Problème de Mathématiques

Référence pp1816 — Version du 27 novembre 2025

On considère la fonction F définie par

$$\mathsf{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

On pose également $I = [0, +\infty[$, $\Omega =]0, +\infty[$ et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad f(x,t) = \frac{e^{-t}}{x+t}.$$

1. a. Démontrer que, quel que soit $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

est intégrable sur I.

1. b. La fonction g définie par

$$\forall\,t > 0, \quad g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$$

est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

1. c. La fonction h définie par

$$\forall\,t > 0, \quad h(t) = e^{-t}\ell n\,t$$

est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

2. Démontrer que

$$\forall\,0 < x < y, \quad 0 \leqslant \mathsf{F}(y) \leqslant \mathsf{F}(x).$$

3. Démontrer que

$$\forall\,x \in \Omega, \quad \mathsf{F}(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du. \tag{1}$$

4. a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite qui tend vers $+\infty$. En considérant les fonctions φ_n définies par

$$\forall\,t \in I, \quad \varphi_n(t) = f(x_n, t)$$

démontrer que la suite de terme général $\mathsf{F}(x_n)$ converge vers 0.

4. b. En déduire que la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

5. Démontrer que la fonction F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

6. Démontrer que, quel que soit $t \in I$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est convexe sur Ω. En déduire que F est convexe sur Ω.

7. Tracer l'allure du graphe de F.

8. Dans cette question, on précise le comportement de la fonction F au voisinage de $+\infty$.

8. a. Démontrer que

$$\forall\,x \in \Omega, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\,du \leqslant \frac{e^{-x}}{x^2}. \tag{2}$$

8. b. Démontrer que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\mathsf{F}(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big). \tag{3}$$

9. Dans cette question, on précise le comportement de la fonction F au voisinage de 0.

9. a. Démontrer que

$$\forall\,x \in \Omega, \quad \mathsf{F}(x) = -\ell n\,x + e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}\,\ell n\,u\,du. \tag{4}$$

9. b. En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que

$$F(x) = -\ln x + C + o(1) \tag{5}$$

lorsque x tend vers 0.

10. On *admet* que la fonction F est continue sur $]0, +\infty[$. La fonction F est-elle intégrable au voisinage de 0 ? au voisinage de $+\infty$?

11. Démontrer que

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} \ln u \, du \sim e^{-x} \ln x \tag{6}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution ❀ Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. a. Soit $x \in \Omega$, *fixé*. La fonction
$$[t \mapsto f(x,t)]$$
est clairement continue sur $I = [0, +\infty[$ et lorsque t tend vers $+\infty$,
$$f(x,t) = o(e^{-t}).$$
Comme $[t \mapsto e^{-t}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de référence), on en déduit que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I.

REMARQUE.— Cela prouve que la fonction F est bien définie sur Ω (*commencer par le commencement*).

1. b. On sait que la fonction $[t \mapsto 1/t]$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence). Comme
$$g(t) \sim 1/t$$
au voisinage de 0, on en déduit que g n'est pas intégrable au voisinage de 0 et *a fortiori* pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

1. c. La fonction h est clairement continue sur l'intervalle ouvert $I_0 =]0, +\infty[$.

Lorsque t tend vers 0,
$$h(t) \sim \ell n\, t$$
et comme la fonction ℓn est intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence), on en déduit que h est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$,
$$h(t) = \left[e^{-t/2}\, \ell n\, t\right] e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$$
et comme la fonction $\left[t \mapsto e^{-t/2}\right]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de référence), on en déduit que h est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent, h est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $0 < x < y$. Pour tout $t \in I$, il est clair que
$$0 \leqslant f(y,t) \leqslant f(x,t).$$
Les inégalités étant conservées par intégration (les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant), on en déduit que
$$0 \leqslant F(y) \leqslant F(x).$$
Autrement dit : *la fonction* F *est décroissante et positive*.

3. L'application *affine* $[t \mapsto x + t]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I = [0, +\infty[$ sur $J = [x, +\infty[$.
$$\begin{cases} t \in I \longmapsto f(x,t) = G(x+t) \in \mathbb{R} \\ u \in J \longmapsto \qquad\qquad G(u) \in \mathbb{R} \end{cases}$$
On sait **[[1.a.]]** que la fonction
$$\left[t \mapsto f(x,t) = e^x \frac{e^{-(x+t)}}{x+t}\right]$$
est intégrable sur I. Par conséquent, la fonction
$$\left[u \mapsto G(u) = e^x \frac{e^{-u}}{u}\right]$$
est intégrable sur J et
$$\forall\, x \in \Omega, \quad F(x) = \int_x^{+\infty} e^x \frac{e^{-u}}{u}\, du = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

4. a. Par **[[1.a.]]**, les fonctions φ_n sont toutes intégrables sur I.

