Problème de Mathématiques

Référence pp2131 — Version du 27 novembre 2025

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $a_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

On note f, la somme de la série entière $\sum a_n x^n$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_n \leqslant a_0.$$

2. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1.

3. a. Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{x^n}{n+2}.$$

3. b. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

est-elle définie ?

3. c. On note $\sum w_n x^n$ le produit de Cauchy des deux séries entières

$$\sum a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{x^n}{n+2}.$$

Donner l'expression de w_n en fonction des a_k. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

3. d. En déduire que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad f'(x) = f(x) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right).$$

4. Exprimer $f(x)$, pour $0 \leqslant x < 1$, à l'aide des fonctions usuelles.

5. Comment choisir la valeur de a_0 pour que $f(x)$ soit la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$?

Une telle variable X est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ?

Solution ❀ Séries entières

1. Nous allons démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 < a_k \leqslant a_0 \tag{HR}$$

ce qui prouvera que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_n \leqslant a_0.$$

- La propriété est évidente pour $n = 0$.
- On suppose que (HR) est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Dans ces conditions,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}$$

est strictement positif comme somme de réels strictement positifs.

D'autre part,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{a_0}{n-k+2} \leqslant \frac{a_0}{2}.$$

En sommant ces inégalités, on en déduit que

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \times (n+1) \cdot \frac{a_0}{2} \leqslant \frac{a_0}{2} \leqslant a_0.$$

En combinant l'encadrement trouvé avec (HR), on obtient que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n+1, \quad 0 < a_k \leqslant a_0$$

et donc que la propriété (HR) est héréditaire.

Cette propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le résultat est ainsi établi.

2. D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc

$$a_n x^n = \mathcal{O}(x^n).$$

Or la série géométrique $\sum x^n$ converge absolument pour tout $|x| < 1$, donc, par comparaison, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $|x| < 1$.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1.

3. a. Pour $x > 0$, on pose

$$u_n = \frac{x^n}{n+2}$$

et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+3} \cdot x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

D'Après la règle de D'Alembert,

— si $x > 1$, la série $\sum u_n x^n$ diverge grossièrement ;

— si $0 < x < 1$, la série $\sum u_n x^n$ converge absolument.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1.

3. b. D'après la question précédente, la somme de la série $\sum u_n$ est définie au moins pour $|x| < 1$ et au plus pour $|x| \leqslant 1$.

Pour $x = 1$, la série diverge par comparaison avec la série harmonique (série divergente de terme général positif).

Pour $x = -1$, la série converge d'après le Critère spécial des séries alternées (car $\frac{1}{n+2}$ tend vers 0 en décroissant).

Par conséquent, la somme est définie si, et seulement si, $x \in [-1, 1[$.

3. c. Par définition, le produit de Cauchy des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ est la série entière $\sum w_n x^n$ avec

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n+2-k} = (n+1)a_{n+1}.$$

❧ On étudie ici le produit de Cauchy de deux séries entières dont le rayon de convergence est au moins égal à 1. Par conséquent, le rayon de convergence du produit de Cauchy est lui aussi supérieur ou égal à 1.

REMARQUE.— D'après le cours, le rayon de convergence de la série entière $\sum(n+1)a_{n+1}x^n$ est *égal* au rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et donc au moins égal à 1.

3. d. D'après le cours, puisque le rayon de convergence du produit de Cauchy est au moins égal à 1,

$$\forall\, |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = f(x) \cdot \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\Bigr).$$

On a aussi remarqué que $w_n = (n+1)a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que

$$\begin{aligned}\forall\, |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.\end{aligned}$$

Comme le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est supérieur à 1 et donc strictement positif, sa somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ (au moins) et

$$\forall\, |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\Bigl[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Bigr] = f'(x).$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad f'(x) = f(x) \cdot \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\Bigr).$$

4. D'après la première question, $f(x) > 0$ pour tout $0 \leqslant x < 1$ et d'après la question précédente,

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

On intègre terme à terme sur tout segment $[0 \leftrightarrow -]\, x$ contenu dans l'intervalle ouvert de convergence :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad \ell n \frac{f(x)}{f(0)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Bigr) x^{n+1} \\ &= -\,\ell n(1-x) + \frac{\ell n(1-x) + x}{x}.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\ell n \frac{f(x)}{f(0)} = -\,\ell n(1-x) + \frac{\ell n(1-x)}{x} + 1$$

et finalement

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad f(x) = a_0 \cdot e \cdot (1-x)^{(1-x)/x}.$$

5. Si la fonction f est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X, alors elle est continue sur $[0,1]$ et tend vers 1 au voisinage de $x = 1$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to 1} \ell n \frac{f(x)}{f(0)} - 1 = \ell n \frac{1}{f(0)} - 1$$

et il faut donc que

$$\ell n \frac{1}{f(0)} - 1 = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\,\ell n(1-x)}{x} = 0$$

et donc que $a_0 = f(0) = e^{-1}$.

❧ Dans ce cas, X est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, la fonction génératrice est dérivable en $x = 1$. Or

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-x - \ln(1-x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$$

et comme $f(x)$ tend vers 1 au voisinage de 1, on en déduit que $f'(x)$ tend vers $+\infty$: d'après l'égalité des accroissements finis,

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = +\infty$$

donc la fonction f n'est donc pas dérivable en $x = 1$ et X n'est pas une variable aléatoire d'espérance finie.

REMARQUE.— On pourrait aussi passer par un développement limité pour conclure. On pose $x = 1 - h$ (avec h proche de 0) :

$$\begin{aligned}(1-x)^{(1-x)/x} &= \exp\left[\frac{h}{1-h}\ \ln h\right] \\ &= \exp\big[h \ln h \cdot (1 + h + o(h))\big] \\ &= \exp\big[h \ln h + o(h \ln h)\big] \\ &= 1 + h \ln h + o(h \ln h).\end{aligned}$$

On retrouve ainsi d'une part que

$$\lim_{x \to 1} (1-x)^{(1-x)/x} = 1$$

et d'autre part que

$$\frac{(1-x)^{(1-x)/x} - 1}{x - 1} \underset{h \to 0}{\sim} -\ln h$$

et donc que le taux d'accroissement tend vers $+\infty$.