sur 10 000. Le test pratiqué est fiable à 90% au sens où :

— Si le patient est atteint de la maladie, le test donne un résultat positif avec 90% de chances ;
— Si le patient n'est pas atteint, le test donne un résultat positif, dit *faux positif*, avec 10% de chances.

1. Quelle est la probabilité pour que le test donne un résultat positif ?
2. Comme le dépistage est gratuit et sans douleur, vous vous y soumettez et quelques jours plus tard, un courrier vous informe que le résultat du test est positif. Quelle est la probabilité pour que vous soyez effectivement atteint par la maladie ?

78. Produits infinis
Soit $(p_k)_{k\in I}$, une famille dénombrable de réels compris entre 0 et 1. On définit le ***produit infini*** de cette famille par

$$\prod_{k\in I} p_k = \inf_{J\in\mathfrak{P}_0(I)} \prod_{k\in J} p_k.$$

1. Le produit infini est bien défini et compris entre 0 et 1.
2. Pour toute permutation σ de I,

$$\prod_{k\in I} p_{\sigma(k)} = \prod_{k\in I} p_k.$$

3. Si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une énumération **[6.117.3]** de I, alors

$$\prod_{k\in I} p_k = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} p_{k_n}.$$

Pour aller plus loin

79. Suites d'évènements
Soit $(\Omega, \mathfrak{A})$, un espace probabilisable. On cherche à étendre le concept de ***limite*** aux suites d'évènements par analogie avec les suites réelles :

— Le terme général d'une suite réelle appartient à $\mathbb{R}$, qui est (totalement) ordonné par $\leqslant$;

— le terme général d'une suite d'évènements appartient à $\mathfrak{A}$, qui est (partiellement) ordonnée par $\subset$.

79.1 ✍ *Soient E, un ensemble ordonné par $\leqslant$ et X, une partie de E.*

1. *L'ensemble $\mathfrak{m}(X)$ des* **minorants** *de X est défini par*

$$y \in \mathfrak{m}(X) \iff \forall\, x \in X, \quad y \leqslant x.$$

2. *L'ensemble $\mathfrak{M}(X)$ des* **majorants** *de X est défini par*

$$z \in \mathfrak{M}(X) \iff \forall\, x \in X, \quad x \leqslant z.$$

3. *Un élément y_0 de E est la* **borne inférieure** *de X lorsque y_0 est un minorant de X :*

$$\forall\, x \in X, \quad y_0 \leqslant x$$

et que y_0 est plus grand que tous les autres minorants de X :

$$\forall\, y \in \mathfrak{m}(X), \quad y \leqslant y_0.$$

4. *Un élément z_0 de E est la* **borne supérieure** *de X lorsque z_0 est un majorant de X :*

$$\forall\, x \in X, \quad x \leqslant z_0$$

et que z_0 est plus petit que tous les autres majorants de X :

$$\forall\, z \in \mathfrak{M}(X), \quad z_0 \leqslant z.$$

79.2 La tribu $\mathfrak{A}$ est ordonnée par $\subset$.

5. L'évènement certain Ω majore tout évènement et l'évènement impossible $\varnothing$ minore tout évènement.

6. Une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet respectivement

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

pour borne supérieure et pour borne inférieure.

79.3 ✍ *Une suite croissante d'évènements converge vers sa borne supérieure.*
Une suite décroissante d'évènements converge vers sa borne inférieure.

79.4 ✍ **Limite inférieure, limite supérieure**
La **limite supérieure** *de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$$

et sa **limite inférieure** *par*

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

7. La limite inférieure et la limite supérieure de la suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des évènements.

8. Un élément $\omega \in \Omega$ appartient à $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ si, et seulement si, il appartient à une infinité d'évènements A_n.

9. Un élément $\omega \in \Omega$ appartient à $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ si, et seulement si, à partir d'un certain rang, il appartient à tous les A_n.

10.
$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$B_n = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m = \sup_{m\geqslant n} A_m \quad \text{et} \quad C_n = \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m = \inf_{m\geqslant n} A_m.$$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C_n \subset A_n \subset B_n$$

et

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim_{n\to+\infty} B_n, \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim_{n\to+\infty} C_n.$$

12. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements B_n et C_n sont indépendants, alors $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sont indépendants.

79.5 ✍ *Une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **convergente** *si, et seulement si, sa limite inférieure est égale à sa limite supérieure. Dans ce cas, on pose*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

79.6 Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements qui converge vers A, alors $A \in \mathfrak{A}$ et $\mathsf{P}(A_n)$ tend vers $\mathsf{P}(A)$.