Il est clair que, pour tout $t \in I$, la suite de terme général $f(x_n, t)$ tend vers 0, c'est-à-dire : la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle.

Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est clairement décroissante. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel $x_n \geqslant 1777$ (naissance de Gauss, voyons !) et
$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant \varphi_n(t) \leqslant f(1777, t).$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur I, donc la convergence est dominée.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite de terme général $F(x_n)$ tend vers 0.

4. b. Comme la fonction F est décroissante et positive sur Ω **[[2.]]**, elle tend vers une limite finie ℓ au voisinage de $+\infty$.

D'après la théorème de composition des limites, comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On déduit alors de la question précédente que $\ell = 0$.

Donc : la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

REMARQUE.— Comme le résultat de la question précédente est vrai pour *toute* suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, on peut conclure en invoquant la caractérisation séquentielle des limites.

5. Comme la fonction g est positive sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas intégrable au voisinage de 0 **[[1.b.]]**, l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} g(t)\,dt$$

tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. Comme e^x tend vers 1 lorsque x tend vers 0, on déduit alors de (1) que la fonction F tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

REMARQUE.— On a remarqué à la question précédente que la fonction F était décroissante sur Ω. On savait donc qu'elle tendait vers une limite, *finie ou infinie,* au voisinage de 0.

REMARQUE.— Comme la limite de F est infinie, il est impossible d'appliquer ici le théorème de convergence dominée.

6. Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{2e^{-t}}{(x+t)^3} \geqslant 0$$

donc la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est convexe sur Ω.

❧ Soient $0 < x < y$ et $\lambda \in [0,1]$. On vient de démontrer que

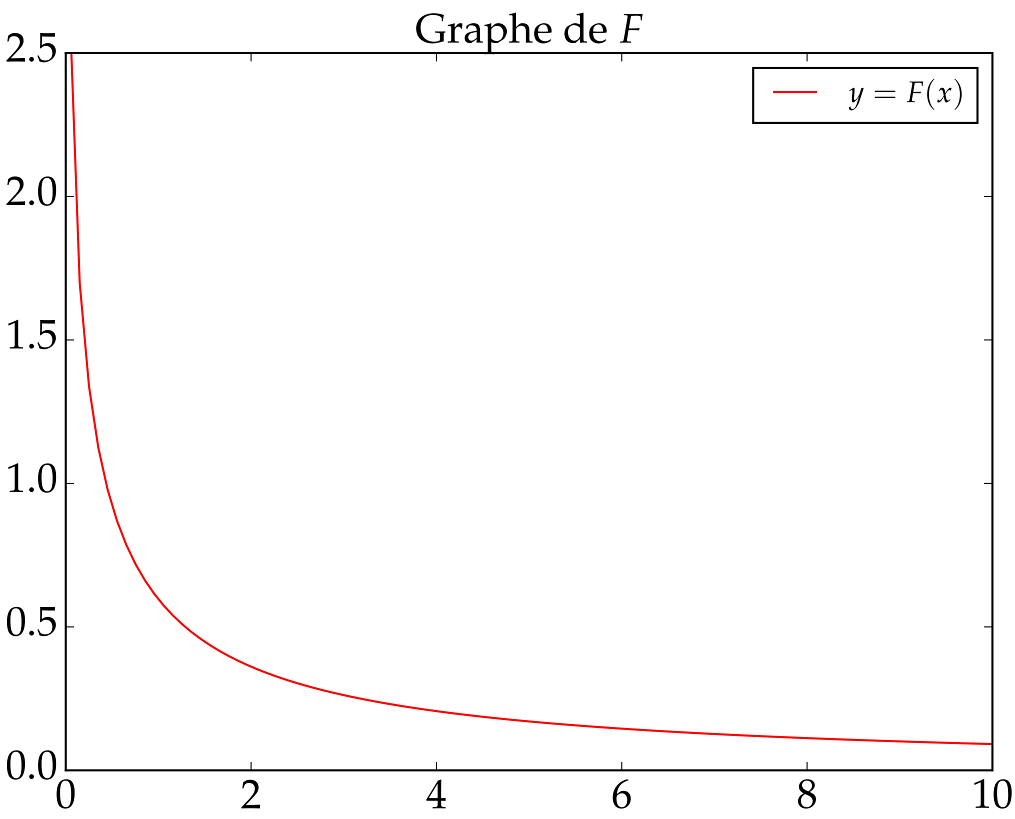
$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y,\ t\big) \leqslant (1-\lambda)f(x,t) + \lambda f(y,t)$$

pour tout $t \in I$. D'après **[[1.a.]]**, ces trois fonctions de t sont intégrables sur I et comme l'intégration conserve les inégalités, on en déduit que

$$F\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y),$$

ce qui prouve que F est convexe sur Ω.

