Problème de Mathématiques

Référence pp2129 — Version du 27 novembre 2025

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est **à diagonale propre** lorsque son polynôme caractéristique vérifie la relation :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - a_{k,k}).$$

Bien entendu, toute matrice diagonale est une matrice à diagonale propre.

1. Démontrer qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.

2. Donner un exemple simple de matrice à diagonale propre qui ne soit pas une matrice diagonale.

3. Soient α et β, deux nombres réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

soit une matrice à diagonale propre.

4. Soient X_1, X_2 et X_3, des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre $1/3$.

4. a. Calculer $\mathbf{P}(X_1 = X_2)$.

4. b. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (X_1 - X_2)(\omega) \\ 0 & 0 & (X_2 - X_3)(\omega) \\ (X_1 - X_2)(\omega) & (X_2 - X_3)(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que "La matrice B est à diagonale propre" est un événement et calculer la probabilité de cet événement.

5. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

5. a. Exprimer $\operatorname{tr}(A^\top.A)$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$.

5. b. On suppose que A est une matrice symétrique réelle et on note

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

ses valeurs propres. Démontrer que

$$\operatorname{tr}(A^\top.A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

5. c. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Solution ❀ Matrices à diagonale propre

1. Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice A à diagonale propre est scindé et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, c'est un polynôme annulateur de A. Par conséquent, la matrice A est trigonalisable.
2. Si $A = (a_{i,j})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors on sait que

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_{i,i})$$

et la matrice A est donc à diagonale propre.
3. Si la matrice M est à diagonale propre, alors 0 est son unique valeur propre, son polynôme caractéristique est égal à X^3 et donc X^3 est un polynôme annulateur de A (encore le Théorème de Cayley-Hamilton).

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha(\alpha^2+\beta^2) \\ 0 & 0 & \beta(\alpha^2+\beta^2) \\ \alpha(\alpha^2+\beta^2) & \beta(\alpha^2+\beta^2) & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M est donc une matrice à diagonale propre si, et seulement si,

$$\alpha(\alpha^2+\beta^2) = \beta(\alpha^2+\beta^2) = 0.$$

Comme α et β sont réels, cela équivaut au fait que

$$\alpha = \beta = 0.$$

(Ou bien $\alpha^2+\beta^2 = 0$ et dans ce cas, $\alpha = \beta = 0$; ou bien $\alpha^2+\beta^2 > 0$ et dans ce cas, $\alpha = \beta = 0$ [avec une contradiction en prime].)

La matrice M est donc une matrice à diagonale propre si, et seulement si, $\alpha = \beta = 0$.
4. a. On décompose $[X_1 = X_2]$ au moyen du système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_1 :

$$\begin{aligned} [X_1 = X_2] &= \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X_1 = X_2] \cap [X_1 = k] \\ &= \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X_1 = k] \cap [X_2 = k]. \end{aligned}$$

Comme X_1 et X_2 sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on sait que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad [X_1 = k] \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad [X_2 = k] \in \mathcal{A}.$$

Comme une tribu est stable par intersection finie ou dénombrable, on en déduit que $[X_1 = X_2] \in \mathcal{A}$.

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big[\mathbf{P}(X_1 = k)\big]^2$$

puisque les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi.

Finalement,

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-4/9} = \frac{1}{5}.$$

4. b. D'après **[3.]**, la matrice $B(\omega)$ est à diagonale propre si, et seulement si, $X_1(\omega) = X_2(\omega)$ et $X_2(\omega) = X_3(\omega)$. D'après la question précédente, $[X_1 = X_2]$ est bien un événement et, par analogie, $[X_2 = X_3]$ est aussi un événement.

Comme une tribu est stable par intersection finie, on en déduit que

$$[X_1 = X_2] \cap [X_2 = X_3] \in \mathcal{A}$$

et par conséquent, "La matrice B est à diagonale propre" est bien un événement.

❧ En s'inspirant de la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 = X_2 = X_3) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]^3 \\ &= \frac{1}{27}\frac{27}{19} = \frac{1}{19}.\end{aligned}$$

5. a. On a démontré en cours que

$$\mathrm{tr}(A^\top.A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

5. b. D'après le Théorème spectral, la matrice **symétrique réelle** A est diagonalisable et semblable à la matrice

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Par conséquent, la matrice $A^2 = A^\top.A$ est semblable à la matrice

$$D^2 = \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2).$$

Comme deux matrices semblables ont même trace, on en déduit que

$$\mathrm{tr}(A^\top.A) = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

5. c. D'après les deux questions précédentes, si A est une matrice symétrique réelle à diagonale propre, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 = 0$$

et comme les $a_{i,j}$ sont *réels*, on en déduit que

$$\forall\, i \neq j, \quad a_{i,j} = 0.$$

Autrement dit, la matrice A est diagonale.

La réciproque est évidente.

Par conséquent, une matrice symétrique réelle est une matrice à diagonale propre si, et seulement si, c'est une matrice diagonale.