80. Atomes d'une tribu
Les ***atomes*** d'une tribu $\mathfrak{A}$ sont les éléments minimaux de cette tribu pour la relation d'ordre $\subset$.

80.1 ✍ *On appelle* **atome** *de la tribu $\mathfrak{A}$ tout évènement $A \in \mathfrak{A}$ distinct de $\varnothing$ et tel que*

$$\forall\, B \in \mathfrak{A}, \qquad B \subset A \implies \left|\begin{array}{l} B = \varnothing \\ B = A \end{array}\right. .$$

80.2 Atomes de la tribu discrète
Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, alors les atomes de $\mathfrak{A}$ sont les singletons.

80.3 Deux atomes distincts de $\mathfrak{A}$ sont disjoints.

80.4 On suppose que la tribu $\mathfrak{A}$ est finie.

1. Quel que soit $\omega \in \Omega$, l'évènement

$$A_\omega = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}\,:\,\omega\in A} A \in \mathfrak{A}$$

est le plus petit évènement qui contienne ω : cet évènement est un atome de $\mathfrak{A}$.

2. Tout point $\omega \in \Omega$ appartient à un (et un seul) atome de $\mathfrak{A}$ et l'ensemble des atomes de $\mathfrak{A}$ est un système complet d'évènements.

80.5 On suppose que l'ensemble des atomes de $\mathfrak{A}$ est un système complet d'évènements de Ω et, pour tout $\omega \in \Omega$, on note A_ω, l'atome de $\mathfrak{A}$ qui contient ω.

3. Soit $A \in \mathfrak{A}$.

3.a Pour tout $\omega \in A$, l'atome A_ω est contenu dans A.

3.b
$$A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\} = \bigcup_{\omega\in A} A_\omega.$$

4. En notant $(B_k)_{k\in I}$, la famille des atomes,

$$\forall\, A \in \mathfrak{A}, \quad A = \bigsqcup_{k\in I\,:\,A\cap B_k\neq\varnothing} B_k.$$

5. Si la famille des atomes de $\mathfrak{A}$ est un système complet de n évènements, alors la cardinal de la tribu $\mathfrak{A}$ est égal à 2^n.

80.6 Quand une tribu compte une infinité non dénombrable d'atomes, la notion d'***atome*** perd tout intérêt : expliquer.

Tribu engendrée par une famille de parties

81.1 Soit $\mathfrak{T}$, une famille de tribus sur E. Alors

$$\mathcal{E} = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathfrak{T}} \mathcal{T}$$

est une tribu sur E.

81.2 Soit $\mathcal{F}$, une famille de parties de E.
La tribu discrète $\mathfrak{P}(E)$ est une tribu sur E qui contient $\mathcal{F}$.
L'intersection $\mathcal{E}$ de toutes les tribus sur E qui contiennent $\mathcal{F}$ est une tribu qui contient $\mathcal{F}$. Cette tribu $\mathcal{E}$ est contenue dans toute tribu $\mathcal{T}$ qui contient $\mathcal{F}$.
81.3 ✍ *La* **tribu engendrée** *par une famille $\mathcal{F}$ de parties de E est la plus petite tribu sur E qui contienne $\mathcal{F}$.*

82. Tribu engendrée par les singletons
La ***tribu engendrée par les singletons*** est la plus petite tribu $\mathscr{S}$ sur E telle que

$$\forall\, x \in E, \qquad \{x\} \in \mathscr{S}.$$

Une partie A de E appartient à la tribu $\mathscr{S}$ si, et seulement si, cette partie A est finie ou dénombrable ou si son complémentaire A^c est fini ou dénombrable. →[58]

83. Tribu engendrée par un évènement
La tribu engendrée par une partie $A \subset \Omega$ est la tribu, notée $\sigma(A)$, égale à $\{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$. →[5.6]
83.1 Pour tout $p \in [0,1]$, il existe une, et une seule, mesure de probabilité P sur $\sigma(A)$ telle que $\mathsf{P}(A) = p$.
83.2 Comparer la tribu $\sigma(A)$ engendrée par l'évènement A à la tribu discrète sur $E = \{0,1\}$. Comparer la mesure P à une loi de Bernoulli.

