Problème de Mathématiques

Référence pp1914 — Version du 27 novembre 2025

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note ici

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On notera I, l'intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum h_n x^n$. L'objet de ce problème est d'étudier les fonctions définies par

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n x^n}{n}.$$

On *admettra* que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. Soit $n \geqslant 1$, un entier. Démontrer que

$$h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

3. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum h_n x^n$. En déduire l'intervalle I.

4. Calculer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \frac{x^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{h_n x^n}{n}.$$

5. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction

$$g = [x \mapsto \ln(1-x)]\,.$$

6. Démontrer que la fonction

$$G = \left[x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}\right]$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Établir une relation entre G et H.

7. Soit L, la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

7. a. Exprimer L à l'aide de la fonction g.

7. b. Démontrer que L est développable en série entière et donner son développement. *On énoncera précisément le théorème utilisé.*

7. c. En déduire une relation entre $(T - S)$ et L.

8. Soit $0 < y < 1$.

8. a. Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,du$$

est convergente et démontrer que

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,du + S(y) = 0.$$

☞ *On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction* g.

8. b. Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du$$

est convergente et que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

8. c. Démontrer que

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln y \cdot \ln(1-y).$$

9. Exprimer la valeur de $T(1/2)$ en fonction de π.

Solution ❀ Séries entières

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$h_{2n} - h_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et comme

$$\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$$

pour tout entier $n < k \leqslant 2n$, on en déduit que

$$h_{2n} - h_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. Le **nombre harmonique** h_n est la n-ième somme partielle d'une série de terme général positif, donc la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. D'après le Théorème de la limite monotone, ou bien cette suite tend vers $+\infty$, ou bien elle converge vers un réel ℓ.

Si (h_n) convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite extraite $(h_{2n})_{n\geqslant 1}$ convergerait aussi vers ℓ et la différence $h_{2n} - h_n$ tendrait vers 0, ce qui contredirait **[1.]**

Par conséquent, la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— On peut se lancer dans une comparaison somme/intégrale, mais c'est plus long à rédiger correctement et, surtout, cela montre qu'on n'a pas vu le rapport entre les deux questions.

3. Comme h_n tend vers $+\infty$, la série $\sum h_n 1^n$ diverge grossièrement, ce qui prouve que le rayon de convergence est inférieur à 1.

D'autre part, $1/k \leqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$, donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant h_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Pour tout $0 < x < 1$, cela prouve que $h_n x^n = \mathcal{O}(nx^n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et comme, par croissances comparées, la suite $(nx^n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, la suite $(h_n x^n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, ce qui prouve que le rayon de convergence est supérieur à 1.

Le rayon de convergence est donc égal à 1. L'intervalle ouvert de convergence est égal à $]-R, R[$ (par définition), donc

$$I =]-1, 1[.$$

4. Pour $x > 0$, on pose $u_n = x^n/n^2 > 0$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

D'après la règle de D'Alembert,

— si $0 < x < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument ;

— si $x > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

❧ Pour tout $x > 0$, par **[3.]**,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < \frac{1}{n} x^n \leqslant \frac{h_n}{n} x^n \leqslant x^n.$$

Si $0 < x < 1$, alors la série géométrique $\sum x^n$ est convergente, donc la série $\sum \frac{h_n}{n} x^n$ est convergente (Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif), ce qui prouve que le rayon de convergence est supérieur à 1.

Si $x > 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n} x^n$ diverge grossièrement (croissances comparées de x^n et de $1/n$), donc la série $\sum \frac{h_n}{n} x^n$ diverge grossièrement elle aussi, ce qui prouve que le rayon de convergence est inférieur à 1.

❧ Finalement, les rayons de convergence des deux séries entières

$$\sum \frac{1}{n^2} x^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{h_n}{n} x^n$$

sont tous les deux égaux à 1.

5. On doit savoir que

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \ell n(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

6. On doit aussi savoir que

$$\forall\, x \in \left]-1,1\right[,\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

D'après le Théorème du produit de Cauchy, le produit de deux fonctions développables en série entière sur $I = \left]-1,1\right[$ est aussi développable en série entière sur I et de plus,

$$\forall\, x \in I,\quad \frac{\ell n(1-x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$$

où

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

étant entendu que $a_0 = 0$, que $a_k = -1/k$ pour tout $k \geqslant 1$ et que $b_j = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On en déduit que $w_0 = 0$ et que

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} \cdot 1 = -h_n.$$

Ainsi,

$$\forall\, x \in \left]-1,1\right[,\quad G(x) = -H(x).$$

7. a. En tant que somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1, la fonction H est continue sur I (et en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence — mais cela est sans importance ici). D'après le Théorème fondamental, la fonction H admet donc des primitives sur I et

$$\begin{aligned}\forall\, x \in I,\quad L(x) &= L(0) + \int_0^x H(t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{-\ell n(1-t)}{1-t}\,dt &&\text{par } \textbf{[6.]} \\ &= \frac{\big[\ell n(1-x)\big]^2}{2} = \frac{\big[g(x)\big]^2}{2}.\end{aligned}$$

7. b. Comme la fonction H est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1 d'après **[3.]**, ses primitives sont développables en série entière sur l'intervalle ouvert de convergence $I = \left]-1,1\right[$ et leurs développements s'obtiennent en primitivant terme à terme. En particulier,

$$\forall\, x \in I,\quad L(x) = L(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

7. c. D'après **[4.]**, toutes les séries qui apparaissent dans le calcul ci-dessous sont absolument convergentes.

Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}(T-S)(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(h_n - \frac{1}{n}\Big)\frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} h_{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

donc $(T-S)(x) = L(x)$ pour tout $x \in I$ par **[7.b.]**

8. a. Pour $0 < u < 1$, on pose

$$\varphi(u) = \frac{\ell n(1-u)}{u}.$$

La fonction φ est évidemment continue sur $\left]0,1\right[$. Lorsque u tend vers 0,

$$\varphi(u) \sim \frac{-u}{u} = -1$$

donc φ est prolongeable en une fonction continue sur $\left[0,1\right[$ (en posant $\varphi(0) = -1$). Elle est donc intégrable sur $\left]0,y\right]$ pour tout $0 < y < 1$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale.

❧ Pour $0 < u \leqslant y$,
$$\frac{\ell n(1-u)}{u} = \frac{g(u)}{u} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n}.$$
Comme le *segment* $[0, y]$ est contenu dans l'*intervalle ouvert de convergence* I (puisque $0 < y < 1$), la série entière $\sum \frac{1}{n} u^{n-1}$ converge normalement sur le segment $[0, y]$. On peut donc intégrer terme à terme :
$$\int_0^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\,du = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^y \frac{u^{n-1}}{u}\,du$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^2} = -S(y).$$

8. b. On sait par **[8.a.]** que la fonction φ est continue sur $]0, 1[$ et intégrable au voisinage de 0.
Considérons le changement de variable *affine* $u = 1 - x$. Alors
$$\varphi(u) = \frac{\ell n\, x}{1+x} \underset{x \to 0}{\sim} \ell n\, x.$$
On sait que ℓn est intégrable au voisinage de 0. Par comparaison, l'expression $\frac{\ell n\, x}{1+x}$ est intégrable au voisinage de $x = 0$ et, d'après le Théorème de changement de variable (version affine !), la fonction φ est intégrable au voisinage de $u = 1$.
Ainsi, la fonction φ est intégrable sur $]0, 1[$ et l'intégrale est donc convergente.
❧ Par définition des intégrales généralisées convergentes,
$$\int_0^1 \varphi(u)\,du = \lim_{y \to 1} \int_0^y \varphi(u)\,du = \lim_{y \to 1} -S(y)$$
d'après **[8.a.]**
Il est clair que
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0, 1], \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Comme le majorant est indépendant de x et que c'est le terme général d'une série convergente, cela prouve que la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur le segment $[0, 1]$. Par conséquent, sa somme S est continue sur le segment $[0, 1]$ et en particulier
$$\lim_{y \to 1} -S(y) = -S(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{6}.$$
Finalement, on a bien
$$\int_0^1 \frac{\ell n(1-u)}{u}\,du = \frac{-\pi^2}{6}.$$
REMARQUE.— Il était possible (et pas plus long) aussi d'appliquer le Théorème lebesguien d'intégration terme à terme.

8. c. D'après **[8.b.]** et la relation de Chasles,
$$S(1-y) - S(1) = \int_{1-y}^1 \frac{\ell n(1-v)}{v}\,dv.$$
Le changement de variable affine $v = 1 - u$ prouve alors que l'intégrale
$$\int_0^y \frac{\ell n\, u}{1-u}\,du$$
est convergente et que
$$\int_0^y \frac{\ell n\, u}{1-u}\,du = \int_{1-y}^1 \frac{\ell n(1-v)}{v}\,dv.$$
Pour $0 < x < y < 1$, on intègre par parties sur $[x, y]$:
$$\int_x^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\,du = \big[\ell n\, u \cdot \ell n(1-u)\big]_x^y + \int_x^y \frac{\ell n\, u}{1-u}\,du.$$

On fait maintenant tendre x vers 0, le réel y restant fixé.

Il est clair que
$$\ell n\, x \cdot \ell n(1-x) \sim -x\,\ell n\, x \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$
Par **[8.a.]**,
$$\int_x^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\,du \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\,du = -S(y).$$
Enfin, d'après le changement de variable précédent,
$$\int_x^y \frac{\ell n\, u}{1-u}\,du \xrightarrow[x\to 0]{} S(1-y) - S(1).$$
Par conséquent,
$$-S(y) = \ell n\, y \cdot \ell n(1-y) + S(1-y) - S(1)$$
c'est-à-dire
$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ell n\, y \cdot \ell n(1-y).$$

VARIANTE.— D'après **[8.a.]**, la fonction φ étant prolongeable en une fonction continue sur $[0,1[$, on peut invoquer le Théorème fondamental pour la fonction S : cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et
$$\forall\, 0 < y < 1, \quad S'(y) = \frac{-\ell n(1-y)}{y}.$$
On en déduit que la fonction Φ, définie par
$$\forall\, 0 < y < 1, \quad \Phi(y) = S(y) + S(1-y) + \ell n\, y \cdot \ell n(1-y)$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa dérivée est identiquement nulle. Par conséquent, la fonction Φ est constante sur $]0,1[$. Comme $\ell n\, y \cdot \ell n(1-y)$ tend vers 0 lorsque y tend vers 0 (justifié plus haut) et que la fonction S est continue sur le segment $[0,1]$ (**[8.b.]**),
$$\Phi(y) \xrightarrow[y\to 0]{} S(0) + S(1) + 0 = \frac{\pi^2}{6}$$
ce qui prouve que Φ est identiquement égale à $\pi^2/6$ sur tout l'intervalle $]0,1[$.

9. Par **[7.c.]**, $(T-S)(1/2) = L(1/2)$. Par **[8.c.]**,
$$\frac{\pi^2}{6} = S(1/2) + S(1/2) + (\ell n\, 2)^2.$$
Enfin, par **[7.a.]**,
$$L(1/2) = \frac{(\ell n\, 2)^2}{2} = T(1/2) - \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi^2}{6} - (\ell n\, 2)^2\Big]$$
et donc
$$T(1/2) = \frac{\pi^2}{12}.$$