Problème de Mathématiques

Référence pp2015 — Version du 27 novembre 2025

On considère l'équation différentielle suivante.

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 2x^3 \tag{E}$$

Partie A. Équation homogène

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E).

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0 \tag{H}$$

On suppose donc qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ soit un réel $r > 0$ et on pose

$$\forall\, x \in \left]-r, r\right[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de réels non nuls tels que

$$\begin{aligned} x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) & \\ &= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n \end{aligned}$$

pour tout $x \in \left]-r, r\right[$.

2. Démontrer que la fonction f est solution de (H) sur l'intervalle $\left]-r, r\right[$ si, et seulement si, $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire que : si f est solution de (H) sur $\left]-r, r\right[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

4. Réciproquement, démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g = \left[x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}\right]$$

est une solution de (H) développable en série entière sur $\left]-1, 1\right[$.

Partie B. Résolution sur $\left]0, 1\right[$

On note $I = \left]0, 1\right[$.

Étant donnée une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall\, x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

5. Démontrer que la fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Exprimer z' et z'' en fonction de y, y' et y''.

6. Démontrer que la fonction y est une solution de (E) sur I si, et seulement si, la fonction z est une solution de l'équation différentielle

$$xz''(x) + z'(x) = 2x \tag{E_1}$$

sur I.

7. Soit $z : I \to \mathbb{R}$, une solution de (E_1). Démontrer qu'il existe un réel λ tel que

$$\forall\, x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

8. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.

Solution ❀ Solutions analytiques d'une équation différentielle

Partie A. Équation homogène

1. En tant que somme d'une série entière dont le rayon de convergence r est strictement positif, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$ et ses dérivées peuvent être calculées en dérivant terme à terme.

On en déduit que, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned} x^2(1-x)f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} \\ -x(1+x)f'(x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} \\ f(x) &= a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned} x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= a_0 + (a_1 - a_1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)x^{n+1} \\ &= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n. \end{aligned}$$

2. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle homogène (H) sur $]-r, r[$ si, et seulement si,

$$\forall\, x \in]-r, r[, \quad a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0.$$

Les deux membres de cette identité sont des sommes de séries entières, dont les rayons de convergence sont tous les deux strictement positifs. D'après le Théorème d'identification terme à terme, l'identité précédente équivaut donc à

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 2, \quad \underbrace{(n-1)^2}_{>0}(a_n - a_{n-1}) = 0.$$

Finalement, la fonction f est solution de (H) sur $]-r, r[$ si, et seulement si,

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 2, \quad a_n = a_{n-1}$$

c'est-à-dire (par changement d'indice) :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = a_n.$$

3. Par conséquent, si f est une solution développable en série entière de (H), alors il existe un réel a_0 tel que

$$\forall\, x \in]-r, r[, \quad f(x) = a_0 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{a_0 x}{1-x}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1 (pour $a_0 \neq 0$) ou à $+\infty$ (pour $a_0 = 0$).

4. Tout d'abord, comme on vient de le voir, la fonction g est bien développable en série entière sur $]-1, 1[$, quelle que soit la valeur de λ.

Par ailleurs, quel que soit $x \in]-1, 1[$,

$$g'(x) = \frac{\lambda}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{2\lambda}{(1-x)^3}$$

et on peut en déduire directement que g est bien une solution de (H) sur $]-1, 1[$.

Partie B. Résolution sur $]0,1[$

5. Par hypothèse, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. D'autre part, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{1}{x} - 1\right]$$

est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, donc elle est aussi de classe $\mathscr{C}^2$. Par produit, la fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

On vérifie sans peine que, pour tout $x > 0$,

$$z'(x) = \frac{-y(x)}{x^2} + \frac{1-x}{x}\, y'(x)$$
$$z''(x) = \frac{2y(x)}{x^3} - \frac{2y'(x)}{x^2} + \frac{1-x}{x}\, y''(x).$$

6. On déduit des expressions précédentes que, pour tout $x > 0$,

$$xz''(x) + z'(x) = \frac{1}{x^2}\left[(1-x)x^2y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)\right]$$

et donc que : y est une solution de (E) sur I si, et seulement si,

$$\forall\, x > 0, \quad xz''(x) + z'(x) = \frac{2x^3}{x^2} = 2x.$$

7. La fonction $u = z'$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On peut appliquer les méthodes usuelles.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $[x \mapsto K/x]$.

Une solution particulière de l'équation complète est égale à $[x \mapsto x]$ (on peut la trouver au talent, en faisant varier la constante ou simplement en analysant l'énoncé).

Le principe de superposition donne alors la solution générale de (E_1) : la fonction z est une solution de (E_1) si, et seulement si, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

8. On déduit de la question précédente que z est une solution de (E_1) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall\, x > 0, \quad z(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \ln x + \mu.$$

On déduit alors de **[6.]** que y est une solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$y(x) = \frac{x}{1-x}\, z(x)$$
$$= \mu \cdot \frac{x}{1-x} + \lambda \cdot \frac{x \ln x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}.$$

On reconnaît successivement les solutions développables en série entière de l'équation homogène (étudiée dans la première partie) ; des solutions *non* développables en série entière de l'équation homogène (ces fonctions présentent une tangente verticale à l'origine, incompatible avec la possibilité d'un développement en série entière) ; et enfin une solution particulière de l'équation complète.