84. Tribu engendrée par un système complet
Soit $(\Omega, \mathfrak{A}_0)$, un espace probabilisable.
On suppose connu un système complet d'évènements $(A_k)_{k\in I}$ où I est fini ou dénombrable.
84.1 Si une tribu contient tous les évènements A_k, alors elle contient aussi l'évènement

$$\bigsqcup_{k\in Q} A_k$$

quelle que soit la partie $Q \subset I$.
84.2 L'ensemble

$$\mathfrak{A} = \Big\{ \bigsqcup_{k\in Q} A_k, \quad Q \in \mathfrak{P}(I) \Big\}$$

est la tribu engendrée par le système complet $(A_k)_{k\in I}$.
84.3 Pour toute loi discrète $(p_k)_{k\in I}$ sur I, il existe une, et une seule, mesure de probabilité P sur la tribu $\mathfrak{A}$ telle que

$$\forall\, k \in I, \qquad \mathsf{P}(A_k) = p_k.$$

84.4 Si le cardinal de I est égal à n, alors le cardinal de la tribu $\mathfrak{A}$ est égal à 2^n.
Si l'ensemble I est infini, alors la tribu $\mathfrak{A}$ n'est pas dénombrable.
Un tel système complet apparaît naturellement en conditionnant par une variable aléatoire discrète.

85. Tribu produit
Soient $\mathcal{E}_1$, une tribu sur l'ensemble E_1 et $\mathcal{E}_2$, une tribu sur l'ensemble E_2.
85.1 ✍ *La* **tribu produit** *sur $E_1 \times E_2$ est la tribu $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ engendrée par la famille*

$$\big\{ A_1 \times A_2,\ (A_1, A_2) \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \big\} \subset \mathfrak{P}(E_1 \times E_2).$$

85.2 Soient E_1 et E_2, deux ensembles au plus dénombrables, munis de leurs tribus discrètes respectives $\mathfrak{P}(E_1)$ et $\mathfrak{P}(E_2)$.
Alors le produit $E = E_1 \times E_2$ est au plus dénombrable et

$$\mathfrak{P}(E_1) \otimes \mathfrak{P}(E_2) = \mathfrak{P}(E_1 \times E_2)$$

de telle sorte qu'un produit d'espaces mesurables discrets est encore un espace mesurable discret.

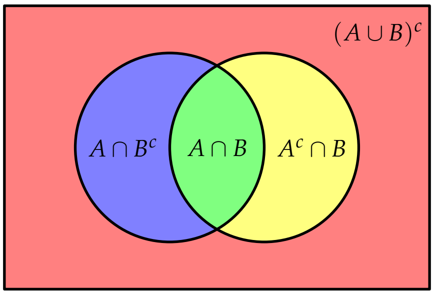
86. Tribu borélienne
86.1 ✍ *La* **tribu borélienne** *sur $\mathbb{R}^d$ est la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les parties ouvertes de $\mathbb{R}^d$.*
86.2 La tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est aussi la tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$.
86.3 Sur $\mathbb{R}^d$, la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ est aussi la tribu engendrée par les parties fermées ; la tribu engendrée par les parties compactes et la tribu engendrée par les pavés fermés

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d].$$

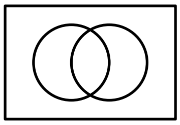
86.4 La tribu produit $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ est aussi la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.

87. Tribu engendrée par deux évènements
Soient A et B, deux parties d'un ensemble Ω.
87.1 La tribu $\sigma(A, B)$ engendrée par A et B est la tribu engendrée par le système complet d'évènements

$$A \cap B, \quad A^c \cap B, \quad A \cap B^c, \quad (A \cup B)^c.$$

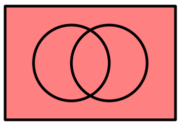


87.2 La tribu $\sigma(A, B)$ est constituée de seize évènements :
1. L'évènement impossible



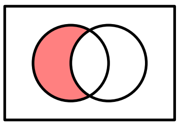
$\varnothing$

et l'évènement certain, réunion de tous les atomes

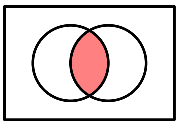


Ω

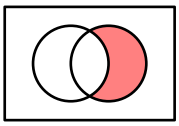
2. Les quatre atomes **[80]**



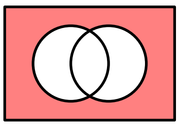
$A \cap B^c$



$A \cap B$

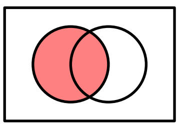


$A^c \cap B$

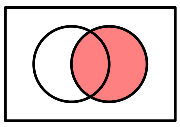


$(A \cup B)^c$

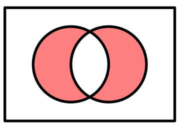
3. Les six évènements constitués de deux atomes



