Problème de Mathématiques

Référence pp2124 — Version du 27 novembre 2025

On considère la matrice
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que la matrice $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à la matrice I_3.
2. Démontrer que la matrice A est inversible et exprimer son inverse.
3. En étudiant le polynôme $X^3 - 3X^2 - 9/4$, démontrer que la matrice A admet une, et une seule, valeur propre réelle, qu'on notera λ_0. Donner un encadrement de λ_0 par deux entiers consécutifs.
4. On suppose qu'il existe une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que
$$D = P^{-1}AP.$$

4. a. Calculer $D^3 - 3D^2$.
4. b. Que peut-on en déduire ?

Solution ❀ Réduction d'une matrice

1. On trouve

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 12 & 12 & 18 \\ 9 & 12 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad A^3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 45 & 54 & 72 \\ 36 & 45 & 54 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$A^3 - 3A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \frac{9}{4}I_3.$$

2. D'après la relation précédente,

$$A\Big(\frac{4}{9}A^2 - \frac{4}{3}A\Big) = \Big(\frac{4}{9}A^2 - \frac{4}{3}A\Big)A = I_3$$

ce qui prouve que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{4}{9}A^2 - \frac{4}{3}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a démontré précédemment que

$$P_0 = X^3 - 3X^2 - \frac{9}{4}$$

était un polynôme annulateur de A. Par conséquent, toutes les valeurs propres de A sont des racines de ce polynôme.

L'application polynomiale

$$f = \big[t \mapsto t^3 - 3t^2 - 9/4\big]$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 3t(t-2)$$

donc f est croissante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

Comme $f(0) < 0$, on en déduit que f est strictement négative sur $]-\infty, 2]$ et réalise ensuite une bijection de $[2, +\infty[$ sur $\big[\frac{-25}{4}, +\infty\big[$. Le polynôme P_0 admet donc une, et une seule, racine réelle et cette racine est supérieure à 2.

Plus précisément, puisque

$$f(3) = \frac{-9}{4} < 0 < \frac{55}{4} = f(4),$$

l'unique racine réelle de P_0 est comprise entre 3 et 4 (Théorème des valeurs intermédiaires).

4. a. Par hypothèse, les matrices A et D sont semblables. Elles ont donc les mêmes polynômes annulateurs, et en particulier

$$P_0(D) = D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I_3 = 0_3.$$

4. b. Si $D = \mathrm{Diag}(a, b, c)$, alors

$$P_0(D) = \mathrm{Diag}\big(P_0(a), P_0(b), P_0(c)\big).$$

Comme a, b et c sont réels (par hypothèse) et que P_0 admet λ_0 pour seule valeur propre réelle, on en déduit que $a = b = c = \lambda_0$ et donc que

$$A = PDP^{-1} = P(\lambda_0 I_3)P = \lambda_0 I_3.$$

C'est faux, donc A n'est pas diagonalisable.