Problème de Mathématiques

Référence pp1819 — Version du 27 novembre 2025

On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions du type

$$\sum [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles.

On note $\mathscr{C}_{2\pi}$, l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les **coefficients de Fourier** d'une fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ sont notés

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Partie A. Exemples

1. Démontrer que la série trigonométrique

$$\sum \Big[\frac{1}{2^n}\cos nx + \frac{1}{3^n}\sin nx\Big]$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout entier $p \geqslant 2$, la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{ix}}{p}\Big)^n$$

et en déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\frac{1}{2^n}\cos nx + \frac{1}{3^n}\sin nx\Big].$$

(Il n'est pas utile de réduire au même dénominateur.)

2. Écrire la fonction

$$\varphi = [x \mapsto \exp(\cos x)\cos(\sin x)]$$

comme la somme d'une série trigonométrique.

☞ *On pourra écrire la fonction* $\big[x \mapsto \exp(e^{ix})\big]$ *comme la somme d'une série de fonctions.*

3. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos nx$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que la série trigonométrique

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie B. Questions de convergence normale

5. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

6. Soient a et b, deux réels quelconques. Démontrer que le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $[x \mapsto |a\cos x + b\sin x|]$ est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

7. Étudier la réciproque de **[5.]**

8. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

On admettra dans la suite que

$$\forall\, k \neq n, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

9. Soit f, la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

9. a. Justifier que $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.
9. b. Démontrer que $\alpha_n(f) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer aussi $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0.
On admettra dans la suite que $\beta_0(f) = 0$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n(f) = b_n.$$

10. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(f) = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) = \alpha_n(f) \cos nx + \beta_n(f) \sin nx.$$

On suppose dans cette question que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est notée g : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [\alpha_k(f) \cos kx + \beta_k(f) \sin kx].$$

10. a. Quelles relations a-t-on entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? entre $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?
10. b. On *admet* que : si une fonction $h \in \mathscr{C}_{2\pi}$ vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0,$$

alors h est la fonction nulle.
Démontrer que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
10. c. Conclure.

Solution ❀ Séries trigonométriques

Partie A. Exemples

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{2^n}\cos nx + \frac{1}{3^n}\sin nx.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leqslant \frac{2}{2^n}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et on reconnaît le terme général d'une série convergente (géométrique de raison $1/2$), donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

❧ Si $p \geqslant 2$, alors

$$\left|\frac{e^{ix}}{p}\right| = \frac{1}{p} < 1,$$

donc la série géométrique $\sum (e^{ix}/p)^n$ converge (absolument) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{p}{p - e^{ix}} = \frac{p(p-\cos x) + ip\sin x}{p^2 - 2p\cos x + 1}$$

(en faisant apparaître la quantité conjuguée du dénominateur). On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{p^n} = \frac{p(p-\cos x)}{p^2 - 2p\cos x + 1}$$

et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p\sin x}{p^2 - 2p\cos x + 1}.$$

❧ En prenant $p = 2$ et $p = 3$, on obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{4 - 2\cos x}{5 - 4\cos x} + \frac{3\sin x}{10 - 6\cos x}.$$

2. D'après le développement en série entière de exp,

$$\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$$

(le rayon de convergence étant infini, il est possible de choisir $z = e^{ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et donc, en prenant la partie réelle,

$$\mathfrak{Re}[\exp(e^{ix})] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

Par ailleurs, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos x) \cdot \exp(i \sin x)$ donc

$$\mathfrak{Re}[\exp(e^{ix})] = \exp(\cos x) \cdot \cos(\sin x).$$

On en déduit l'expression de φ comme somme d'une série trigonométrique :

$$\exp(\cos x) \cdot \cos(\sin x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

On peut choisir : $a_n = 1/n!$ et $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (mais pour le moment, rien ne prouve que ce choix est le seul possible).

REMARQUE.— Cette série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Prenons $a_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en prenant $x = 2k\pi$, on a

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n \cos nx = \frac{\cos(2kn\pi)}{n} = \frac{1}{n}$$

donc la série $\sum a_n \cos(nx)$ diverge (série harmonique).

Par conséquent, la série de fonctions $\sum a_n \cos nx$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE.— L'énoncé ne demande pas de trouver une série trigonométrique qui diverge pour *chaque* valeur de x, mais seulement une série qui diverge pour *au moins une* valeur de x !

4. On considère ici

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$$

Comme

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et que} \quad \left|u_n(\pi/2)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

on a $\|u_n\|_\infty = 1/\sqrt{n}$. Comme la série $\sum \|u_n\|_\infty$ est divergente (Riemann), la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Questions de convergence normale

5. Pour cette question et les deux questions suivantes, on pose

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

❧ Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant |a_n| + |b_n|.$$

On a un majorant indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et comme les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument (par hypothèse), ce majorant est bien le terme général d'une série convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

6. Le résultat à établir est évident si $a = b = 0$.

❧ Supposons donc $(a, b) \neq (0, 0)$ et notons

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe un angle $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\alpha, \beta) = (\cos\varphi, -\sin\varphi)$$

et d'après la formule d'addition pour le cosinus :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi).$$

❧ Il est alors clair que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

et comme, pour $x = -\varphi$,

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}$$

on en déduit que

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

7. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $[x \mapsto y = nx]$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On déduit alors de la question précédente que

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{R}} \left|u_n(x)\right| &= \max_{y\in\mathbb{R}} |a_n \cos y + b_n \sin y| \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.\end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on sait que

$$|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

(le théorème de Pythagore dit en particulier que les deux côtés de l'angle droit sont plus petits que l'hypothénuse).