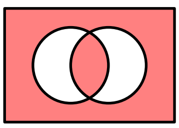
A



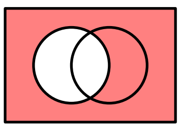
B



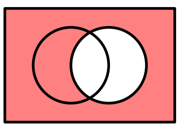
$A \Delta B$



$(A \Delta B)^c$

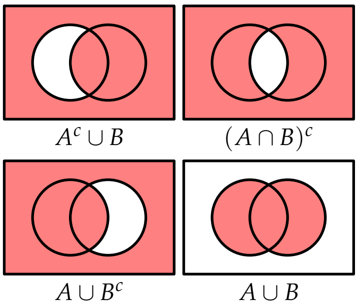


A^c



B^c

4. Les quatre évènements constitués de trois atomes



87.3 L'un des atomes peut-il être vide ? Comment la tribu $\sigma(A, B)$ est-elle modifiée dans ce cas ? Envisager le cas où deux des atomes sont vides.

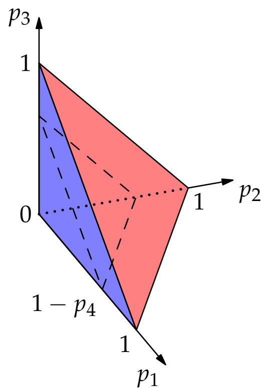
87.4 Caractérisation d'une probabilité sur $\sigma(A, B)$
Une mesure de probabilité P sur $\sigma(A, B)$ est caractérisée **[84.3]** par la valeur qu'elle attribue aux quatre atomes

$$A \cap B, \quad A^c \cap B, \quad A \cap B^c \quad \text{et} \quad A^c \cap B^c.$$

On peut donc identifier l'ensemble des mesures de probabilité sur $\sigma(A, B)$ à l'ensemble des triplets

$$(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

de réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, qui est une partie compacte d'un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et qu'on peut voir aussi comme un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$.



87.5 Autre caractérisation
Comme

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A^c \cap B) &= \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) \\ \mathsf{P}(A \cap B^c) &= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B) \\ \mathsf{P}(A^c \cap B^c) &= 1 - \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

la connaissance des probabilités $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$ et $\mathsf{P}(A \cap B)$ détermine la mesure de probabilité P sur la tribu $\sigma(A, B)$.
Réciproquement, si q_1, q_2 et q_3 sont trois réels tels que

$$q_1 \geqslant 0, \quad q_1 \leqslant q_2, \quad q_1 \leqslant q_3 \quad \text{et} \quad q_2 + q_3 \leqslant 1 + q_1$$

alors il existe une, et une seule, mesure de probabilité P sur la tribu $\sigma(A, B)$ telle que

$$\mathsf{P}(A \cap B) = q_1, \quad \mathsf{P}(A) = q_2 \quad \text{et} \quad \mathsf{P}(B) = q_3.$$

87.6 Une autre caractérisation repose sur la loi d'un couple de variables aléatoires de Bernoulli. →**[15.11]**

88. Tribu engendrée par n évènements
Étant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{A}_0)$, on note $\mathfrak{A}$, la tribu engendrée par n évènements $O_1, \dots, O_n$.
Pour toute partie Q de $\{1, \dots, n\}$, on pose

$$A_Q = \Big(\bigcap_{k \in Q} O_k\Big) \cap \Big(\bigcap_{k \in Q^c} O_k^c\Big) \in \mathfrak{A}.$$

88.1 Si $(O_1, \dots, O_n)$ est un système complet d'évènements, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad A_{\{k\}} = O_k$$

et si $Q \subset \{1, \dots, n\}$ n'est pas un singleton, alors $A_Q = \varnothing$.
Si les évènements $O_1, \dots, O_n$ sont deux à deux disjoints, on peut poser

$$O_{n+1} = O_1^c \cap \dots \cap O_n^c \in \mathfrak{A}$$

de telle sorte que $(O_1, \dots, O_n, O_{n+1})$ soit un système complet d'évènements.

88.2 Les évènements A_Q constituent un système complet :

$$\bigsqcup_{Q \subset \{1,\dots,n\}} A_Q = \Omega.$$

La tribu $\mathfrak{A}$ est la tribu engendrée par ce système complet d'évènements :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad O_k = \bigsqcup_{\substack{Q \subset \{1,\dots,n\} \\ k \in Q}} A_Q.$$

88.3 Les évènements A_Q non vides sont les atomes de $\mathfrak{A}$. La tribu $\mathfrak{A}$ compte au plus 2^n atomes et au plus $2^{(2^n)}$ évènements.