Problème de Mathématiques

Référence pp1913 — Version du 27 novembre 2025

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit
$$f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction f_n est intégrable sur I et calculer
$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$
En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

2. a. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et calculer l'expression de sa somme S.

2. b. Démontrer que la fonction S est intégrable sur I et calculer la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

3. Déterminer, *sans aucun calcul,* la nature de la série
$$\sum \int_0^{+\infty} \left|f_n(x)\right|\,dx.$$

Solution ❀ Intégration terme à terme

1. On *sait* que la fonction $[x \mapsto e^{-ax}]$ est intégrable sur I pour tout $a > 0$ et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n > 0$ et $2n > 0$, donc *la fonction* f_n *est intégrable sur* I en tant que combinaison linéaire de deux fonctions intégrables sur I. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n} - 2\cdot\frac{1}{2n} = 0.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

2. a. Soit $x \in I$. On a

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad f_n(x) = (e^{-x})^n - 2(e^{-2x})^n.$$

Comme $0 < e^{-x} < 1$ et $0 < e^{-2x} < 1$, les séries géométriques $\sum(e^{-x})^2$ et $\sum(e^{-2x})^n$ sont convergentes. En tant que combinaison linéaire de deux séries convergentes, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. Cela prouve que *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I.

❧ Par linéarité de la somme

$$\begin{aligned}\forall\, x \in I,\quad S(x) &= \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\\ &= \frac{e^{-x}(1+e^{-x}) - 2e^{-2x}}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}\\ &= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^x+1}.\end{aligned}$$

2. b. La fonction S est clairement continue sur I.

Elle tend vers une limite finie, égale à $1/2$, au voisinage de 0, donc elle est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a $S(x) \sim e^{-x}$ et, on l'a déjà rappelé, la fonction $[x \mapsto e^{-x}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc S est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc *la somme* S *est intégrable sur* I.

De plus,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} S(x)\,dx &= -\int_0^{+\infty}\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx\\ &= \lim_{A\to+\infty}\big[-\ell n(1+e^{-x})\big]_0^A\\ &= \ell n\,2.\end{aligned}$$

3. On a démontré que la série de fonctions $\sum f_n$ convergeait simplement sur I et que sa somme S était continue sur I. Par conséquent, si la série

$$\sum\int_0^{+\infty}\big|f_n(x)\big|\,dx$$

était convergente, alors on aurait

$$\ell n\,2 = \int_0^{+\infty} S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

(Théorème lebesguien d'intégration terme à terme), ce qui est bien sûr faux.

Donc la série

$$\sum\int_0^{+\infty}\big|f_n(x)\big|\,dx$$

est *divergente*.