7. On fait la synthèse de ce qui précède :



Et pour les curieux :

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad as integr
from scipy import inf as oo
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,t):
  return np.exp(-t)/(x+t)

def F(x):
  return integr(lambda t: f(x,t), 0, oo)[0]

X = np.linspace(0.05, 10, 100)
Y = [F(x) for x in X]

plt.ylim(0, 2.5)
plt.title(r"Graphe de $F$", size=20)
plt.plot(X, Y, color='r', label="$y=F(x)$")
plt.legend()
plt.savefig("pp1816a.eps", pad_inches=0.0)
```

8. a. Pour $0 < x \leqslant u$, il est clair que

$$0 \leqslant \frac{e^{-u}}{u^2} \leqslant \frac{1}{x^2}\, e^{-u}.$$

Comme $[u \mapsto e^{-u}]$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, on peut intégrer terme à terme : les inégalités sont conservées. On en déduit que

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\, du \leqslant \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-u}\, du = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

pour tout $x > 0$.

8. b. Soient $0 < x < A$. En intégrant par parties,

$$\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,du = \left[\frac{-e^{-u}}{u}\right]_x^A - \int_x^A \frac{e^{-u}}{u^2}\,du.$$

D'après **[[8.a.]]** et **[[3.]]**, on peut faire tendre A vers $+\infty$ (les deux intégrales sont convergentes) et on obtient :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\,du.$$

On déduit alors de (1) que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{1}{x} - e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\,du$$

et de (2) que

$$F(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

9. a. Soient $0 < x < A$. En intégrant par parties,

$$\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,du = \big[e^{-u}\,\ell n\, u\big]_x^A + \int_x^A e^{-u}\,\ell n\, u\,du.$$

D'après **[[1.c.]]** et **[[3.]]**, on peut faire tendre A vers $+\infty$ (les deux intégrales sont convergentes) et on obtient :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = -e^{-x}\,\ell n\, x + \int_x^{+\infty} e^{-u}\,\ell n\, u\,du.$$

L'égalité (4) se déduit alors de (1).

9. b. Encore d'après **[[1.c.]]**, l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\ell n\, u\,du$$

est convergente. En notant $C \in \mathbb{R}$, la valeur de cette intégrale, on en déduit que

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,\ell n\, u\,du \xrightarrow[x\to 0]{} C$$

c'est-à-dire

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,\ell n\, u\,du = C + o(1)$$

lorsque x tend vers 0.

L'égalité (5) se déduit alors de (4).

10. On admet que F est continue sur $]0, +\infty[$.

❧ D'après (5),

$$F(x) \sim -\ell n\, x$$

au voisinage de 0 et comme la fonction ℓn est intégrable au voisinage de 0 (fonction de réffence), on en déduit que la fonction F est intégrable au voisinage de 0.

❧ D'après (3),

$$F(x) \sim \frac{1}{x}$$

au voisinage de $+\infty$. Comme la fonction $[x \mapsto {}^1\!/\!_x]$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que la fonction F n'est pas intégrable au voisinage de 0.

REMARQUE.— On déduit de ce qui précède que l'intégrale impropre

$$\int_0^y F(x)\,dx$$

est convergente pour tout $y > 0$. Comme F est positive, on définit ainsi une fonction *croissante* de y et comme l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx$$

est divergente, on en déduit que

$$\int_0^y F(x)\,dx \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty.$$

(Le cours sur l'intégration des ordres de grandeur montre même que cette intégrale est équivalente à $\ell n\, y$ lorsque y tend vers $+\infty$.)

REMARQUE.— Il est facile de démontrer la continuité de F en appliquant le théorème de continuité. Pour tout $a > 0$,

$$\forall\, x \in [a, +\infty[,\ \forall\, t \in I, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant \big|f(a,t)\big|.$$

Le majorant est intégrable sur I et indépendant de x : la domination est établie sur $\mathcal{V} = [a, +\infty[$. On peut en déduire que F est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et donc continue sur $\Omega =]0, +\infty[$.

11. D'après **[[4.b.]]**, l'expression $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Comme $\ell n\, x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on déduit de (4) que

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}\,\ell n\, u\,du = \ell n\, x + o(1) \sim \ell n\, x$$

et par conséquent que

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\,\ell n\, u\,du \sim e^{-x}\,\ell n\, x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— Comme $[u \mapsto e^{-u}\,\ell n\, u]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on s'attendait bien à trouver un *infiniment petit* comme ordre de grandeur.