Problème de Mathématiques

Référence pp2132 — Version du 27 novembre 2025

Soient n, un entier supérieur à 2 et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

On pose

$$A = M - I_n \quad \text{et} \quad B = M - \frac{1}{2}I_n$$

et **on suppose que** $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$.

Nous allons étudier le sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2).$$

1. Quelle est la dimension de F ? (On donnera une base de F.)
2. Démontrer que $M^k \in F$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que F est stable par multiplication.
3. Démontrer que $\mathscr{B} = (A, B)$ est une base de F. Calculer les coordonnées des matrices AB, BA, A^2 et B^2 relatives à la base $\mathscr{B}$.
4. Déterminer les matrices $T \in F$ telles que $T^2 = M$.

Solution ❀ Algèbre de matrices

1. Le sous-espace F est engendré par 3 vecteurs, donc sa dimension est inférieure à 3.
De plus,

$$M^2 = \frac{-1}{2} I_n + \frac{3}{2} M \in \mathrm{Vect}(I_n, M)$$

donc F est engendré par I_n et M, donc $\dim F \leqslant 2$.

Si M était proportionnelle à I_n, alors il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$ et λ serait la seule valeur propre de M. Or, par hypothèse, le polynôme

$$2X^2 - 3X + 1 = (2X - 1)(X - 1)$$

est un polynôme annulateur de M et les valeurs propres de M sont nécessairement des racines de ce polynôme. Comme $A \neq 0_n$ et que $B \neq 0_n$, on en déduit que la matrice M n'est pas une homothétie et donc que M n'est pas proportionnelle à I_n.

Ainsi, $\dim F = 2$ et (I_n, M) est une base de F.

2. Par construction, M^0, M^1 et M^2 appartiennent à F.

Supposons que, pour un entier $k \geqslant 2$, la matrice M^k appartienne à F. Alors il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$M^k = a_k I_n + b_k M$$

donc

$$M^{k+1} = a_k M + b_k M^2 = \frac{-b_k}{2} I_n + \Big(a_k + \frac{3}{2} b_k\Big) \cdot M \in F.$$

On a ainsi démontré par récurrence que $M^k \in F$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

❧ Soient N_1 et N_2, deux matrices de F : d'après la question précédente, il existe quatre réels a, b, c et d tels que

$$N_1 = aI_n + bM \quad \text{et} \quad N_2 = cI_n + dM.$$

Donc

$$N_1 N_2 = ac \cdot I_n + (ad + bc) \cdot M + bd \cdot M^2 \in F$$

et F est bien stable par multiplication.

REMARQUE.— Comme F est un sous-espace de l'algèbre $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, qu'il est stable par multiplication et qu'il contient l'élément unité I_n, c'est en fait une *sous-algèbre* de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Il est clair que A et B appartiennent à F et

$$I_n = 2 \cdot (B - A) \quad \text{et} \quad M = 2 \cdot B - A$$

donc (A, B) engendre F.

Comme $\mathscr{B} = (A, B)$ est une famille génératrice de <u>deux</u> vecteurs de F, espace vectoriel de dimension <u>deux</u>, c'est une base de F.

❧ Tout d'abord,

$$AB = BA = \frac{1}{2} \cdot \left(2M^2 - 3M + I_n\right) = 0_n$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(AB) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(BA) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$A^2 = M^2 - 2M + I_n = \frac{-1}{2} \cdot M + \frac{1}{2} \cdot I_n$$
$$B^2 = M^2 - M + \frac{1}{4} I_n = \frac{1}{2} \cdot M - \frac{1}{4} \cdot I_n$$

donc

$$A^2 = \frac{-1}{2} \cdot A \quad \text{et} \quad B^2 = \frac{1}{2} \cdot B.$$

Finalement,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(A^2) = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(B^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour toute matrice $T \in F$, il existe deux réels x et y tels que

$$T = x \cdot A + y \cdot B$$

et d'après la question précédente

$$T^2 = x^2 \cdot A^2 + y^2 \cdot B^2 = \frac{-x^2}{2} \cdot A + \frac{y^2}{2} \cdot B.$$

Or

$$M = (-1) \cdot A + 2 \cdot B$$

et cette décomposition est unique (puisque (A, B) est une base de F).

Par conséquent, la matrice $T \in F$ vérifie $T^2 = M$ si, et seulement si,

$$x^2 = 2 \quad \text{et} \quad y^2 = 4.$$

Il y a donc (exactement) quatre solutions :

$$T = (\pm\sqrt{2}) \cdot A + (\pm 2) \cdot B.$$