Problème de Mathématiques

Référence pp2126 — Version du 27 novembre 2025

On considère la fonction f définie par

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et expliciter sa dérivée. En déduire que f est convexe.

2. Tracer l'allure du graphe de f. On précisera son comportement au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'au voisinage de 1.

3. On cherche à préciser le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

3. a. Démontrer que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\, dt.$$

3. b. En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution ❀ Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. La fonction $\varphi = [t \mapsto e^t/t]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$. D'après le Théorème fondamental, f est une primitive de cette fonction, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f'(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f''(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \geqslant 0$$

et donc que f est bien convexe sur $[1, +\infty[$.

2. Au voisinage de $x = 1$,

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + o(x-1)$$

donc la droite $\big[y = e \cdot (x-1)\big]$ est tangente au graphe de f au point $(x = 1, y = 0)$.

La fonction φ est une fonction continue, positive, qui n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (puisqu'elle tend vers $+\infty$). Or

$$\forall\, 1 \leqslant t \leqslant x, \quad \frac{e^t}{x} \leqslant \frac{e^t}{t}$$

et l'intégration conserve les inégalités, donc

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) \geqslant \int_1^x \frac{e^t}{x}\,dt = \frac{e^x - e}{x}.$$

Par croissances comparées de x^2 et de e^x, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Le graphe de f admet donc une branche parabolique d'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$.

3. a. Intégration par parties !

3. b. Comme on l'a déjà remarqué, la fonction φ est une fonction continue, positive, qui n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ et il est clair que

$$\frac{e^t}{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\big(\varphi(t)\big).$$

Par conséquent,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\right)$$

et on peut donc réécrire l'égalité établie à la question précédente sous la forme

$$f(x) + o\big(f(x)\big) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{e^x}{x} + o\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

et en conclure que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}.$$