Problème de Mathématiques

Référence pp1709 — Version du 27 novembre 2025

---

1. Soient I et Ω, deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $g : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, une application telle que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto g(x,t)]$$

soit intégrable sur I. On pose alors

$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = \int_I g(x,t)\,dt.$$

Citer les hypothèses du théorème de continuité qui permet de conclure que la fonction F est continue sur Ω.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt.$$

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\,dt.$$

3. a. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

3. b. Que peut-on en conclure sur l'hypothèse de domination ?

Solution ❀ Continuité d'une intégrale en fonction d'un paramètre

2. Notons $I = [0, +\infty[$ et $\Omega = \mathbb{R}$ et posons

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}.$$

Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est évidemment continue sur Ω.
Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est évidemment continue sur I et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \frac{\pi}{2(1+t^2)}, \qquad (\star)$$

ce qui prouve que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I, puisque la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right]$$

est intégrable sur I (fonction de référence : dérivée d'Arctan).

Enfin, la domination découle de $(\star)$, puisque le majorant est intégrable sur I et indépendant de $x \in \Omega$.

Par conséquent, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

3. a. Il est clair que $F(0) = 0$. Pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \lim_{A \to +\infty} \left[-e^{-xt}\right]_0^A = 1.$$

La fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}_+$ (puisqu'elle n'est pas continue en $x = 0$).

3. b. Si l'hypothèse de domination était vérifiée sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$, alors la fonction F serait continue sur $[0, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas. L'hypothèse de domination n'est donc pas vérifiée sur $[0, +\infty[$.

❧ Si l'hypothèse de domination était vérifiée seulement sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, alors il existerait une fonction g telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x > 0, \quad |xe^{-xt}| \leqslant g(t)$$

et par conséquent

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \sup_{x>0} |xe^{-xt}| \leqslant g(t).$$

Or la fonction $[x \mapsto xe^{-xt}]$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et atteint son maximum en $x = 1/t$, donc

$$g(t) \geqslant \sup_{x>0} |xe^{-xt}| = \frac{1}{e \cdot t}.$$

Comme la fonction $[t \mapsto 1/t]$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$, le majorant g ne peut être intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'hypothèse de domination n'est pas satisfaite sur $]0, +\infty[$.

❧ Soient $0 < A < B$.

$$\forall\, t \geqslant 0, \forall\, A \leqslant x \leqslant B, \quad 0 \leqslant xe^{-xt} \leqslant Be^{-At}.$$

Ce majorant est indépendant de x et intégrable sur I en tant que fonction de t. L'hypothèse de domination est donc vérifiée sur $[A, B]$, ce qui prouve que F est continue sur $[A, B]$. Comme A et B sont quelconques, on en déduit que la fonction F est continue sur $]0, +\infty[$.

Remarque.— Évidemment, il est plus efficace de passer par le calcul explicite de F que d'appliquer le théorème de continuité !