Par conséquent : si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

❧ En résumé : la série trigonométrique $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ *si, et seulement si,* les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. (Cette caractérisation éclaire les résultats particuliers des **[1.]**, **[3.]** et **[4.]**)

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 nx = \frac{1 + 2\cos 2nx}{2}$$

donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx = \pi.$$

REMARQUE.— Cette intégrale est égale à 2π pour $n = 0$.

❧ Quels que soient les entiers k et n, la fonction

$$[x \mapsto \sin kx \cos nx]$$

est continue et impaire sur le segment $[-\pi, \pi]$, donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0.$$

REMARQUE.— L'hypothèse $k \neq n$ ne sert à rien. Elle avait, j'imagine, pour seule raison d'être d'éviter aux esprits laborieux de diviser par zéro en calculant des primitives après avoir linéarisé l'intégrande...

REMARQUE.— Pour l'intégrale d'un produit de cosinus, il *faut* linéariser l'intégrande et discuter ensuite sur la pulsation $(k - n)$: elle est, ou non, nulle ?

9. a. On pose une fois encore :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

❧ Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et l'énoncé suppose ici que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la somme f de cette série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}$.

❧ Les fonctions u_n sont toutes 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{N} u_n(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$$

et comme la convergence normale d'une série de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple de cette série de fonctions, on peut faire tendre N vers $+\infty$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x).$$

La fonction f est donc 2π-périodique.

❧ Bref : $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.

9. b. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \cos nx = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \cos nx.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|u_k(x) \cos nx\right| \leqslant \left|u_k(x)\right| \leqslant \|u_k\|_\infty.$$

Comme l'énoncé suppose ici que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors la série numérique $\sum \|u_k\|_\infty$ converge et la majoration qu'on vient d'établir montre que la série de fonctions

$$\sum u_k(x) \cos nx$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, converge normalement sur $[-\pi, \pi]$.

On peut donc calculer les coefficients de Fourier $\alpha_n(f)$ en intégrant terme à terme :

$$\begin{aligned}\alpha_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx\end{aligned}$$

d'après **[8.]**

On déduit encore de **[8.]** que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \alpha_n(f) = a_n \quad \text{et} \quad \alpha_0(f) = 2a_0.$$

10. a. Puisque, d'après l'énoncé, la série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer ici les résultats établis au **[9.a.]** et à la question précédente avec les substitutions suivantes :

$$a_0 \leftarrow \frac{\alpha_0(f)}{2}, \quad a_n \leftarrow \alpha_n(f), \quad b_0 \leftarrow 0, \quad b_n \leftarrow \beta_n(f),$$
$$f \leftarrow g, \quad \alpha_n(f) \leftarrow \alpha_n(g), \quad \beta_n(f) \leftarrow \beta_n(g).$$

On en déduit d'une part que la fonction g appartient à $\mathscr{C}_{2\pi}$ et d'autre part les relations suivantes entre les coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} &\alpha_0(g) = 2\cdot\frac{\alpha_0(f)}{2} = \alpha_0(f) \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad &\alpha_n(g) = \alpha_n(f) \\ &\beta_0(g) = 0 = \beta_0(f) \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad &\beta_n(g) = \beta_n(f).\end{aligned}$$

En résumé :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n(g) = \alpha_n(f) \quad \text{et} \quad \beta_n(g) = \beta_n(f).$$

10. b. Comme les fonctions f et g appartiennent à l'espace vectoriel $\mathscr{C}_{2\pi}$, la fonction h définie par

$$h = f - g$$

appartient aussi à $\mathscr{C}_{2\pi}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n(h) = \alpha_n(f) - \alpha_n(g) = 0$$

et de même $\beta_n(h) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après le lemme admis par l'énoncé, la fonction h est identiquement nulle, donc $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. c. *Exemple de synthèse* des résultats établis plus haut :

Si $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et si les deux séries $\sum \alpha_n(f)$ et $\sum \beta_n(f)$ convergent absolument, alors la série trigonométrique

$$\sum \left[\alpha_n(f)\cos nx + \beta_n(f)\sin nx\right]$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ (d'après **[5.]**) et de plus

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_n(f)\cos nx + \beta_n(f)\sin nx\right]$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ (d'après **[10.b.]**).

REMARQUE.— Il me paraît difficile de formuler une synthèse pertinente des résultats établis dans cette partie si on n'a pas déjà assez savant sur les séries de Fourier... (En revanche, si on a suivi un cours sur ce sujet, il est assez simple de retrouver le théorème qui vient d'être démontré ici !)